論 說 報 告

第 29 卷第 12 號　昭和 18 年 12 月

相對二邊に於て支承せられる矩形版が彈性基礎上に在る場合の彎曲，並に其他の彈性諸問題の研究 (其の二)

正會員　工學博士　原 口 忠 次 郎*

第 10 章　彈性基礎上の平版の彎曲と固有振動との關聯性に就て

彈性基礎上の平版の彎曲に關する基本方程式は第 2 章 (1) 式に示せる如く

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w=\frac{p_0}{N}f(x,y)\cdots\cdots(1)$$

であるが，普通平版の固有振動に關する基本公式は

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+\frac{\gamma h}{gN}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0\cdots\cdots(2)$$

にて示される。玆に $\gamma h/g$ は $h\times1\times1$ なる容積の質量，$\partial^2 W/\partial t^2$ は版の撓度 W が時間的に變化するときの加速度であるから (但し h は版の厚さ) $-\dfrac{\gamma h}{g}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ は $h\times1\times1$ に關する慣性力 (inertia force) である。

即ち (2) 式は $-\dfrac{\gamma h}{g}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ なる荷重〔(1) 式の右邊に相當す〕を受ける普通の版の彎曲に關する公式と考へることが出來る。

外力の作用を受けないで單に慣性力のみによる版の振動，即ち所謂固有振動 (又は自由振動) に於ては版のすべての點は全く同じ週期で振動する筈であるから (2) 式の W は

$$W=w\cos\omega t\cdots\cdots(3)$$

で表はすことが出來る。(3) 式の w は x,y のみの函數で，これを固有函數 (Eigenfunktion) と呼ぶのであるが，この函數及び ω (Kreisfrequenz) の値が分れば，W，從つて版の振動現象は完全に決定せられるのである。

(3) を (2) に代入すると各項に $\cos\omega t$ が掛つて居るから，之れを取去ると固有函數 w に關する次の如き方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\gamma h}{gN}\omega^2 w=0\cdots\cdots(4)$$

が得られる。これは (1) 式の右邊の荷重の項を 0 と置くと

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w=0\cdots\cdots(5)$$

となるから (4) の $-\dfrac{\gamma h}{gN}\omega^2$ を λ^4 と見做せば (4) 式，(5) 式を解くことは數學的に全く同じである。彈性基礎上の版の彎曲問題と，振動問題との關聯性は，即ち玆に存するのである。$\dfrac{\gamma h}{gN}\omega^2$ は普通固有値と呼ばれるもので與へられたる $\gamma h/gN$ に對しては版の境界條件に依つて決定せられるものである。但し與へられたる $\gamma h/gN$ 及び境界條件を有する版の振動は，全くそれ獨特の性質に從ふもので，Eigenwert, Eigenschwingung, Eigenfunktion 等の如き名稱の因て來る所以も玆に存するものと思はれる。

* 内務省中國西國土木出張所長

境界條件 $\left|\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right|_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}}=0$ を除く凡ての條件を滿足する (5) 式の解は (33) 式から

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$

$$\left.+F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right]\sin n\pi\eta \quad \cdots(6)$$

但し $\qquad K_n=\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}n^2+i\dfrac{a^2\lambda^2}{\pi^2}} \qquad K_n'=\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}n^2-i\dfrac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}$

である。從つて (4) の解は此の λ^2 の代りに $\sqrt{-\dfrac{\gamma h}{gN}\omega^2}=i\sqrt{\dfrac{\gamma h}{gN}}\omega$ を置いたものとなるから

$$K_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu} \qquad K_n'=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu} \quad \cdots\cdots(7)$$

但し $\qquad \mu=\dfrac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{\gamma h}{gN}}$

とすると (6) 式はそのまゝ (4) 式の解として用ふることが出來る。

彈性基礎上の版の問題に於て荷重の項を 0 と置けば，境界條件

$$\left|\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right|_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}}=0$$

より第 3 章記載の (f) 及び (g) 式の如く

$$E_n'\left\{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'\right\}$$

$$\pm F_n'\left\{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n'\right\}=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

を得る。これより

(1) 振動面が版の中心線 $\xi=1/2$ に關し對稱なる場合は（第 1 振動）

$$E_n'\left\{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'\right\}=0 \quad \cdots\cdots(9)$$

(2) 振動面が版の中心線 $\xi=1/2$ に對して斜對稱なる場合には（第 2 振動）

$$F_n'\left\{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n'\right\}=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

の兩式を得る。よつて (9) 式及び (10) 式に對應する固有函數 w は (6) 式より夫々

$$w=\sum_n E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\sin n\pi\eta \quad \cdots(11)$$

及び

$$w=\sum_n E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh \frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh \frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\sin n\pi\eta \cdots\cdots(12)$$

で表はすものである。但し (9) 式乃至 (12) 式に於て n が奇數 ($n=1,3,5,\cdots\cdots$) なるか又は偶數 ($n=2,4,6,\cdots\cdots$) なるかに從つて振動面は中心線 $\eta=1/2$ に關して對稱若くは斜對稱となるのである。

(9) 式乃至 (12) 式の中にはまだ未知數 μ が含まれてゐる。若し μ が知られると

角振動數 (Kreis frequeuz) $\qquad \omega=\mu\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}}$

振動數 (Schwingungs frequenz) $\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}$

振動週期 (Schwingungs dauer) $\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$

が求められるから版の振動現象は完全に決定せられる。故に固有値 μ (廣い意味に於て此の μ も固有値と呼んで差支へない) を求める事が必要であつて，固有振動問題の解決上最も重要な事は，この μ を求める事である。これが爲に先づ第一振動に就て考ふるに (9) 式が滿足されるためには，

$E_n'=0$ 　となるか若くは

$$K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

でなくてはならない。$E_n'=0$ とすれば (11) 式より w も 0 となるからこれを除外し，第一振動に關する固有値 μ は，方程式 (13) を μ を未知數として解くことに依つて求められる。同樣に第二振動に關する μ は (10) 式より得られる

$$K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\frac{\pi}{2}K_n'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

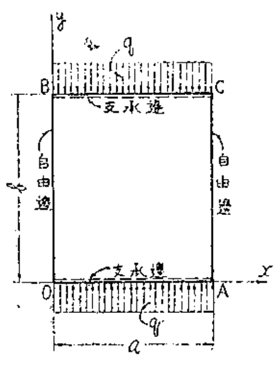
から求められる。かくして任意の n に關する μ が分れば，この μ に對應する固有函數は，(例へば第一振動系)

$$w=\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\sin n\pi\eta \cdots\cdots\cdots(15)$$

で表され，實際の撓度 W は t の如何に關せず常にこの (15) 式の w に比例するものである。

第 11 章　本問題と挫屈問題との相似性に就て

圖-31.



相對二邊が支承せられ他の二邊が自由なる矩形版が圖-31 の如く支承邊 OA, BC の外側から oy 軸に平行に q なる等壓力を受ける場合，q の値が或る限度以上になれば版は挫屈を惹起する。この場合の平衡の方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{q}{N}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

にて示される。これを解くために彈性基礎上の矩形版と同樣に

$$w=a_nX_n(\xi)\sin n\pi\eta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

と置く。(2) 式を (1) 式に入れると

$$\frac{d^4X_n}{d\xi^4}-2\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2\frac{d^2X_n}{d\xi^2}+\left(\pi^4\frac{a^4}{b^4}n^4-\pi^2\frac{a^4}{b^2}n^2\frac{q}{N}\right)X_n=0$$

を得る。今 $D=d/d\xi$ とすれば

$$D^4-2\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2D^2+\pi^4\frac{a^4}{b^4}n^4-\pi^2\frac{a^4}{b^2}n^2\frac{q}{N}=0$$

となり更に

$$\left(D^2-\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2-\left(\pi\frac{a^2}{b}n\sqrt{\frac{q}{N}}\right)^2=0$$

或は

$$\left(D^2-\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2-\pi\frac{a^2}{b}n\sqrt{\frac{q}{N}}\right)\left(D^2-\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2+\pi\frac{a^2}{b}n\sqrt{\frac{q}{N}}\right)=0$$

となるから

$$D=\pm\sqrt{\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2+\pi\frac{a^2}{b}n\sqrt{\frac{q}{N}}}\quad;\quad D=\pm\sqrt{\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2-\pi\frac{a^2}{b}n\sqrt{\frac{q}{N}}}\quad\cdots\cdots(3)$$

となる。今

$$Q=\frac{q}{N}\frac{b^2}{\pi^2}\qquad\text{(無名數)}$$

と置くと (3) 式より

$$D=\pm\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\frac{a^2}{b^2}n\sqrt{Q}}=\pm\pi\frac{a}{b}\sqrt{n^2+n\sqrt{Q}}$$

$$D=\pm\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\frac{a^2}{b^2}n\sqrt{Q}}=\pm\pi\frac{a}{b}\sqrt{n^2-n\sqrt{Q}}$$

