―學 生 論 文―

沈砂池問題に對する等角寫像の 2, 3 の應用に就て

準員　合　田　　健*

本研究は次に述べる 2, 3 の境界形狀に對する 2 次元ポテンシヤル流を等角寫像の方法によつて計算し，沈砂池内の 2 次元流に對する池の平面形狀及び流入流出口の位置の影響に關しての一示唆を試みたものである。

この研究については京大教授石原博士の御指導と同囑託杉本修一，先輩富井義郎の兩氏の御援助に俟つ所が極めて多く，玆に深謝の意を表する次第である。

1. 半無限大の帶狀池內の 2 次元ポテンシヤル流

最も簡單な場合として，圖―1 の如く一方が壁で限られ或幅を持つ長さ無限大の池にて横壁上の一點に湧出點を置いた場合を考える。そこで z―平面に於ける池の實形を ζ―平面の上半面に寫像すれば，Schwarz-Christoffel の定理により，

$$\frac{dz}{d\zeta}=K/\sqrt{\zeta(\zeta+1)},\quad \text{但し}\ z=x+iy,\ K:\text{常數} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\quad z=2K\log\left(\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta}\right)\quad\cdots\cdots(2)$$

今複素速度ポテンシヤルを W，單位時間に對する流出量を Q とすれば，

$$W=(Q/\pi)\log(\zeta-a)\quad\cdots\cdots(3)$$

玆に a は z―平面に於ける吹出點に對應する ζ―平面上の點である。$\zeta=\infty$ にて流速が $v=Q/h$ となる條件より常數 K を定めると，

$$K=h/\pi\quad\cdots\cdots(4)$$

從つて $$W=\frac{Q}{\pi}\log\left\{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\right)-a\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

今一般に z―平面に於ける吹出點の位置を x_0+iy_0（圖―1 の場合は $x_0=0$）とすれば，ζ―平面上の位置が a となることから，

$$a=\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_0}{h}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y_0}{h}\right)-\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_0}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y_0}{h}\right)+i\frac{1}{2}\sinh\left(\pi\frac{x_0}{h}\right)\sin\left(\pi\frac{y_0}{h}\right)\quad\cdots\cdots(6)$$

となり，流速の座標軸方向の分値 u, v は

$$u-iv=\frac{dw}{dz}=\frac{Q}{2k}\sinh\left(\pi\frac{z}{h}\right)\Big/\left\{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\right)-a\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

にて右邊を實部，虚部に分離すれば求められる。

今 圖―1 にて OC 壁に沿う流速 u_0 と BA 壁に沿う流速 u_h とを (7) 式より計算し，その比 u_h/u_0 を求めれば 圖―2 の樣になる。

この圖を見るに吹出點の位置 y_0/h の値如何に拘らず，u_h/u_0 は $x/h=2$ の點に於て 1 に收斂している。これは吹出點をどこに置いても，池幅の 2 倍の距離だけ流下すれば，流れが一樣になることを示すものであつて，沈砂池の長さを決定する上に一つの示唆を與えるものである。同樣にして y 軸方向の流速の均一性を調べ，又 x―方向の流速分布圖，並に流線，ポテンシヤル線を畫いて見たが，之等の結果を綜合して，端壁に吹出點を 2 ケ所設ける場合は，夫々兩端より 1/4 の點に置くと幅の方向にも長さの方向にも流れの均一性が最も秀れていることを知つた。實際上は水と壁との間の摩擦のために，1/4 の點より若干內側に置いた方が良いと思われるが，なるべく速く池內の流速分布を一樣にするといふ觀點からは從來の如く池幅の約 1/3 點に置くことは好ましくないわけである。

2. 矩形沈砂池內の 2 次元ポテンシヤル流

圖―3 の如き矩形池に於て兩端壁に夫々流入口及流出口を置いた場合を考える。z―平面に於ける實形を ζ―平面の上半面に寫像すれば，Schwarz-Christoffel の定理によつて，

$$z=\int d\zeta/\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\quad\cdots\cdots(8)$$

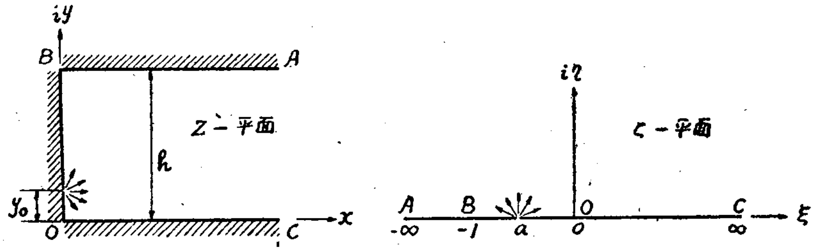
所が $\zeta=1$ にて $z=l/2$，$\zeta=1/k$ にて $z=l/2+ik$ と云う條件から，次の關係が得られる。

