外力が短い時間だけ作用する時の梁の振動に就て

正員　田　中　清*

要旨: 梁に短時間だけ急激な外力が作用する場合，作用時間が短い程その衝撃効果が減少し，最大撓みは外力が去つた後に起ることの說明である。

本文: 長さ l なる單純梁に外力 P が梁の $x=\xi$ の點に，時間 $t=0$ から $t=\tau$ までの τ 時間だけ作用するものとする。この時の梁の振動方程式は，

$0<t\leqq\tau$（强制振動）の時

$$EI\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\frac{wA}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=P \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$t\geqq\tau$（自由振動）の時

$$EI\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\frac{wA}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

こゝに η＝梁の撓み（外力作用中の撓みを η_1，外力が去つた後の撓みを η_2 と區別する。）EI＝梁の曲げ剛さ w/g＝梁の單位重量。A＝梁の斷面積。

單純梁の時の境界條件は $x=0$ 及び $x=l$ にて $\eta=0$ 及び $\partial^2\eta/\partial x^2=0$，初期條件は $t=0$ の時 $\eta_1=0$ 及び $\partial\eta_1/\partial t=0$，$t=\tau$ の時 $\eta_1=\eta_2$ 及び $\partial\eta_1/\partial t=\partial\eta_2/\partial t$ である。

境界條件より η は x の奇函數として展開され，

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad (n=1,2,3\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

η に應じて P を展開すれば，P は $x=\xi$ のみに作用する故，

$$P=\frac{2P}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

方程式 (1) 及び (2) の兩邊に $\sin n\pi x/l$ を乘じて $0\sim l$ 間に積分し，部分積分を行つて境界條件を入れると，

$$\left.\begin{aligned}&\text{(1) 式は}\\ &EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\varphi_n+\frac{wA}{g}\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}=\frac{2P}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\\ &\text{(2) 式は}\\ &EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\varphi_n+\frac{wA}{g}\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

（註 $\displaystyle\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0\cdots\cdots(m\neq n)\\ l/2\cdots(m=n)\end{cases}$ を用ひる。）

自由振動の基本週期を T_0 とすれば，

$$T_0=\frac{2\pi}{\dfrac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{gEI}{wA}}}=\frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{wA}{gEI}}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5) の解は

$$\varphi_n=A_1\sin\frac{2\pi n^2}{T_0}t+B_1\cos\frac{2\pi n^2}{T_0}t+\frac{\dfrac{2P}{l}\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}}{EI\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

及び

$$\varphi_n=A_2\sin\frac{2\pi n^2}{T_0}t+B_2\cos\frac{2\pi n^2}{T_0}t\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$t=0$ の初期條件より，

$$A_1=0,\quad B_1=-\frac{\dfrac{2P}{l}\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}}{EI\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4}$$

$t=\tau$ の時 (7)，(8) の φ_n，$\partial\varphi_n/\partial t$ が連續となる條件より

$$A_2=\frac{\dfrac{2P}{l}\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}}{EI\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4}\sin\frac{2\pi n^2}{T_0}\tau$$

$$B_2=\frac{\dfrac{2P}{l}\sin\dfrac{n\pi\zeta}{l}}{EI\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4}\left(\cos\frac{2\pi n^2}{T_0}\tau-1\right)$$

故に所要の解は

$0<t\leqq\tau$ の時

$$\eta_1=\frac{4Pl^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\sin\frac{\pi n^2t}{T_0}\right)^2\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$t\geqq\tau$ の時

$$\eta_2=\frac{4Pl^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{\pi n^2\tau}{T_0}\sin\frac{\pi n^2(2t-\tau)}{T_0}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots(10)$$

* 東京大學第一工學部土木工學教室

P が靜止荷重の時の靜的撓みを η_0 とすれば，(9) 式中の時間に無關係な項のみを取り，

$$\eta_0=\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots\cdots(11)$$

外力 P が梁の中央 $\xi=l/2$ に作用する時，$n=1$ の第 1 項のみを取れば誤差は約 2.5% である。この場合には，$0<t\leqq\tau$ の時，

$$\eta_1\doteqdot 2\left(\sin\frac{\pi t}{T_0}\right)^2\cdot\eta_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$t\geqq\tau$ の時，

$$\eta_2\doteqdot 2\left(\sin\frac{\pi\tau}{T_0}\sin\frac{\pi(2t-\tau)}{T_0}\right)\cdot\eta_0\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