又は

$$\left.\begin{aligned}D&=\pm\pi K_n & K_n&=\frac{a}{b}\sqrt{n^2+n\sqrt{Q}}\\ D&=\pm\pi K_n' & K_n'&=\frac{a}{b}\sqrt{n^2-n\sqrt{Q}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

を得る。

彈性基礎上の矩形版に對する公式と，上記各公式とを對比するに前者に於ける λ^4w, $i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$ は夫々後者に於ける $\frac{q}{N}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}$ 及び $\frac{a^2}{b^2}n\sqrt{Q}$ に相當して居る。故に K_n, K_n' が (4) 式を以て表されるものとすれば，この場合に對する撓度 w は，第 3 章に於ける彈性基礎上の矩形版に對する公式 (33), 即ち

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$
$$\left.+F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right]\sin n\pi\eta$$

で表すことが出來る。而して

$$\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)=\cosh\pi K_n\left\{\frac{1}{2}-(1-\xi)\right\}$$

$$\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)=-\sinh \pi K_n\left\{\frac{1}{2}-(1-\xi)\right\}$$

なる關係があるから，版の中心線 $\xi=1/2$ に關して對稱的な挫屈に對しては

$$w=\sum_n E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\sin n\pi\eta \quad \cdots\cdots(5)$$

同じ中心線に關して斜對稱な挫屈に對しては

$$w=\sum_n F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh \frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh \frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\sin n\pi\eta \cdots\cdots(6)$$

を得る。上記 (5) 式は自由邊に對する境界條件

$$\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}}=0$$

を滿足して居る。故に殘りの條件

$$\left|\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right|_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}}=0$$

より

$$\left.\begin{array}{l} K_n\left(K_n'^2-\dfrac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\dfrac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\dfrac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\dfrac{\pi}{2}K_n'=0 \\ \text{従つて} \\ \dfrac{\tanh\frac{\pi}{2}K_n}{\tanh\frac{\pi}{2}K_n'}=\dfrac{K_n'}{K_n}\left(\dfrac{K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}\right)^2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

を得る。同様に (6) 式より

$$\left.\begin{array}{l} K_n\left(K_n'^2-\dfrac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\dfrac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\dfrac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\coth\dfrac{\pi}{2}K_n'=0 \\ \text{従つて} \\ \dfrac{\coth\frac{\pi}{2}K_n}{\coth\frac{\pi}{2}K_n'}=\dfrac{K_n'}{K_n}\left(\dfrac{K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}\right)^2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

を得る。(7) 式又は (8) 式に於て，與へられたる n に對する Q の値を算出すれば求むる挫屈荷重は $q=\frac{N\pi^2}{b^2}Q$ に依つて決定される。一定の n に對する上記方程式の根，即ち Q の値は數限りなくある。故に之を一般に Q_i で表はせば $\nu=0.3$ なる正方形版の中心線 $\eta=1/2$ に關して對稱なる挫屈に對しては公式 (7)より **表-1** の結果を得る。

同様に斜對稱なる挫屈に對しては公式 (8) より **表-2** の結果を得る。

公式 (5), (6) 式中の $\sin n\pi\eta$ に就て検討すると

表-1.

n \ i	$n\sqrt{Q_i}$ 0	1	2	Q_i 0	1	2
1	0.9759	3.7212	13.5472	0.9524	13.8473	183.5266
2	3.9459	7.1673	17.1776	3.8925	12.8425	73.7675
3	8.9149	12.3654	22.7730	8.8306	16.9892	57.6233

表-2.

n \ i	$n\sqrt{Q_i}$ 0	1	2	Q_i 0	1	2
1	1.6347	7.6281	21.4901	2.6722	58.1879	461.8244
2	4.7355	11.2490	25.0709	5.6062	31.6350	157.1375
3	9.7310	16.6868	30.7287	10.5214	30.9388	104.9170

$$\sin n\pi(1-\eta)=\sin n\pi\cos n\pi\eta-\cos n\pi\sin n\pi\eta$$

$$=-(-1)^n\sin n\pi\eta$$

$$=+\sin n\pi\eta \qquad n=1,3,5,\cdots\infty \quad \text{のとき}$$

$$=-\sin n\pi\eta \qquad n=2,4,6,\cdots\infty \quad \text{のとき}$$

故に上表中の $n=1,3$ 及 $n=2$ は夫々中心線 $\eta=1/2$ に關して對稱，若しくは斜對稱なる挫屈面に對應するものなる事が分る。又 $n=1$ 從つて $\sin\pi\eta$ は $0<\eta<1$ なる範圍に於ては 0 となり得ないから，x 軸に平行なる節線 (nodal line) を持つて居ない。同樣に $n=2$ なるときの挫屈面は $\eta=1/2$ なる只一つの節線を有し，$n=3$ のときは $\eta=1/3$，$\eta=2/3$ なる 2 つの節線を生ずる。實用上重要なる挫屈荷重は其の最小値である。上表より斯くの如き最小挫屈荷重は，對稱なる挫屈に於ける $n=1$, $i=0$ に對應するもの，即ち

$$Q\min=0.9524$$

$$q\min=\frac{N\pi^2}{b^2}Q=\frac{EI\pi^2}{b^2(1-\nu^2)}Q=1.0465\,9\frac{EI\pi^2}{b^2}$$

但し　　$\nu=0.3$　　とする。

であつて，(Euler's formula；$q\min=EI\pi^2/b^2$) 第 1，第 2，$\cdots$ 次等，高次の挫屈荷重も同樣にして求める事が出來る。

第 12 章　彈性基礎上の平版と桁との關係に就て

彈性基礎上の平版に圖-21（省略）の如く其中央に oy 軸に平行に直線荷重が在るときの A_{mn} は (28) 式より

$$A_{mn}=\frac{8P}{N\pi abn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$m,n=1,3,5,\cdots\infty$$

であるから $\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi$ は

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\eta=\sum_m \frac{8P}{N\pi abn\,p_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi$$

を得る。

今 $\cosh\pi K_n(1/2-\xi)$ を「フーリエ」に展開し更に其の結果を ξ に就いて一回積分すると

$$\sum_m \frac{\cos m\pi\xi}{m^2+K_n^2}=\frac{\pi\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{4K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n} \qquad 0<\xi<1 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$m=1,3,5,\cdots\infty$$

を得るから

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi=\frac{-2Pa^3}{N\pi^4 b}\frac{1}{n(K_n^2-K_n'^2)}\left(\frac{\sinh\pi K_n\xi}{K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\frac{\sinh\pi K_n'\xi}{K_n'\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\leqq\xi\leqq\frac{1}{2}$$

を得る。

今原點を $(0, b/2)$ の點即ち oy 軸の b の中央に移すと

$$\sin n\pi\eta=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\pi\eta \qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

となる。よつて w は (33) 式より

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{2Pa^3}{N\pi^4 b}\frac{1}{(K_n^2-K_n'^2)n}\left(\frac{\sinh\pi K_n\xi}{K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\frac{\sinh\pi K_n'\xi}{K_n'\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right)\right](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\pi\eta\cdots\cdots(2)$$

$$0\leqq\xi\leqq1/2 \qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

となる。上式の E_n' は (34) 式から

$$E_n'=\frac{\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'}$$

$$n=1,3,5,\cdots\infty$$

であるから，これに A_{mn} を入れると分子は

$$\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}=\frac{8Pa^3}{N\pi^6 bn}\left[\sum_m\frac{m^3(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)}+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\sum_m\frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)}\right]$$

となる。

又 (36) 式より

$$\sum_m\frac{m}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)}\sin m\pi\xi=-\frac{\pi}{4(K_n^2-K_n'^2)}\left\{\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}$$

$$\sum_m \frac{m^3}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)}\sin m\pi\xi = \frac{\pi}{4(K_n^2-K_n'^2)}\left\{\frac{K_n^2\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \frac{K_n'^2\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\Bigg\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を得るから上式にて $\xi=1/2$ と置くと

$$\sum_m \frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)} = \frac{-\pi}{4(K_n^2-K_n'^2)}\left(\frac{1}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \frac{1}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right)$$

$$\sum_m \frac{m^3(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)} = \frac{\pi}{4(K_n^2-K_n'^2)}\left(\frac{K_n^2}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \frac{K_n'^2}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right)$$

となる。よつて

$$\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\} = -\frac{2Pa^3}{N\pi^4 b}\frac{1}{n(K_n^2-K_n'^2)}\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}K_n - \left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}K_n'\right\}$$

を得る。從つて E_n' は結局

$$E_n' = -\frac{2Pa^3}{N\pi^4 b}\frac{\bar{a}_n}{n(K_n^2-K_n'^2)}$$

但し，

$$\bar{a}_n = \frac{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}K_n - \left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}K_n'}{K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n - K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'}$$

