

討 議

軌 條 の 挫 屈 の 計 算

(第 29 卷 第 7 號 所 載)

著 者 正 員 小 野 一 良*

表記の論文に對して第 29 卷第 11 號で安宅博士から討議を提出せられ、種々不備の點及び説明不十分であつた點を指摘されましたがこゝに御答へ致します。

著者としてもこの論文は數學的極力に於て多少不備の點があることを認めるが大なる矛盾は含まぬ積りである。然してその結論は實用的に使用し得られ、討議者の云ふように $P_k = 2\sqrt{CEI}$ なる式に依つて實用見地的な見當が付け得るとは考へられない。以下順を追ふて討議者の御質問に答へることとする。

1. 安定の條件と當初のふれとの關係

次の 3 箇條に於て著者の方と討議者との間に大きな差がある。

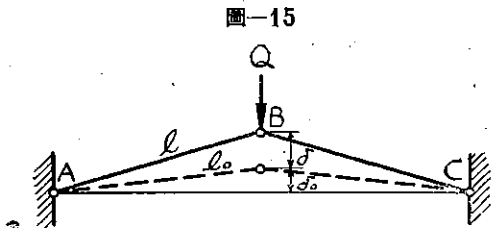
(イ) 討議者は 829 頁に「挫屈を論ずるに際しては柱の微小なる撓みに關して議論するのであつて、(中略)挫屈後に生ずる大きな撓みを論ずる場合は別として(後略)」との前提を設けて論じて居るが、著者は列車運轉に危険を及ぼす撓れのある大きな撓み (10 cm 程度) の生じ得る場合を吟味する目的であるから軌條の長さの方向に於ける移動に依つて軌條内の壓力が低下する (30% 程度) ことを無視することは出来ない。但し挫屈部分の延長 (10 m 程度) に對しては撓みは充分小さいので曲率半徑を計算する場合に 1 に對して $(dy/dx)^2$ を無視しても差支へなからう。

(ロ) 外力を加へて柱を挫屈させる場合と温度を上昇させて挫屈を起させる場合とは次の點で差があることを忘れてはならない。即ち外力に依り挫屈を生ずる場合は挫屈を生じた前後に於て柱の受けて居る壓力に變化のない場合を取扱ふのが通例であるが、温度の上昇に依つて軌條に挫屈を生ずる場合には挫屈に依つて軌條が伸びるだけ挫屈後の軌條内の壓力が減少する。

(ハ) 著者の取扱つた挫屈壓力とは論文の 547 頁に「軌條内の壓力が挫屈壓力に適したから直ちに挫屈を生ずるとは限らず、挫屈する可能性が生じたと云ふに過ぎない。」とあるように長柱の挫屈壓力とは多少考へ方を異にする。

次に以上の事項に關し討議者の使用した例を用ひて更に詳細に説明することとする。

圖—15 に示したように中央に鉸を有し、この位置で横抵抗 Q を受けて居る棒の温度を上昇させた時にこの棒の挫屈する過程を吟味することとする。 Q の大きさは枕木を引抜く時の道床の抵抗力に等しく移動量 δ の増加に伴ひ増加するものとす。棒の全長を $2l_0$ とし、兩端は鉸を以て固定されて居るとする。當初に於て棒の壓力を 0 とし、且棒の中央は δ_0 なるふれを有するとする。但し δ_0 は l_0 に較べて非常に小さいものとする。



棒の斷面積 A (は棒の全長に互り一定とし、線膨脹係數を β とし、彈性係數を E とする。この棒が θ なる温度の上昇を受けた結果棒の長さが $2l$ となり、棒の中央點は當初の位置より δ だけ移動し、且棒は P なる壓力を受けるに至つたものとする。然る時は

$$l^2 - (\delta + \delta_0)^2 = l_0^2 - \delta_0^2$$

$$\therefore l - l_0 = \frac{\delta(2\delta_0 + \delta)}{2l_0}$$

棒の長さの變化は温度の上昇に依る伸びと壓力に依

* 運輸省鐵道技術研究所第二部

る縮みとの差であるから

$$\beta l_0 \theta - \frac{Pl_0}{EA} = \frac{\delta(2\delta_0 + \delta)}{2l_0}$$

$$\therefore EA\beta\theta = P + \frac{EA\delta(2\delta_0 + \delta)}{2l_0^2}$$

然るに力の平衡の條件に依つて

$$P = \frac{l_0}{2(\delta + \delta_0)} Q$$

又 Q の大きさは δ に依つて定まるのであるから

$$Q = f(\delta)$$

と置く。これ等の値を上式に入れれば

$$EA\beta\theta = \frac{l_0 f(\delta)}{2(\delta + \delta_0)} + \frac{EA\delta(2\delta_0 + \delta)}{2l_0^2}$$