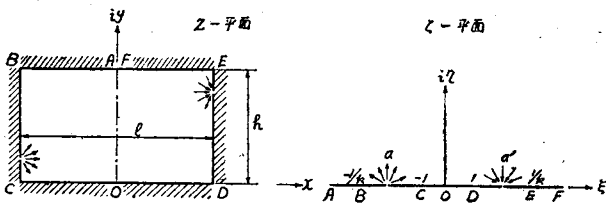
$$z=Kx/(l/2)+iK'y/h\quad\cdots\cdots(9)$$

玆に K, K' は夫々 k^2, $1-k^2=k'^2$ を母數とする完全

* 京都大學大學院特別研究生（昭 22. 9. 京都大學工學部卒業）

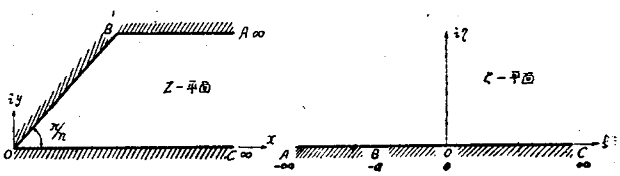
圖—1. 半無限矩形池の寫像關係

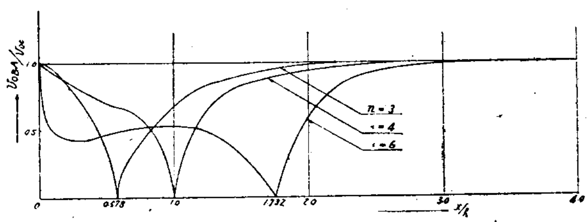




←圖—3. 矩形池の寫像關係

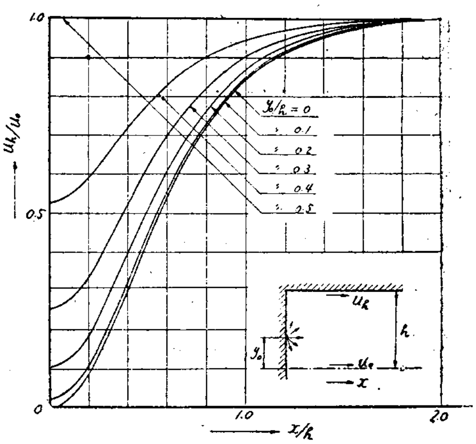
圖—4. 半無限鋭角池の寫像關係→





←圖—5. 速度比曲線

圖—2. 速度比曲線



楕圓積分である。故に ζ は (8) 式より Jacobi の楕圓函數 $\mathrm{sn}\,(z,k)$ を用いて,

$$\zeta=\mathrm{sn}\,(z,k)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

吹出及吸込量を Q, それらの點の ζ—平面上の位置を夫々 a, a' とすると, 複素速度ポテンシャル W は,

$$W=(Q/\pi)\{\log(\zeta-a)-\log(\zeta-a')\}\cdots\cdots(11)$$

今 z—平面上の吹出及吸込點の位置を夫々 $-l/2+iy_0$, $l/2+iy_0'$ とし, それに應ずる z の値を z_0, z_0' とすると,

$$z_0=-K+iK'y_0/h=-K+inK',\quad \text{但し}\ n=y_0/h$$

$$z_0'=K+iK'y_0'/h=K+in'K',\quad \text{但し}\ n'=y_0'/h$$

$$\therefore\ a=-1/\overline{\mathrm{dn}}\,(n,K'),\quad a'=1/\overline{\mathrm{dn}}\,(n',K')\cdots\cdots(12)$$

茲に $\overline{\mathrm{dn}}$ は $1-k^2=k'^2$ を母數とする Jacobi の楕圓

函數である。次に (11) 式の虚部として流れの函數 ψ を求めると，$X=Kx/(l/2)$; $Y=K'y/h$ として，

$$\psi=\frac{Q}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{B}{A-a}-\tan^{-1}\frac{B}{A-a'}\right\}$$