となる。從つて w は

$$w = -\frac{2Pa^3}{N\pi^4 b}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(K_n^2-K_n'^2)}\left[\bar{a}_n\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin\pi K_n\xi}{K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \frac{\sinh\pi K_n'\xi}{K_n'\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right]\cos n\pi\eta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$n=1,3,5,\cdots\infty \qquad\qquad 0\leqq\xi\leqq 1/2$$

を得る。

扨て (4) 式に於て $b=\infty$ のときの極限値は，彈性基礎上の兩端自由なる桁の沈下を表すものである。P/b は $x=a/2$ に沿ふての單位長に對する荷重であるから b が如何に增減するとも常數と見做す可きであるから再びこれを P とす。卽ち

$$\lim_{b\to\infty}\frac{P}{b} = 常數 = P$$

又

$$\lim_{b\to\infty}K_n^2 = i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2} \qquad \lim_{b\to\infty}K_n'^2 = -i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} K_n = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{a\lambda}{\pi} \qquad \lim_{b\to\infty} K_n' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{a\lambda}{\pi}$$

$$\lim_{b\to\infty} K_n^2 - K_n'^2 = 2i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

であるから w は

$$w = -\frac{Pa^3}{N\pi^4 i\dfrac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}\lim_{b\to\infty}\left\{f(\xi)\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos\frac{n\pi}{b}y\right\}$$

となるが

$$\sum_{n}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos n\pi\eta = \sum_{n}\frac{1}{n}\sin n\pi\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$n=1,3,5,\cdots\cdots\infty \qquad n=1,3,5,\cdots\cdots\infty$$

であるから w は

$$w = -\frac{Pa^3}{4N\pi^3 i\dfrac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}\lim_{b\to\infty} f(\xi)$$

を得る。

上式内には i を含むから，これを消去する計算を施すと遂に w は

$$w = \frac{\sqrt{2}P}{4N\lambda^3}\frac{4\cosh\dfrac{a\lambda}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{a\lambda}{2\sqrt{2}}u(\xi) + \left(\sinh\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)v(\xi)}{\left(\cosh\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}} + \cos\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(\sinh\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\dfrac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$u(\xi) = \cosh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)\cos\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\xi + \cosh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cos\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)$$

$$v(\xi) = \cosh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\sin\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \cosh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)$$

$$\times\sin\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) + \sinh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\cos\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \sinh\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cos\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)$$

$$0 \leqq \xi \leqq 1/2$$

を得る。この (5) 式は彈性基礎上に於て a なる桁の中央點に集中荷重 P があるときの沈下の一般式である。又この式は計算を省略するが，桁の一般方程式

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \lambda^4 w = 0$$

を滿足し，その境界條件

1. $M_x = 0$ $x=0,\ x=a$ に對して
2. $Q_x = 0$ $x=0,\ x=a$ に對して

を滿足して居る事を知る。

更に又，林 桂一氏著 "Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage" の 44 頁の (6) 式はこの場合の式を示すものであるが，これと比較するために先づ (5) 式の原點を中央に移し，且つ $+x$ を左の方向に取れば，w の式にて

ξ の代りに $1/2-\xi$

$1/2+\xi$　の代りに　　$1-\xi$

$1/2-\xi$　の代りに　　$+\xi$

と置かねばならぬ。依つて

$$u(\xi)=\cosh\alpha\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\cos\alpha\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\cosh\alpha\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cos\alpha\left(\frac{1}{2}+\xi\right)$$

$$v(\xi)=\cosh\alpha(1-\xi)\sin\alpha\xi-\cosh\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)+\sinh\alpha(1-\xi)\cos\alpha\xi-\sinh\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)$$

$$\text{但し,}\qquad \alpha=\frac{aK}{\sqrt{2}}$$

となる。從つて

$$4\cosh\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}u(\xi)=2\{(1+\cosh\alpha)(1+\cos\alpha)\cosh\alpha\xi\cos\alpha\xi+\sinh\alpha\sin\alpha\sinh\alpha\xi\sin\alpha\xi\}$$

$$\begin{aligned}(\sinh\alpha+\sin\alpha)v(\xi)=(\sinh\alpha+\sin\alpha)\{&(\cosh\alpha+\cos\alpha)(\cosh\alpha\xi\sin\alpha\xi-\sinh\alpha\xi\cos\alpha\xi)\\&-(\sinh\alpha+\sin\alpha)\sinh\alpha\xi\sin\alpha\xi+(\sinh\alpha-\sin\alpha)\cosh\alpha\xi\cos\alpha\xi\}\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}&4\cosh\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}u(\xi)+(\sinh\alpha+\sin\alpha)v(\xi)\\&=(\cosh\alpha+\cos\alpha)\Big[\sinh\alpha(1-\xi)\sin\alpha\xi-\sin\alpha(1-\xi)\sinh\alpha\xi\\&\quad+2\left\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cosh\alpha\xi+\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\alpha\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cos\alpha\xi\right\}\Big]\end{aligned}$$

を得る。

又，林　桂一氏の (6) 式は

$$\begin{aligned}y=\frac{P}{2KL(\sinh\lambda+\sin\lambda)}&\Big[\sin\xi\sinh(\lambda-\xi)-\sinh\xi\sin(\lambda-\xi)\\&+2\left\{\cosh\xi\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}-\xi\right)+\cos\xi\cosh\frac{\lambda}{2}\cosh\left(\frac{\lambda}{2}-\xi\right)\right\}\Big]\end{aligned}$$

であるが，符號を合せるため

$$K_H=N\lambda^4,\qquad L=\frac{\sqrt{2}}{\lambda},\qquad \lambda_H=\frac{l}{L}=\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}=\alpha$$

$$LK_H=\sqrt{2}N\lambda^3,\qquad \xi_H=\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\xi=\alpha\xi$$

と置いて上式を變形すると

$$\begin{aligned}y=\frac{P}{2\sqrt{2}N\lambda^3(\sinh\alpha+\sin\alpha)}&\Big[\sin\alpha\xi\sinh\alpha(1-\xi)-\sinh\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)\\&+2\left\{\cosh\alpha\xi\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\cos\alpha\xi\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\alpha\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right\}\Big]\end{aligned}$$

となる。

よつて (5) 式とこの式は全く同一の式なる事を知る。

以上により彈性基礎上の桁の式は版の式より容易に導き得るものである。即ち桁は版の特例に過ぎぬのであつて，實際の觀念と能く一致せるものなる事が式の上で證明し得られるのである。

第 13 章　數値計算例と之に對する w, M_x, M_y の變化狀況に就ての檢討

註．圖面中一部省略せり。

[I] 彈性基礎上の矩形版に就て

本文の應用問題としては，岸壁築造の場合，函塊を使用するとその上部構造（蓋）は，函塊の壁上にて相對二邊の支承邊となり，その横の兩側の施工目地は自由邊として考へられる。而してその函塊の中埋めに砂若しくは砂利等を使用すると，その上部構造の版は本問題の矩形版となる。

函塊が小さいと或は四邊支承の矩形版となり，或は三邊支承其他の一邊自由なる矩形版になるなど，施工方法の異なるに從つて，種々の境界條件の矩形版となる。

水上飛行機の滑走臺築造に際しては，かゝる構造物として考へられる場合多く，殊にその場合の版は水中に在るために溫度の變化に依る應力を受けること少なく，荷重による應力の變化が第一義的のものである。

相對二邊支承されたる矩形版が，殘りの自由なる二邊の中央線 $(y=b/2)$ 上に荷重を載荷したるとき，その線上の w, M_x, M_y は何れも荷重點附近に於てのみ影響が大きいから，支承邊間の距離を相當大きく取つた場合には，該 w, M_x, M_y をそのまゝ道路の鋪裝版の中央線上のものとして實用上近似的計算に適用し得るものである。

附圖に示す計算表は (35) 式と (46) 式とを使用したもので，w は w_1 と w_2, M は M_1 と M_2 とに分け，値を算出したものである。

$$w_1=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$

$$w_2=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+F_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f_1(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\right\}\right]\sin n\pi\eta$$

$$w=w_1+w_2$$

以上の計算に採用した a, b, h, ν, C 等は，

$C=10\ \mathrm{kg/cm^3}$,　　$\nu=1/6$（コンクリート版），　　$h=15\ \mathrm{cm}$

$E=210\,000\ \mathrm{kg/cm^2}$,　　$N=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu)}=60\,748\,000\ \mathrm{kg\text{-}cm}$