.....(53)

次に温度の上昇に伴ふ棒の中央點の移動狀態を下記の數字を用ひた實例に依つて調べることにする。

$$l_0 = 200 \text{ cm}$$

$$E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$A = 64.33 \text{ cm}^2$$

Q の最大値を 400 kg とし、 Q が 0 より 400 kg に達するまでの Q と δ (cm 單位) との關係を次の 2 通りの場合 ([5], [4] なる記號で示す)。に付き計算することとす。

[5]: $f(\delta) = 500\delta^{1/3}$ 但し $0 \leq \delta \leq 0.512$
 $= 400$ 但し $0.512 \leq \delta$

[4]: $f(\delta) = 400\delta^{1/3}$ 但し $0 \leq \delta \leq 1.000$
 $= 400$ 但し $1.000 \leq \delta$

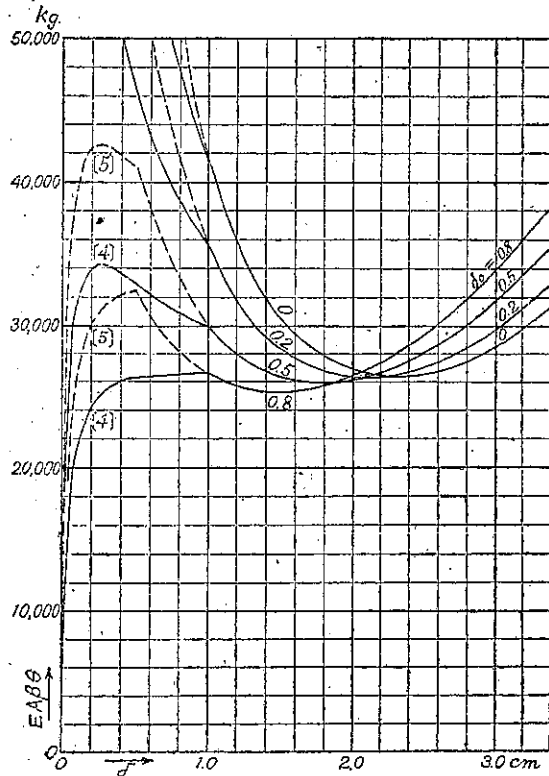
又 δ_0 は次の 3 通りの場合を考へることとす。

$$\delta_0 = 0.2 \text{ cm}, 0.5 \text{ cm}, 0.8 \text{ cm}$$

これ等の組合せの各種の場合に於ける δ と θ との關係を計算した結果を圖-16 に示す。但し圖-16 には θ の代りに $EA\beta\theta$ を用ひてある。

(53)式及び圖-16 に示すように $\theta = 0$ なる時は $\delta = 0$ であつて、 θ の値の小さい時は θ の増加に伴ふ δ の増加は極めて僅かであるが、 θ の値が大きくなると δ の増す割合は次第に大きくなり、遂に θ が或値に達すると δ の値は飛躍して増加する。即ち [4], $\delta = 0.5$ の場合に $EA\beta\theta = 34,200 \text{ kg}$ となれば δ の値は 0.3 cm より 3.3 cm に飛躍する。その後の δ の値は θ の増加に伴ひ單調に増加する。斯くの如く δ の値が飛躍的に増加する現象を長柱に壓力を加へた場合の挫屈現象に類似するを以て挫屈と呼ぶこととし、この時の θ の値を $\theta(max)$ と呼ぶこととする。表-6 示すように $\theta(max)$ の値は當初のふれ δ_0 及び $f(\delta)$

圖-16



の形に依つて非常に異なる。

表-6

δ_0	$f(\delta)$	$EA\beta\theta(max)$
0.2 cm	[5]	77,400 kg
	[4]	61,900 kg
0.5 cm	[5]	42,500 kg
	[4]	34,200 kg
0.8 cm	[5]	32,400 kg
	[4]	26,600 kg

以上は Q と δ との關係を [5], [4] の 2 種の場合に限つて計算したのであるが、 Q は枕木の引抜きに對する抵抗力であるから道床の種々の條件に支配されて δ の増加に伴ふ Q の増加の状態には更に多數の場合があり、従つて $\theta(max)$ の値も更に廣範圍に變化するであらうことが想像に難くない。