(12)，(13) 式によつて，外力の作用時間 τ と梁の自由振動の週期 T_0 との關係より次の結果を得る。

(I)　$\tau\geqq 1/2\,T_0$ なれば $t=1/2\,T_0$ の時 $\eta_{max.}=2\eta_0$，

急激な外力による撓みが靜止荷重による撓みの 2 倍となるためには外力の作用時間が自由振動週期の 1/2 以上なることを要する。

(II)　$\tau<1/2\,T_0$ なれば，

$0<t\leqq\tau$ では $t=\tau$ の時 $\eta_{1max.}=2\left(\sin\frac{\pi\tau}{T_0}\right)^2\cdot\eta_0$

$t>\tau$ では $t=\frac{\tau}{2}+\frac{T_0}{4}$ の時 $\eta_{2max.}=2\sin\frac{\pi\tau}{T_0}\cdot\eta_0$

$$\eta_{2max.}>\eta_{1max.}$$

即ち外力の作用時間が自由振動週期の 1/2 より短い時には，最大撓みは外力が去つた後 $(T_0/4-\tau/2)$ 時間後に起る。その最大撓みは靜止撓みの 2倍より小である。

(III)　更に $\tau<\frac{1}{4}T_0$ なれば $\left(\sin\frac{\pi\tau}{T_0}\right)^2<\frac{1}{2}$，$\tau<\frac{1}{6}T_0$ なれば $\sin\frac{\pi\tau}{T_0}<\frac{1}{2}$ であるから，τ と T_0 との關係によつて下の如き關係が得られる。

1.　$\tau\geqq 1/2\,T_0$ の時　$\eta_{2max.}=\eta_{1max.}=2\eta_0$
2.　$1/2\,T_0>\tau>1/4\,T_0$ の時 $2\eta_0>\eta_{2max.}>\eta_{1max.}>\eta_0$
3.　$1/4\,T_0>\tau>1/6\,T_0$ の時 $2\eta_0>\eta_{2max.}>\eta_0>\eta_{1max.}$
4.　$\tau<1/6\,T_0$ の時　$\eta_0>\eta_{2max.}>\eta_{1max.}$

外力の作用時間が自由振動週期の 1/6 より短い時にはその最大撓みは靜的撓みより小となる。

(IV)　丁度 $\tau=mT_0$（但し $m=1,2,3,\cdots\cdots$）なれば $\eta_2\doteqdot 0$ となり外力が去つた後に，梁には殆ど振動が殘らない。

(V)　亂暴ではあるが梁の破壞限度が彈性撓みによるものと假定すれば，靜止荷重 P に於て丁度破壞限度にある梁に μP（但し $\mu>1$）なる外力の作用し得る時間の限度は，

外力の作用中に破壞せぬための限度

$$\tau_1<\frac{T_0}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\mu}}$$

外力の去つた後にも破壞せぬための限度

$$\tau_2<\frac{T_0}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{2\mu}$$

μ	τ_1	τ_2
1	0.250 T_0	0.167 T_0
1.5	0.196 T_0	0.108 T_0
2	0.166 T_0	0.081 T_0
5	0.102 T_0	0.032 T_0
10	0.072 T_0	0.016 T_0
100	0.022 T_0	0.0016 T_0

附記：(1) P を外力の代りに荷重とすれば，$P/g\ \partial^2\eta/\partial t^2$ の項を附加する必要があり，P/g が wA/g に比して餘り大でない場合には振幅には影響が無いが，强制振動の週期が變化する。P/g が wA/g に比して著しく大なる場合には全く異る現象が現れる。

(2)　外力の作用時間が 1/100～1/1000 sec 程度以下となれば，上の議論は適用出來ない。この場合にはより根本的な彈性波動の傳播を考慮する必要がある。

以上　(昭 22. 8. 21 受付)