但し $$A=\frac{\mathrm{sn}(X)\,\overline{\mathrm{dn}}(Y)}{\overline{\mathrm{cn}}^2(Y)+k^2\,\mathrm{sn}^2(X)\overline{\mathrm{sn}}^2(Y)},$$

$$B=\frac{\mathrm{cn}(X)\mathrm{dn}(X)\overline{\mathrm{sn}}(Y)\overline{\mathrm{cn}}(Y)}{\overline{\mathrm{cn}}^2(Y)+k^2\,\mathrm{sn}^2(X)\overline{\mathrm{sn}}^2(Y)}$$

となり，流速の座標軸方向の分値は，

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad\cdots\cdots(14)$$

として求められる。かくして池内の流速分布に及ぼす細長比 l/h 並に吹出點の位置 $n=y_0/h$ の影響を調べ，更に $y_0/h=0.3$, $y_0'/h=1.0$ とし

k^2	0.1	0.2	0.3
l/h	0.924	1.618	2.422

とした場合の流線を畫いた結果，次の事實を明かにした。即ちこの場合は流入點の方に絞られ，圖―1 に比べて流れの均一性が遙かに悪くなる。又池の細長比 l/h を 2 以上としても效果はなく，吹出及吸込點は共に幅の中央に置いた時が最もよい。なお縦壁に沿う流速分布は細長比によつては相似的た，吹出點の位置によつては最大流速點の位置が變化し，吸込側端壁に沿う流速分布は細長比及吹出點の位置に拘らず同一である。

3. 鋭角池内の 2 次元ポテンシヤル流

池への流入を圓滑ならしめるために圖―4 の如く鋭角隅點に流入口を置く場合を考へる。隅角 $\pi/n\,(n\geqq 2)$ の影響を調べるために，圖の如き半無限池を考えて z―平面上の實形を ζ―平面の上半面に寫像すれば，Schwarz-Christoffel の定理によつて，

$$\frac{dz}{d\zeta}=k/\{(\zeta+a)^{1/n}\zeta^{1-1/n}\},\quad k:\text{常數}\ \cdots(15)$$

所が z―平面上の吹出點 0 を ζ―平面上の原點 0 に對應せしめるから，

$$w=\frac{Q}{\pi}\log\zeta$$

$$\therefore\quad u-iv=\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=\frac{Q}{\pi}\frac{1}{\zeta}\{(\zeta+a)^{1/n}\zeta^{1-1/n}/k\}$$

これに $\left(\dfrac{dw}{dz}\right)_{z\to\infty}=Q/h$ なる條件を入れると，

$$k=\frac{h}{\pi}\lim_{\to\infty}\left(1+\frac{a}{\zeta}\right)^{1/n}=h/\pi,\ \text{但し}\ h:\text{池の幅}\quad\cdots\cdots(16)$$

$$\therefore\quad u-iv=\frac{Q}{h}\left(1+\frac{a}{\zeta}\right)^{1/n}\cdots\cdots(17)$$

今 $n=6, 4, 3$ の 3 つの場合につき，$a=1$ として (15) 式を積分し，$z=0$ にて $\zeta=0$ なる境界條件を入れると，

$n=6$;

$$z=\frac{h}{\pi}\left[\log\frac{\left\{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}+1\right\}\left\{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/3}+\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}+1\right\}^{1/2}}{\left\{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}-1\right\}\left\{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/3}-\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}+1\right\}^{1/2}}\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\left\{\tan^{-1}\frac{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\tan^{-1}\frac{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/6}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}\right]\cdots\cdots(18)$$

$$n=4;\ z=\frac{h}{\pi}\log\frac{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/4}+1}{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/4}-1}-2\frac{h}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/4}+h\quad\cdots\cdots(19)$$

$$n=3;\ z=\frac{h}{\pi}\left[\log\frac{\left\{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{2/3}+\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/3}+1\right\}^{1/2}}{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/3}-1}-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^{1/3}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}h\cdots(20)$$

これらの寫像關係によつて ζ―平面上の實軸に沿う各點に對應して z―平面上の壁面 A B O C に沿う各點の座標を求め，之等各點に於ける流速を計算した結果は 圖―5 の通りである。なお $n=4$ の場合に就ては，ζ―平面上の原點よりの放射線を z―平面の境界内の曲線として寫像し，流線圖を畫いた。これらの結果を綜合するに，圖―5 よりわかる如く，兩壁 OC, OBA に沿う各點の速度比が 1 に收斂するのは，隅點 B が吹出點より池の長さの方向にずれた距離だけ遲れることになり，それだけ流れの均一性を得るのに手間どることを意味する。この事は鋭角池の一缺點と考へられる。―完―(昭 22. 12. 6 受付)