以上に説明した挫屈の過程が長柱の壓力に依る挫屈と異なる點として更に次の性質を擧げる要がある。例へば [4], $\delta_0 = 0.5 \text{ cm}$ の場合に温度の上昇が $EA\beta\theta = 30,000 \text{ kg}$ に達した時に中央の鉸に上方に向ふ外力を

加へて一旦 $\delta > 1.0\text{cm}$ に持ち來たしてその後すぐに外力を去つた時はこの棒は元の位置に復歸せず飛躍的に $\delta = 2.8\text{cm}$ の位置に移動して安定を保つ。従つて温度の上昇が表-6 に挙げた $\theta(\text{max})$ に達しなくても一時的に外力を加へることに依り挫屈を生ずることがあるのを豫期せねばならない。

上述の如く $\theta(\text{max})$ の値は諸種の條件に依り大なる影響を受けるので一般的にこの値を定めることは不可能である。然し圖-16 を見て判斷し得ることは、 $f(\delta)$ が最大値に達するまでの過程が多少變つても温度の上昇が θ の極小値に達するまでは挫屈を生じないと云ふことである。又この温度以下に於ては例へ一時的に外力を加へてもこれに起因して挫屈を生ずることはあり得ない。 θ の極小値即ち $\theta(\text{min})$ を圖-16 より求めれば表-7 の如くなる。従つてこの値を以て挫屈に對する θ の安全値と做し得る。

表-7

δ_0	$EA\beta\theta(\text{min})$
0.2 cm	26,300 kg
0.5 cm	25,900 kg
0.8 cm	25,300 kg

表-7 に示す如く $\theta(\text{min})$ の値は [4], [5] の場合に對して共通であり、又 δ_0 の値に依つて殆ど變化を受けない。 $\delta_0 = 0$ とすれば $\theta(\text{min})$ は

$$EA\beta\theta(\text{min}) = 26,400\text{ kg}$$

となり、これも表-7 の値に略一致する。故に最も簡單なる場合即ち $\delta_0 = 0$ 對する $\theta(\text{min})$ の値を以て δ_0 が 0.8 cm 以下の總ての場合を包括して挫屈に對する θ の安全値と稱することが出来る。今茲で棒の伸びが全然許されないとして棒の温度が $\theta(\text{min})$ に上昇した時棒の中に生ずべき壓力は $EA\beta\theta(\text{min})$ となる。故にこれを以て挫屈壓力と稱することとして、このようにする時は壓力を加へて生ずる挫屈と對照して考へる場合に便利である。以上の説明に依り前記の「挫屈壓力に達したから直ちに挫屈を生ずるとは限らず、挫屈を生ずる可能性が生じたと云ふに過ぎない」と云ふ意味を了解されたと思ふ。

以上は棒の中央點 B が飛躍的に移動して挫屈を生ずる場合のみを取扱つたのであるが、棒の AB の部分又は、BC の部分が長柱として挫屈を生ずる場合もあり、勿論これに對する吟味を忘れてはならないが此處には省略することとする。

著者は上述の如き挫屈壓力の考へ方を軌條の挫屈の

計算に適用したのであるが、これが妥當なりや否やに關してはまだ疑問が残る所である。適用なし得ることを積極的に證明することは甚だ困難である。堀越博士の發表せられた實驗結果と上記の意義に依る挫屈壓力の計算値とは「一應の一致を見て居る。」のであるが著者はこれを以て満足するものではない。くせの極めて少い軌條で實驗を行へば計算値より遙かに大きな壓力に達しなければ挫屈を生じないであらうことを豫期して居る。然して「非常に多數の實驗を繰返した」あづく實驗に依り得た挫屈壓力の中で最小値に近いものの平均値が計算値と一致して居ることが確められた後この計算式の價値が定まるであらう。甚だ禮をかけた想像であるが計算値との比較に引用した堀越博士の實驗は比較的挫屈し易い條件が揃つて居たのではなからうか。