$a=400\ \mathrm{cm}$,　　$b=600\ \mathrm{cm}$

の矩形版である。

(A)　矩形版の計算說明

(1)　荷重が任意の點に在る場合

このときの A_{mn} は

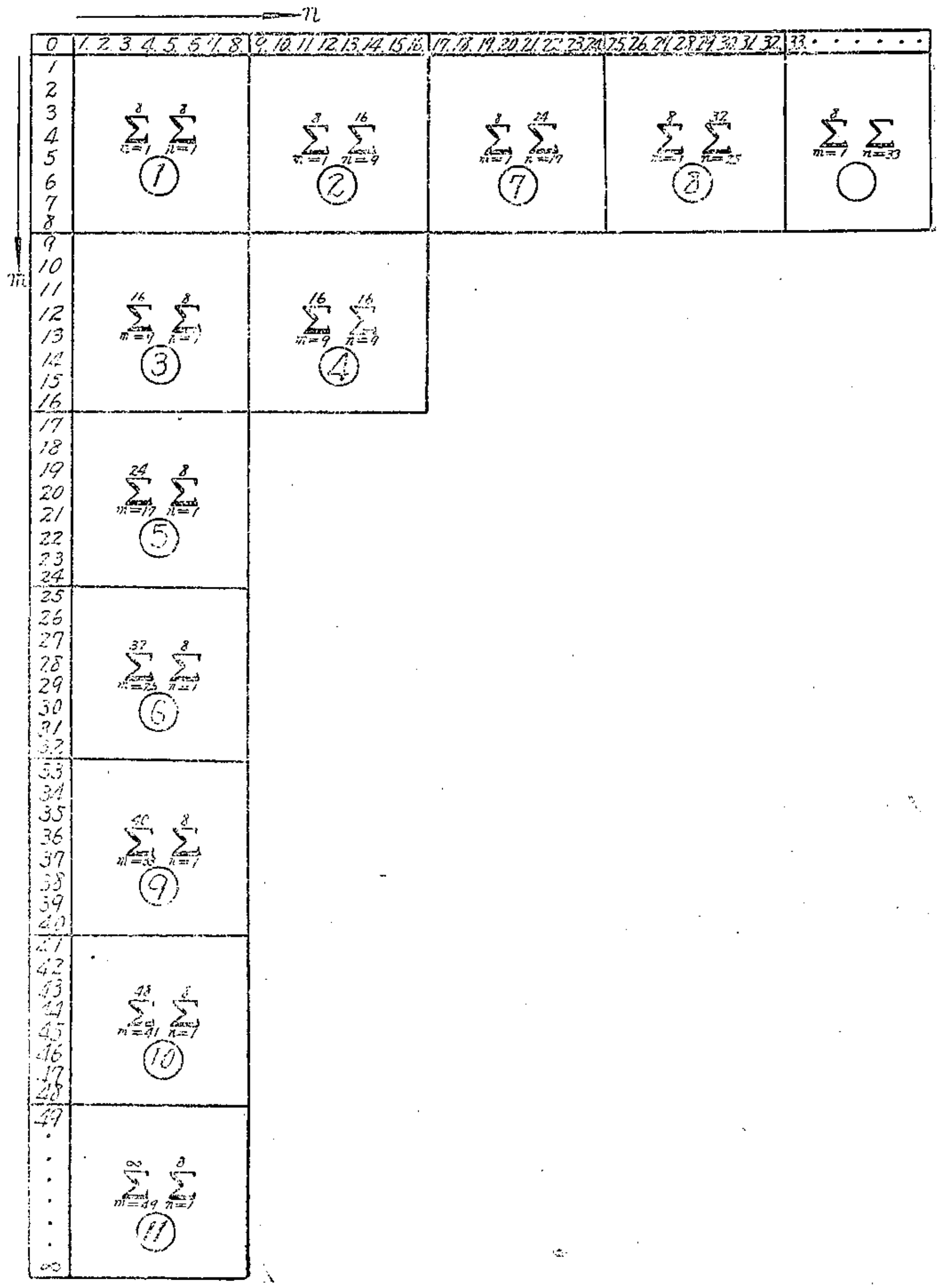
$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1$$

$$=\frac{16p_0}{N\pi^6m^5n^5\left\{\left(\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{1}{m^2}\right)^2+\dfrac{\lambda^4}{\pi^4}\dfrac{1}{m^4n^4}\right\}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1$$

となるから，收斂は急速で從つて w_1 は收斂の早い級數で表されてゐる。今 m, n を圖表-1 に示す如く縱橫に取つて，各々 1 より 8 迄のものを①とし以下順次に②③④⑤⑥‥‥に分けて計算すると，

w_1 は荷重の中心點にて，

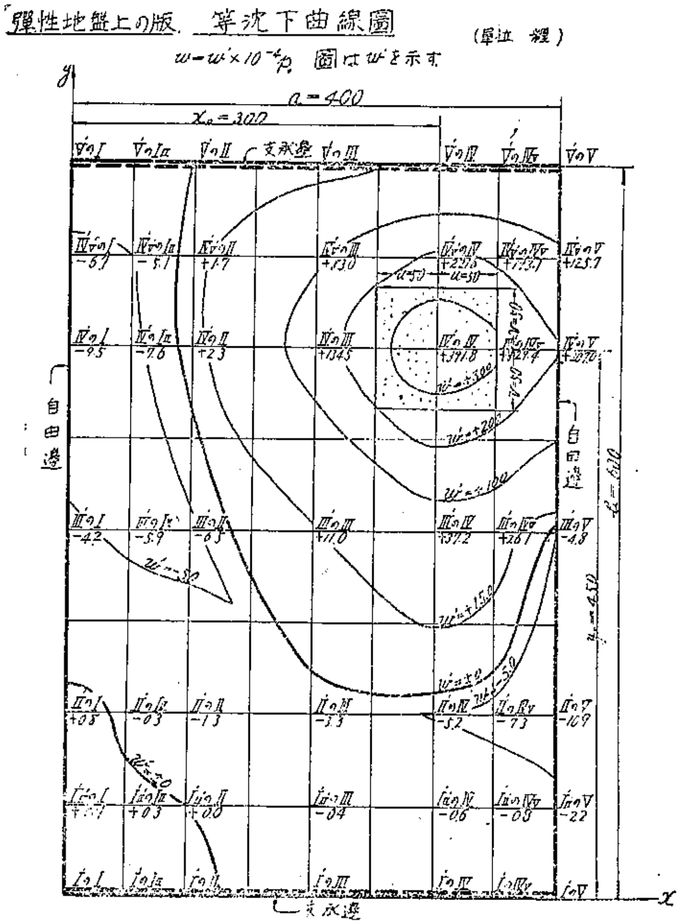
圖表-1.


n
m
0
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.
17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24.
25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32.
33. . . . . . .
$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}$ ①
$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=9}^{16}$ ②
$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=17}^{24}$ ⑦
$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=25}^{32}$ ⑧
$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=33}$
$\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=1}^{8}$ ③
$\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=9}^{16}$ ④
$\sum_{m=17}^{24}\sum_{n=1}^{8}$ ⑤
$\sum_{m=25}^{32}\sum_{n=1}^{8}$ ⑥
$\sum_{m=33}^{40}\sum_{n=1}^{8}$ ⑨
$\sum_{m=41}^{48}\sum_{n=1}^{8}$ ⑩
$\sum_{m=49}^{\infty}\sum_{n=1}^{8}$ ⑪
∞

		比率
w_1 の ①$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}$(公式)=	$371.170(10^{-4}p_0)$	99.64 %
w_1 の ②$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=9}^{16}$(〃)=	2.202 (〃)	0.59 %
w_1 の ③$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=1}^{8}$(〃)=	-0.818 (〃)	-0.22 %
w_1 の ④$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=9}^{16}$(〃)=	-0.035 (〃)	-0.01 %
計	372.519 (〃)	100.00 %

但し本計算では $\xi_0=\eta_0=3/4$ であるから m, n が 4 の倍數であるときは $\sin m\pi\xi=\sin n\pi\eta_0=0$ となる。上に見る如く②以下の比率は非常に僅小であるから①のみの計算で大差ない。

圖-1.



w_2 は E_n, F_n の項を含み m に付いては收斂の遲い級數であるが版の中央近くでは w_1 に比較するとその影響が小さいからこれも①のみで實用上差支へない。荷重の中心點にては，

		比率
w_2 の ① $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=$	$20.591\,(10^{-4}p_0)$	$103.35\,\%$
w_2 の ② $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=$	0.012 (〃)	$0.06\,\%$
w_2 の ③ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=$	-1.596 (〃)	$-8.40\,\%$
w_2 の ④ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=$	-0.002 (〃)	$-0.01\,\%$
計	19.005 (〃)	$100.00\,\%$

w_1 と w_2 とを加へると

		比率
w の ① $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=$	$391.760\,(10^{-4}p_0)$	$100.06\,\%$
w の ② $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=$	2.214 (〃)	$0.57\,\%$
w の ③ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=$	-2.414 (〃)	$-0.62\,\%$
w の ④ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (―) $=$	-0.038 (〃)	$-0.01\,\%$
計	391.522 (〃)	$100.00\,\%$