2. 挫屈形を附圖の如き形に分類することの意義

討議者は 832 頁は「理論上の多波形の挫屈に對する根據……」と云つて居るが多波形とは如何なる形を云ふのであらうか。若し等しい大きさの波が多數連續する形を指すのであれば軌條の挫屈に對して「理論上の多波形の挫屈に對する根據」を如何にして證明するのであらうか。 $g = Cy$ とするならば證明出来るであらうが g を一定 (但し g は y と同符號) とし、又は g を $y^{1/3}$ に比例するとした場合には多波形に限ると云ふことは證明出来ない筈である。後者の場合に於て挫屈形を正確に計算する時は論文 536 頁圖-6 に示す如く、必ず 1 個又は 2 個の最大の波の前後に順次に小さな波が多數連續する形が導かれ、唯特殊の場合としてのみ等しい大きさの波が無數に連續する場合があらはれる筈である。然しこの計算はすべての挫屈の波に於ける軌條内の壓力が等しいとしてさへ困難であるが、その上軌條の長さ方向の移動に際して生ずる抵抗力も無視することは出来ない。即ち最大の波に向つて前後の軌條は伸びて來るのであるから軌條内の壓力は最大の波から遠ざかるに従つて次第に大きくなる筈である。

圖-6



この解決策として著者は次の方法を採用したのである。即ち一般に構造物の剛性(まこれに制限條件を附加

することに依り増加する。従つて與へられた構造物の
 挫屈に對する強度又は變形量を求めることが困難なる
 時はこれに種々の制限條件を附加した場合を計算し、
 その中の最小の強度及び最大の變形量を以て原構造物
 の強度又は變形量と做し得る。勿論附加すべき制限條
 件はこれを附加しない時に略近い變形を許すものであ
 ることを要する。

この方法を軌條の挫屈に適用するに當り次の3種の
 制限條件を軌條に附加した場合に就いて計算を行つ
 た。

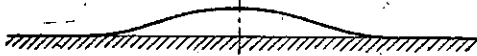
(イ) 全長に互り軌條の片側への移動を禁止した場
 合 (圖一17 参照)

この時は挫屈形 [I] が導かれる。

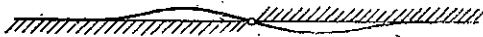
(ロ) 軌條の一點を鉸で固定し、その前後に於て反
 對方向の移動のみを許し、同方向への移動を禁止した
 場合 (圖一18 参照)

この時は挫屈形 [II] が導かれる。

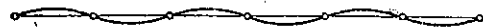
圖一17



圖一18



圖一19



(ハ) 軌條の全長に互り等間隔に鉸で固定した場合
 (圖一19 参照)

この時は挫屈形 [III] が導かれる。

以上の各種の 경우는「實驗に依る挫屈の形に拘泥」
 しては居るが挫屈形の計算が簡單に行ひ得ることも考
 慮に入れて選定したのである。「實驗に依る挫屈の形
 に拘泥」しない積りでも簡單に計算を行ひ得る挫屈の
 形は上記の場合に限られるであらう。

論文に示したようにこれ等3種の挫屈形に於ける挫
 屈壓力は略一致し、且實驗に類似した挫屈形を與へる。
 従つて制限條件を附加しない場合の挫屈壓力も略之に
 近い値であらうことが想像せられる。

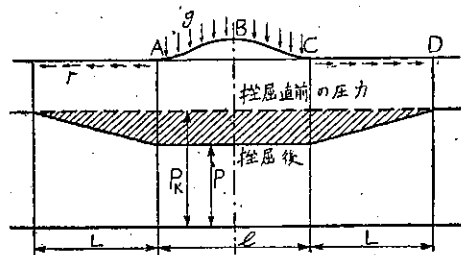
討議者は $g=Cy$ とした時の軌條の理論的挫屈形及
 びピン結合の骨組抗壓材の挫屈形を論じて居るが、こ

れを以て横抵抗の性質がこれ等と全然異なる軌條の挫屈
 形を推論することは非常な誤りを生ずる怖れがある。

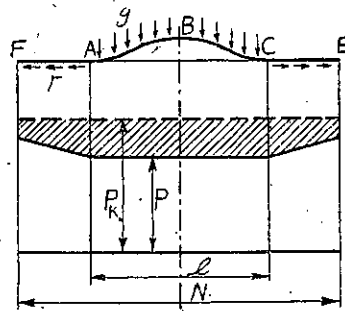
3. 長さ有限の軌條について行つた挫屈試験と計算 値との比較

著者の扱つた挫屈壓力の計算式は長さ無限の軌條に
 適用すべきものであり、これを長さ有限の軌條に就て
 行つた挫屈試験と比較するには何等かの説明を要する
 所であつたがこれを略したのは著者の過失であつた。
 次にこの點に關する説明を追加する。長さ無限の軌條
 の挫屈形 [I] に於ては挫屈後の壓力の分布は 圖一20
 に示す如くなり、挫屈箇所前後各 L の區間に於て
 は中央に向つて軌條が伸びて来る。然るに長さが N
 (但し $l < N < l + 2L$) なる軌條の挫屈後に於ける壓力
 分布は 圖一21 のようになる。但し挫屈直前の軌條内
 の壓力は軌條の全長に互り一定であると假定する。

圖一20



圖一21



討議者がなした計算では長さ N の軌條の両端に於
 て挫屈前の壓力と挫屈後の壓力が一致するとしてある
 が、これは誤りである。これ等の圖に於て斜線を引い
 た部分の面積が壓力の減少に伴ふ軌條の伸びを示すこ
 ととなる。

以上は長さ N の軌條の両端が挫屈直前と挫屈後に
 於て移動しないと假定したのであるが、挫屈試験に於
 ては挫屈に依り壓力が減少すると同時に軌條両端の固

定箇所が中央に向つて多少移動し、又軌條を押して居るジョッキも幾分伸びる筈である。従つて長さ無限の軌條と長さ有限の軌條との差は更に少くなる。

以上の考察に依つて N が $l+2L$ に近い長さを持つ時は長さ無限の軌條と做して計算を行つても大差が無いことが想像される。然し $N=48m$ なる時これを長さ無限と做したのは無理があつたようである。

有限の長さ N を持つ軌條の両端を長さ方向に移動をしないように固定した場合の挫屈壓力は次のような方法に依つて計算爲し得る、

$l < N < l+2L$ とし、この中央位置で挫屈を生じたものとする、圖-21 に依り挫屈直前の壓力 P_k より挫屈後の壓力 P に至る間の軌條の伸びは

$$ABC \text{ 間に於て } \frac{(P_k - P)l}{EI}$$

FA 及び CE 間に於て

$$\frac{\{P_k - P - 0.25r(N-l)\}(N-l)}{EI}$$

故に軌條の全長では

$$\frac{4(P_k - P)N - r(N-l)^2}{4EI}$$

これが ABC 間の變形に依る伸びと一致するわけである。故に論文 540 頁の(27)式を用ひて

$$\frac{4(P_k - P)N - r(N-l)^2}{4EI} = 2 \times 37.80 q^2 (f/f)^2 P^{-7.2} N^{-1}$$

上式の l を(28)式に依り P を以てあらはせば

$$P_k = P + 75.60 EI q^2 (f/f)^2 P^{-7.2} N^{-1}$$

$$1 - 0.25rN^{-1} \left(N - 8.987 \sqrt{\frac{EI}{P}} \right)^2 \dots (54)$$

上式に於て P を種々に變化して P_k の最小値を求めれば、これが挫屈壓力となる、

軌條の長さを 48m とし、(54)式を用ひて計算すれば表-8 の如くなる。

表-8 長さ 48m の軌條に於ける挫屈壓力

軌條重量 (kg/m)	q (kg/cm)	r (kg/cm)	計算値	實驗値
			(1)	(1)
50	1.73	3.71	33.5	33.5
50	2.04	4.14	37.7	39.1
50	1.50	3.42	34.9	34.7

上表に示すように計算値は實驗値の平均に更に近くなつた、討議者の指摘したように論文 548 頁表-5 第 3 段の軌條重量の欄に 37 とあるのは 50 の誤りである。

4. $P_k = 2\sqrt{CEJ}$ なる式に就て

討議文 834 頁に「衝抵抗 q の値は (中略) 大體變位 40 mm 位にて一定値に達する故 (中略) $C = \frac{Jmax}{2cm}$ の如く取ることほさして不當とも云へないであらう」とあるがこの中には次に示す如き矛盾が含まれて居る。

(イ) $P_k = 2\sqrt{CEJ}$ なる式は $q = Cy$ なる時に限り適用すべき算式であつて、著者のなした測定に依れば $y < 0.001cm$ に於て q は y の $1/2 \sim 1/3$ 乘に比例するから上のような關係は存在しない。従つてこの算式を軌條の挫屈に適用することは意味のないことである。

(ロ) 假にこの式を採用するとしても討議者は C の値を求めんに當り 40mm を 2 で割つた 20mm なる數字を用ひて「平均的變化」を求めて居るが「平均的變化」とは何を意味するか、又 2 で割ること、「平均的變化」との間に如何なる關係があるか不明である。