以上の如く②以下の數値が①に比較して非常に小さいから實用上は①のみの計算で充分である。

圖-1～3 (**圖-2, 3** 省略) は何れも m, n 共に 1 より 8 迄の計算値である。

M_x を

$$M_{x_1}=N\sum_{m}\sum_{n}A_{mn}m^2n^2\left\{\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{n^2}+\nu\frac{\pi^2}{b^2}\frac{1}{m^2}\right\}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$

$$M_{x_2}=-N\sum_{n}\left[E_n\left\{(1-\nu)^2\frac{\pi^2a^2}{b^4}n^4+\frac{a^2\lambda^4}{\pi^2}\right\}f(x)+F_n\left\{(1-\nu)^2\frac{\pi^2a^2}{b^4}n^4+\frac{a^2\lambda^4}{\pi^2}\right\}f_1(x)\right]\sin n\pi\eta$$

とに分けて見ると, w よりは收斂が緩慢である。

荷重點の M_x は

		比率
M_{x_1} の ① $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=$	$643.240\,p_0$	$104.49\,\%$
M_{x_1} の ② $=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=$	$9.855\,p_0$	$1.60\,\%$
M_{x_1} の ③ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=$	$-35.960\,p_0$	$-5.84\,\%$
M_{x_1} の ④ $=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=$	$-1.522\,p_0$	$-0.25\,\%$
計	$615.613\,p_0$	$100.00\,\%$

となる。

M_{x_2} の影響は M_{x_1} に比較すると小さい。即ち

		比率
M_{x_2} の ①	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=-96.403\,p_0$	109.02 %
M_{x_2} の ②	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=-\ 0.106\,p_0$	0.12 %
M_{x_2} の ③	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=\ 8.065\,p_0$	-9.12 %
M_{x_2} の ④	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=\ 0.021\,p_0$	-0.02 %
計	$-\ 88.423\,p_0$	100.00 %

であつて, M_{x_2} は上述の如く M_{x_1} の僅かに 14.4 % に過ぎない。

M_x としては,

		比率
M_x の ①	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=\ 546.840\,p_0$	103.73 %
M_x の ②	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=\ 9.749\,p_0$	1.85 %
M_x の ③	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=-27.895\,p_0$	-5.29 %
M_x の ④	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=-\ 1.501\,p_0$	-0.29 %
計	$527.193\,p_0$	100.00 %

の如く收斂が急であるから實用上は①のみで支障はない。

圖-4 はこの①の結果に依つたものである。

M_y に付いても M_x と同樣に

$$M_{y_1}=N\sum_n\sum_m A_{mn}m^2n^2\left\{\nu\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\frac{1}{m^2}\right\}\sin m\pi\xi\,\sin n\pi\eta$$

$$M_{y_2}=-N\sum_n\Big[E_n\left\{\left(\nu\frac{a^2\lambda^4}{\pi^2}-(1-\nu)^2\frac{\pi^2a^2}{b^4}\,n^4\right)f(x)-(1-\nu^2)\frac{a^2\lambda^2}{b^2}\,n^2\phi(x)\right\}$$

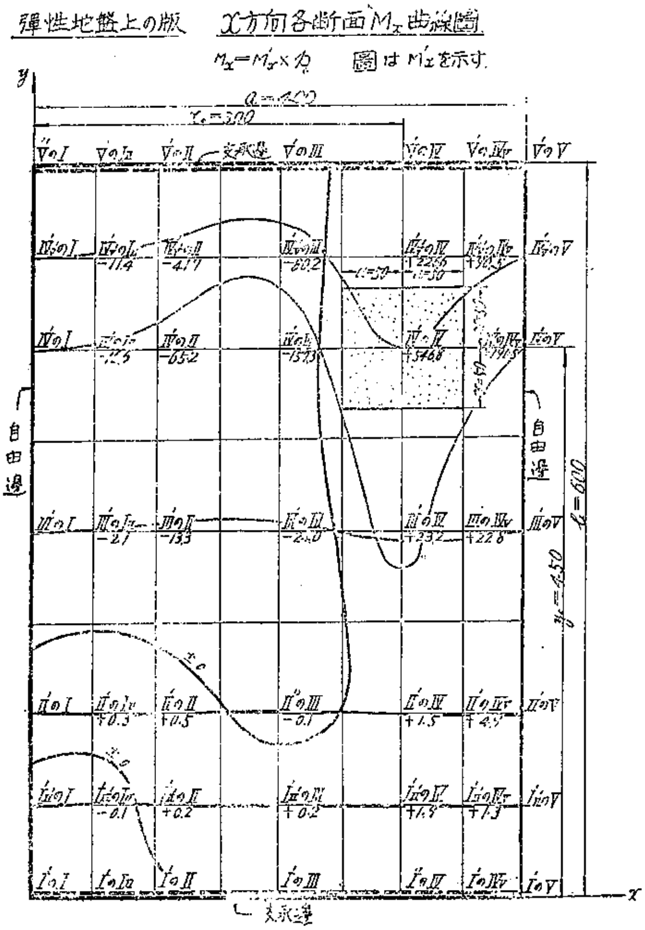
$$+F_n\left\{\left(\nu\frac{a^2\lambda^4}{\pi^2}-(1-\nu)^2\frac{\pi^2a^2}{b^4}\,n^4\right)f_1(x)-(1-\nu^2)\frac{a^2\lambda^2}{b^2}n^2\phi_1(x)\right\}\Big]\sin n\pi\eta$$

に分けると, 荷重點に於ては M_{y_1} の影響が大きくて M_{y_2} は餘り影響しない。

		比率
M_{y_1} の ①	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (公式) $=550.460\,p_0$	96.83 %
M_{y_1} の ②	$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=\ 26.407\,p_0$	4.64 %
M_{y_1} の ③	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ (〃) $=-7.971\,p_0$	-1.40 %
M_{y_1} の ④	$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$ (〃) $=-0.387\,p_0$	-0.07 %
計	$568.509\,p_0$	100.00 %

		比率
M_{y_2} の ①$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$(公式)$=$	$8.856\,p_0$	104.88 %
M_{y_2} の ②$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$(〃)$=$	$0.156\,p_0$	1.85 %
M_{y_2} の ③$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$(〃)$=$	$-0.538\,p_0$	−6.37 %
M_{y_2} の ④$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=9}^{16}$(〃)$=$	$-0.030\,p_0$	−0.36 %
計	$8.444\,p_0$	100.00 %

圖-4.



依つて M_y としては

		比率
M_y の ①$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}$(公式)	$=559.320\,p_0$	96.94 %
M_y の ②$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=9}^{16}$(〃)	$=26.563\,p_0$	4.60 %
M_y の ③$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=1}^{8}$(〃)	$=-8.509\,p_0$	−1.47 %
M_y の ④$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=9}^{16}$(〃)	$=-0.418\,p_0$	−0.07 %
計	$576.956\,p_0$	100.00 %

(2) 荷重の中心點と版の中心點とが一致する場合

この場合の A_{mn} は

$$A_{mn}=\frac{16\,p_0a^4(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_1$$

であるから，(1) の場合との相違は $\sin m\pi\xi_0$ の代りに $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$，$\sin n\pi\eta_0$ の代りに $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ であつて，m, n は $1, 3, 5, \cdots\cdot\infty$ であるから F_n の項は消失する。

この時の中心點の數値計算値は夫々

		比率
w_1 の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=+370.250\ (10^{-4}p_0)$	99.51 %
w_1 の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=+\ 2.579$ (〃)	0.69 %
w_1 の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=-\ 0.768$ (〃)	−0.20 %
w_1 の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=-\ 0.037$ (〃)	−0.01 %
w_1 の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=+\ 0.052$ (〃)	0.01 %
w_1 の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=-\ 0.009$ (〃)	−0.00 %
計	$+372.067$ (〃)	100.00 %

		比率
w_2 の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=+3.573\ (10^{-4}p_0)$	97.22 %
w_2 の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=+0.000$ (〃)	0.00 %
w_2 の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=+0.115$ (〃)	3.13 %
w_2 の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=-0.000$ (〃)	−0.00 %

w_2 の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.019\ (10^{-4}\ p_0)$　　-0.51%

w_2 の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=+0.006\ (\ 〃\ )$　　0.16%