(ハ) 又討議者の計算方法に依り、枕木の抵抗力の増加が變位 10mm にとまつた時の挫屈壓力と、變位が 10mm~40mm の間で抵抗力が更に僅かに増加した場合の挫屈壓力とを比較すれば前者は後者の 2 倍近くの値となる。然るに枕木の抵抗力の最大値は殆ど變りはない。これは常識的な結果とは考へられない。

著者のなした實驗に依れば枕木の抵抗力が最大値に達するのは變位が 4~10mm に達した時である。この値を用ひて計算した挫屈壓力は 40mm とした場合の 2~3 倍に達する。

(ニ) 討議者は 855 頁に「係數 q の判斷さへ誤らなければ」と云つて居るが枕木の抵抗力が最大値に達する位置の判定は甚だ困難であつて、その上個々の枕木に於ける差が甚しい爲「誤りなき判斷」とは何を云ふか、又如何にして判斷し得るや不明である。

要するに以上の如き種々の矛盾が生ずるのは $P_k = 2\sqrt{CEJ}$ なる算式を軌條の挫屈の計算に使用することの不可なることを示して居る。

5. 骨組抗壓材の壓縮試験について

これについては本論を外れるので簡単に意見を述べることとする。斯くの如き構造物に於て斜材の強度が充分である時「挫屈荷重は格間長と挫屈長とせる挫屈値となること」は討議者と共に小生も認める所である。然しこの構造物が「理論上の多波形」に挫屈するのは構造物の總ての部材の變形が彈性限界の範圍内にある事に限られて居る、討議者が圖-10, 12, 14に

示した骨組抗壓材の挫屈形は挫屈が進んで柱材又は斜材の一部に生ずる應力が弾性限界を越して部材に永久變形を生じた場合であり、總ての部材の應力が弾性限界内にあると假定して設けた挫屈形の理論が適用されないのは當然である。

逆に云へば柱材又は斜材の變形が塑性範圍に入ることと考慮して挫屈形を計算すれば実験にあらはれた挫屈形に近い形が得られるであらう。前に述べたように

枕木を引き抜いた時の抵抗力には移動量と比例する部分、即ち塑性範圍なるものがない。故に最初から塑性範圍にあるものと做すことが出来、従つて「理論上の多波形の挫屈に對する根據」なるものは有り得ない。

(昭 22. 6. 23 受付)

附記 圖及び表の番號は第 20 卷 第 7 號所載の本論に續けました。(編輯部)

既往の刊行物に就て

當會に於ける既往の刊行物が未だ若干在庫してをります。入用の方は代金を添え學會宛申込まれれば早速郵送致します。誌名及び頒布價格(送料を含む)は次の通りです。

- ◎土木學會誌(缺號が有るので一應在否を確めて下さい) 1部 22圓
- ◎土木工學論文抄録(第1及び第2輯)各1部 60圓
- ◎調査報告(第1~第5卷)合計 210圓
- ◎土木學會誌索引(第1~20卷のもの)1部 4圓
- ◎工事請負規定 1部 4圓
- 昭和 21 年度土木學會誌論文集(第 1, 2 合併號) 1部 53圓
- ◎昭和 22 年度會員名簿 1部 35圓

頒布價格は昭和 23 年 1 月現在のものです。

22 年度論文集豫約申込募集

前年度に引續き 22 年度論文集は間もなく印刷を開始します。内容、完成期日等近く發表致します。

つては出版數量の見込を得る必要がありますので、頒布希望者は御申込金を添え學會宛申込み下さい。

1. 御申込金 30圓
2. 論文集代價 後日決定の上申込金と共に精算
3. 申込先 東京都中央區新川 2 丁目 12 番地 土木學會内 22 年度論文集豫約係宛

論文第 1, 2 合併號正誤表

頁	行	誤	正
67	下から 11 行目	深さ $h_2=32.5\text{cm}$	深さ 40cm であつて $h_2=32.5\text{cm}$
	脚註	九州帝國大學助教授	九州大學教授
69	上から 3 行目	About the...	On the...
74	下から 4 行目	低くなる場所に...	低くなる場處は...
歐文目次	上から 12 行目	About the...	On the...

おととわり

前號掲載の准員 高橋芳夫氏の論文『氣象とコンクリート強度 その 1』に續く『その 2』は都合に依り本號には掲載せず次號に廻すことになりました。悪しからず御諒承下さい。(編輯部)