計　$+3.675\ (\ 〃\ )$　　100.00%

となるから w_1+w_2 即ち w は實用上 m, n 共 1 より 7 迄の①のみの計算で充分である。

M_x と M_y は，

		比率
M_x の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=+571.350\,p_0$	103.57%
M_x の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}$	$=+\ 11.091\,p_0$	2.01%
M_x の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 33.731\,p_0$	-6.11%
M_x の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 1.659\,p_0$	-0.30%
M_x の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=+\ 7.164\,p_0$	1.30%
M_x の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 2.593\,p_0$	-0.47%
計	$+551.622\,p_0$	100.00%
M_y の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=+543.750\,p_0$	96.00%
M_y の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}$	$=+\ 29.647\,p_0$	5.23%
M_y の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 7.446\,p_0$	-1.31%
M_y の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 0.400\,p_0$	-0.07%
M_y の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=+\ 1.328\,p_0$	0.23%
M_y の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}$	$=-\ 0.456\,p_0$	-0.08%
計	$+566.423\,p_0$	100.00%

以上の結果より判斷すると，實用上 M_x, M_y 共に m, n は 1 より 7 迄採つて計算したる①のみで充分である。

w_1 と w_2 とを比較すると，w_2 の影響は w_1 の僅かに 1% に足りぬから，かくの如く版の中心點に荷重のあるときは w, M 共に實用的には w_1, M_{x1}, M_{y1} の計算により大略を察知する事が出來る。

(3) 等分布荷重が版の全面に在る場合

この場合の A_{mn} は

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

$$= \frac{16p_0}{N\pi^6 m^5 n^5 \left\{\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{m^2}\right)^2+\frac{\lambda^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{m^4 n^4}\right\}}$$

であつて (1) の場合との差異は $\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$ の項が 1 となり，又 $m, n=1, 3, 5, \cdots\infty$ であるから，F_n の項は消失することである。即ち，w, M 等は，

$$w_1=\sum_m\sum_n \frac{16p_0}{N\pi^6 m^5 n^5 \left\{\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{m^2}\right)^2+\frac{\lambda^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{m^4 n^4}\right\}}\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$

$$w_2=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2 f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right]\sin n\pi\eta$$

$$M_{x1}=\sum_m\sum_n \frac{16p_0\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\nu\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{m^2}\right)}{\pi^4 m^3 n^3\left\{\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{m^2}\right)^2+\frac{\lambda^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{m^4 n^4}\right\}}\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$

$$M_{x2}=-N\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)^2\frac{\pi^2 a^2}{b^4}n^4+\frac{a^2\lambda^4}{\pi^2}\right\}f(x)\right]\sin n\pi\eta$$

にて表される。

前同樣の計算を施すと，版の中心點にて

		比率
w_1 の ① $=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=11.264\ (10^{-2}p_0)$	99.66 %
w_1 の ② $=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=0.032$ (〃)	0.28 %
w_1 の ③ $=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=0.006$ (〃)	0.05 %
w_1 の ④ $=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=0.000$ (〃)	0.00 %
w_1 の ⑤ $=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=0.000$ (〃)	0.00 %
w_1 の ⑥ $=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=0.000$ (〃)	0.00 %
w_1 の ⑦ $=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=17}^{23}$ { 〃 }	$=0.001$ (〃)	0.01 %
計	11.303 (〃)	100.00 %

以上の如くなるから w_1 は①の計算のみで充分である。

w_2 は版の中心點にて，

		比率
w_2 の ① $=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}$ {公式}	$=-0.879\ (10^{-2}p_0)$	76.70 %
w_2 の ② $=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}$ { 〃 }	$=+0.000$ (〃)	-0.00 %
w_2 の ③ $=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}$ { 〃 }	$=-0.159$ (〃)	13.87 %

w_2 の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=+0.000\ (\ 〃\ )$		$-0.00\ \%$
w_2 の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.054\ (\ 〃\ )$		$4.71\ \%$
w_2 の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.027\ (\ 〃\ )$		$2.36\ \%$
w_2 の ⑦$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{23}\{\ 〃\ \}=+0.000\ (\ 〃\ )$		$-0.00\ \%$
w_2 の ⑨$=\sum_{m=33}^{39}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.016\ (\ 〃\ )$		$1.40\ \%$
w_2 の ⑩$=\sum_{m=41}^{47}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.011\ (\ 〃\ )$		$0.96\ \%$
計	$-1.146\ (\ 〃\ )$	$100.00\ \%$

以上の如く w_2 は m の方向に收斂が緩慢であつて，これの影響は w_1 の $10\ \%$ に過ぎないが，$y=b/2$ 線上の先端（Ⅲ′の-Ⅰ）の點に於ける w_2 を見ると，

		比率
w_2 の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}\{公式\}=7.220\ (10^{-2}p_0)$		$74.94\ \%$
w_2 の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=0.024\ (\ 〃\ )$		$0.25\ \%$
w_2 の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=1.425\ (\ 〃\ )$		$14.79\ \%$
w_2 の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=0.005\ (\ 〃\ )$		$0.05\ \%$
w_2 の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=0.480\ (\ 〃\ )$		$4.98\ \%$
w_2 の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=0.241\ (\ 〃\ )$		$2.50\ \%$
w_2 の ⑨$=\sum_{m=33}^{39}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=0.144\ (\ 〃\ )$		$1.49\ \%$
w_2 の ⑩$=\sum_{m=41}^{47}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=0.096\ (\ 〃\ )$		$1.00\ \%$
計	$9.635\ (\ 〃\ )$	$100.00\ \%$

となつて，版の緣に於ては m に就いて收斂が緩慢であると同時に w_1 は 0 であるから w_2 のみの影響となり其の數値も中心點の w_1 の値と等しからず寧ろ大きくなる性質のものである。依つて w の全體として見るときは版の中心點にて次の如き結果となる。

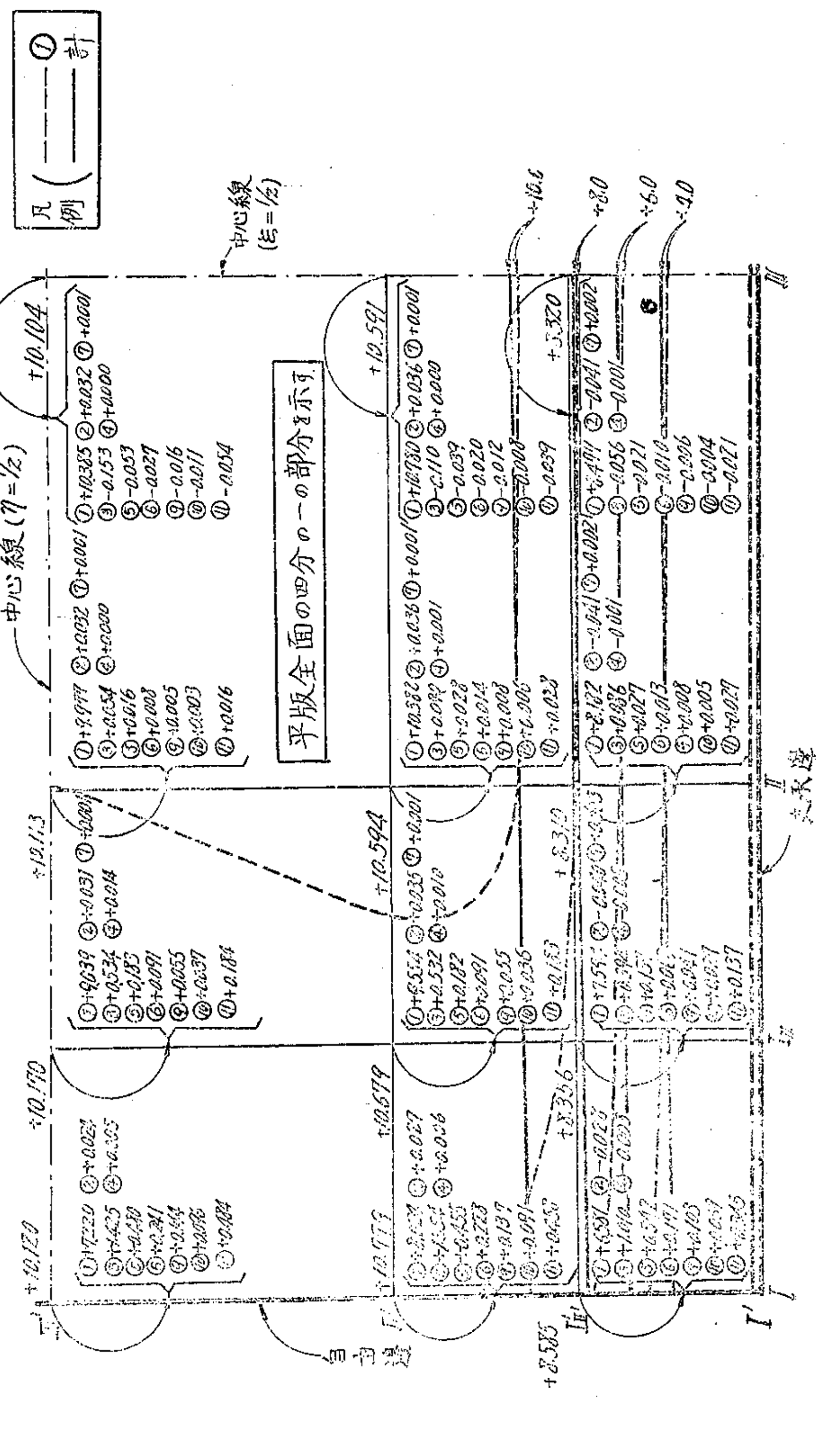
	比率
w の ①$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}\{公式\}=10.385\ (10^{-2}p_0)$	$102.24\ \%$
w の ②$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=0.032\ (\ 〃\ )$	$0.32\ \%$
w の ③$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.153\ (\ 〃\ )$	$-1.51\ \%$

圖表-2.

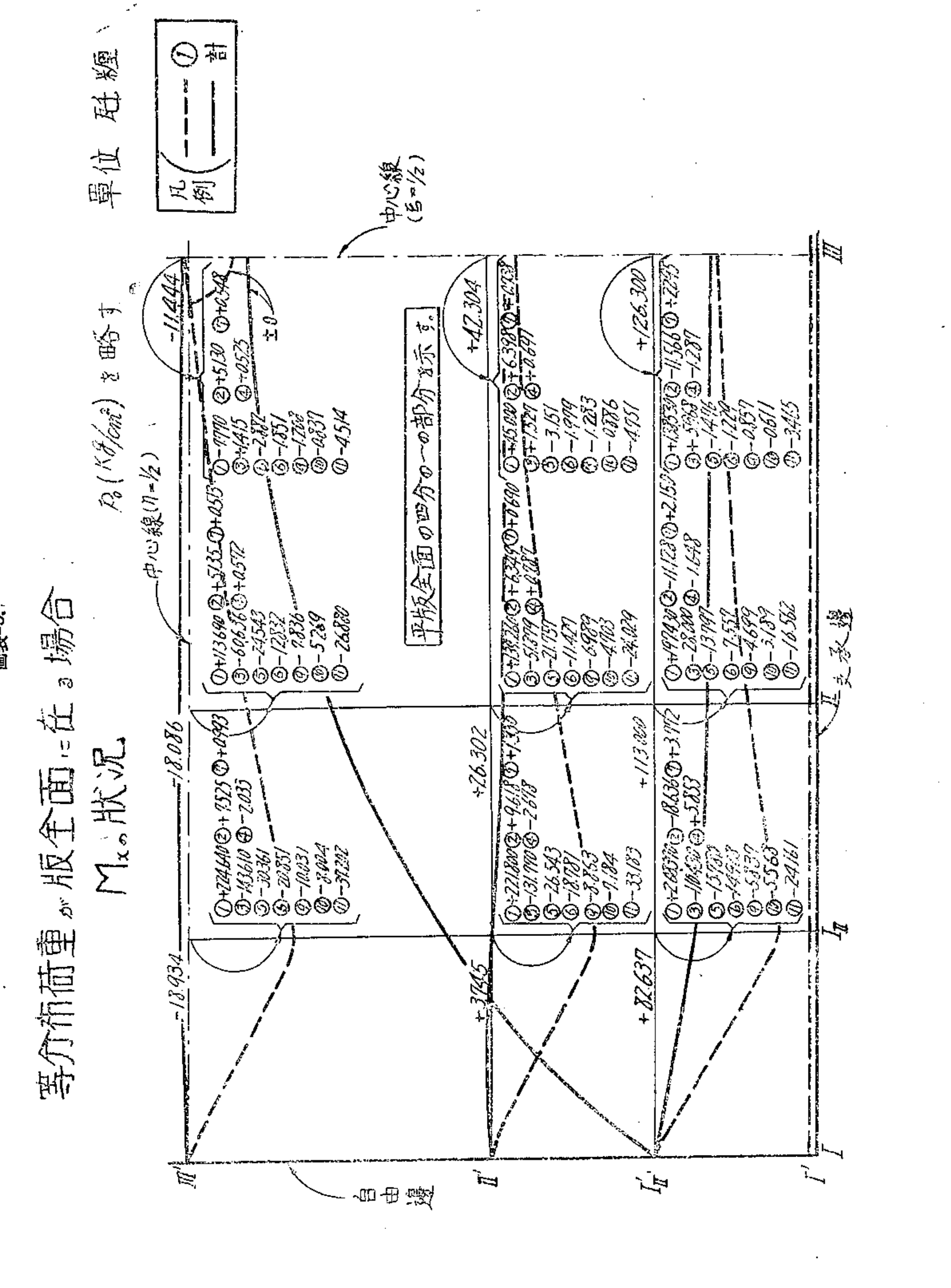
等分布荷重ガ版全面ニ在ル場合 w ノ状況

單位 粍

$10^{-2} P_0$ (kg/cm²) を略す



圖表-3.1

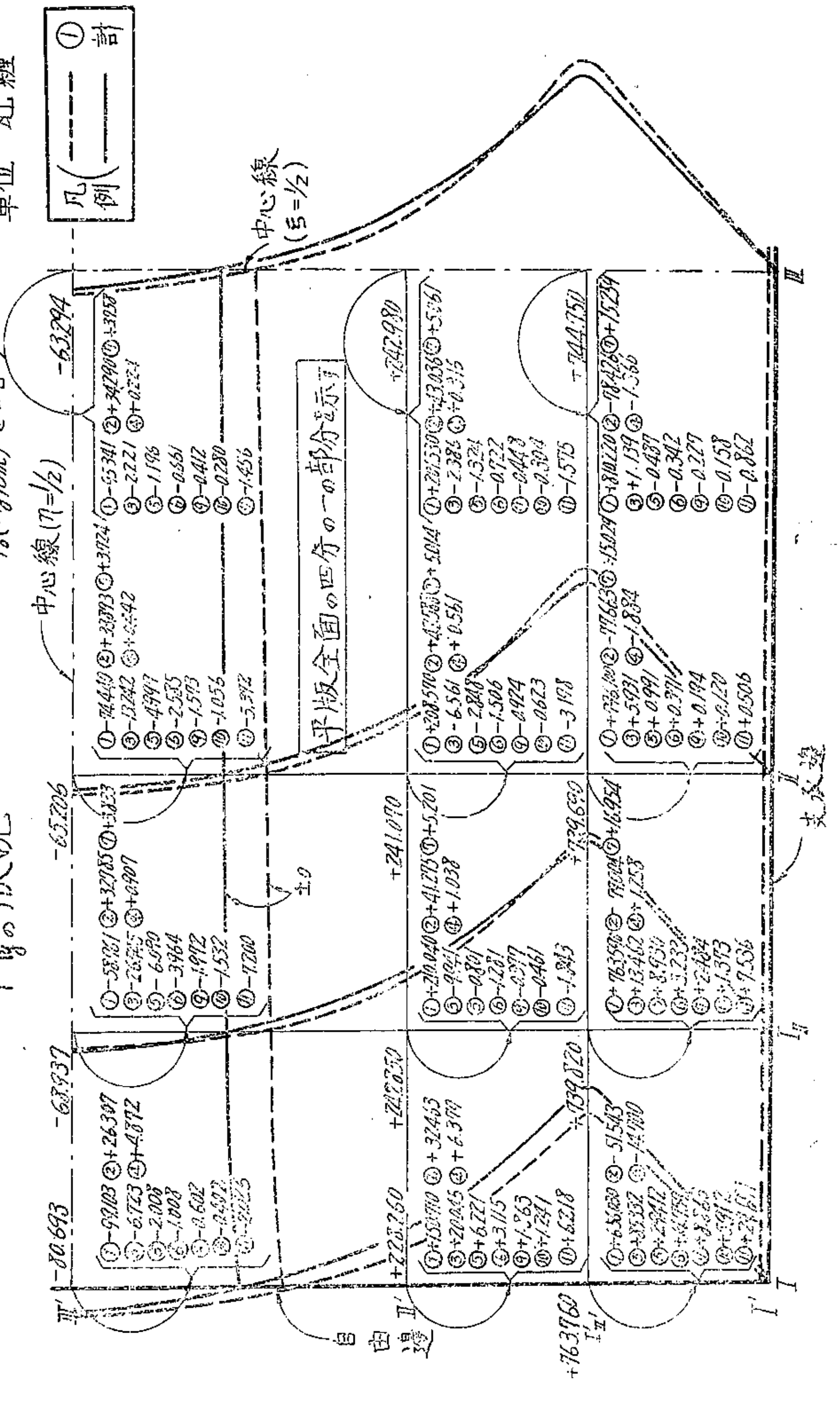


等分布荷重が版全面に在る場合
M_xの狀況
單位 瓩 糎
凡例
計
中心線（$\xi=1/2$）
中心線（$\eta=1/2$）
p_0（kg/cm^2）を略す
平版全面の四分の一の部分を示す
自由邊
支承邊
-18.934
-18.086
-11.444
+3.745
+26.302
+42.304
+82.637
+113.300
+126.300

圖表-9.

等分布荷重が版全面に在る場合

M_yの狀況



w の ④$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=9}^{15}\{\ ''\ \}=$	0.000 (〃)	0.00 %
w の ⑤$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ ''\ \}=$	-0.053 (〃)	-0.52 %
w の ⑥$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ ''\ \}=$	-0.027 (〃)	-0.26 %
w の ⑨$=\sum_{m=33}^{39}\sum_{n=1}^{7}\{\ ''\ \}=$	-0.016 (〃)	-0.16 %
w の ⑩$=\sum_{m=41}^{47}\sum_{n=1}^{7}\{\ ''\ \}=$	-0.011 (〃)	-0.11 %
計	10.157 (〃)	100.00 %

以上の如く版の中心點に於ては w_1 の影響が大きく，w_2 の影響が少ないから實用上は①のみで充分であるが，版の緣では w_2 の影響が大きいので m を 47 迄取つても尙收斂が遲れることは前表に示す通りである。

$m=47$ までを以上の如く計算し，夫れ以下の m については，

$$A_{mn}=\frac{16\,p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

の式にて m が 49 以上になると，$a^2/b^2=0.4444\,4\cdots\cdots$，$a^4\lambda^4/\pi^4=43.261\cdots\cdots$ であるから，$m^2=49^2=2\,401$ と比較すると，a^2/b^2，$a^4\lambda^4/\pi^4$ は共に非常に小さいと見做し，是等を無視して n が小なる間は，

$$A_{mn}\fallingdotseq\frac{16\,p_0a^4}{N\pi^6m^5n}$$

と考へ得る。而して E_n の分子は，

$$[E_n\text{ の分子}]=\sum_m A_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}$$

これも $m=49$ 以上に於て m 以外の項を無視すると，

$$[E_n\text{ の分子}]\fallingdotseq\sum_n A_{mn}m^3\ (m\text{ は奇數})$$

$$\fallingdotseq\sum_m\frac{16\,p_0a^4m^3}{N\pi^6m^5n}=\frac{16\,p_0a^4}{N\pi^6n}\sum_m\frac{1}{m^2}$$

となる。然るに $\sum_m\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$　　$m=1,2,3,\cdots\cdots\infty$

$$\sum_m\frac{1}{m^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=1.2337\,0055\,0\qquad m=1,3,5,\cdots\cdots\infty$$

$$\sum_{m=1}^{47}\frac{1}{m^2}=1.2232\,5078\,9$$

よつて m が 49 以降無限大までの $\sum_{m=49}^{\infty}\frac{1}{m^2}=0.0104\,4976\,1$ を得る。

これを用ひて計算すると各點の w, M_x, M_y は圖表-2～4 の如く得られる。

圖表-2～4 の沈下 w の狀況を見ると，$\xi=0$, $\xi=1/8$, $\xi=1/4$, $\xi=1/2$ の各線と，$\eta=1/2$ 線が交叉する各點の沈下量は殆んど等しくて，$\xi=0$ 線即ち版の緣上の點 (Ⅲ′—Ⅰ) の沈下が極めて僅かに大きいのである。この事は $\eta=1/4$, $\eta=1/8$ 線上の各交點についても同樣である。依つて實用上は中央線 ($\xi=1/2$) 上の各點の沈下量を $\xi=0$, $\xi=1/8$, $\xi=1/4$ 線上の各點に適用出來るものである。その計算は m, n 共に 1 より 7 迄を採用した①のみで充

表-1.

彈性地盤上の版　　分布荷重が $x_0/a=\xi_0=3/4,\ y_0/b=\eta_0=3/4$ に在る場合（其の一）

$C = 10$ Kg/cm³

$\nu = \frac{1}{6}$

$h = 15$ cm.

$a = 400$ cm

$b = 600$ cm

$E = 210{,}000$ Kg/cm²

$N = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = 60{,}748{,}000$ Kg-cm

$\lambda^4 = \dfrac{C}{N} = 0.000\,000\,164\,61$ cm⁻⁴

$p_0 = 1$ Kg/cm²

$2u = 100$ cm

$2v = 1.00$ cm

$$E_n' = \frac{\sum_m A_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{-a_n \sin\pi q_n - a_n' \sinh\pi p_n} = \frac{\sum_m A_{mn}' E'}{Q'}$$

$$F_n' = \frac{\sum_m A_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{a_n \sin\pi q_n - a_n' \sinh\pi p_n} = \frac{\sum_m A_{mn}' F'}{Q''}$$

上式中

$$p_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}+\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$q_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$A_{mn} = \frac{\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1}{\pi^6 mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

$$a_n = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}p_n+2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 q_n$$

$$a_n' = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}q_n-2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 p_n$$

$m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$

n	p_n	q_n
1	1.8757	1.7533
2	2.0726	1.5868
3	2.4185	1.3598
4	2.8981	1.1348
5	3.4658	0.9489
6	4.0804	0.8059
7	4.7185	0.0967

n	A_{mn}						
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
1	+0.000 001 13	−0.000 001 06	+0.000 000 31	0.000 000 06	−0.000 000 03	+0.000 000 01	−0.000 000 00
2	−0.000 001 38	+0.000 001 19	−0.000 000 35	0.000 000 00	+0.000 000 04	−0.000 000 02	+0.000 000 00
3	+0.000 000 68	−0.000 000 57	+0.000 000 17	0.000 000 00	−0.000 000 02	+0.000 000 01	−0.000 000 00
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	−0.000 000 20	+0.000 000 18	−0.000 000 06	0.000 000 00	+0.000 000 01	−0.000 000 00	+0.000 000 00
6	+0.000 000 14	−0.000 000 13	+0.000 000 05	0.000 000 00	−0.000 000 01	+0.000 000 00	−0.000 000 00
7	−0.000 000 04	+0.000 000 05	−0.000 000 02	0.000 000 00	+0.000 000 00	−0.000 000 00	+0.000 000 00

表-2.　彈性地盤上の版

分布荷重が $x_0/a=\xi_0=3/4$, $y_0/b=\eta_0=3/4$ に在る場合（其の二）

n	$A'_{mn}E'$ $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$\sum_m A'_{mn}E$
1	+0.000 002 06	+0.000 009 21	−0.000 004 64	−0.000 001 03	+0.000 005 59
2	−0.000 005 87	−0.000 013 06	+0.000 006 31	+0.000 001 40	−0.000 011 22
3	+0.000 005 72	+0.000 008 71	−0.000 004 14	−0.000 000 92	+0.000 009 37
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	−0.000 004 32	−0.000 006 08	+0.000 003 12	+0.000 000 72	−0.000 006 56
6	+0.000 004 28	+0.000 006 49	−0.000 003 56	−0.000 000 86	+0.000 006 34
7	−0.000 001 99	−0.000 003 27	+0.000 001 92	+0.000 000 48	−0.000 002 86

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	$E'_n=\dfrac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$
1	+0.000 005 59	15 180	+0.000 000 000 368 66
2	−0.000 011 22	35 468	−0.000 000 000 316 45
3	+0.000 009 37	149 320	+0.000 000 000 062 77
4	0.000 000 00	1 058 100	0.000 000 000 000 00
5	−0.000 006 56	10 621 000	−0.000 000 000 000 61
6	+0.000 006 34	119 950 000	+0.000 000 000 000 05
7	−0.000 002 86	1346 700 000	−0.000 000 000 000 00

n	$A'_{mn}F$ $m=2$	$m=4$	$m=6$	$\sum_m A'_{mn}F'$
1	−0.000 010 28	0.000 000 00	+0.000 003 61	−0.000 006 67
2	+0.000 017 41	0.000 000 00	−0.000 004 90	+0.000 012 50
3	−0.000 012 95	0.000 000 00	+0.000 003 23	−0.000 009 71
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	+0.000 009 01	0.000 000 00	−0.000 002 50	+0.000 006 51
6	−0.000 009 21	0.000 000 00	+0.000 002 91	−0.000 006 30
7	+0.000 004 45	0.000 000 00	−0.000 001 61	+0.000 002 84

n	$\sum_m A'_{mn}F$	Q''	$F'_n=\dfrac{\sum_m A'_{mn}F'}{Q''}$
1	−0.000 006 67	15 282	−0.000 000 000 436 57
2	+0.000 012 50	35 572	+0.000 000 000 351 60
3	−0.000 009 71	149 360	−0.000 000 000 065 07
4	0.000 000 00	1 058 100	0.000 000 000 000 00
5	+0.000 006 51	10 621 000	+0.000 000 000 000 61
6	−0.000 006 30	118 950 000	−0.000 000 000 000 95
7	+0.000 002 84	1346 700 000	+0.000 000 000 000 00

表-3.

彈性地盤上の版. 分布荷重が $x/a=\xi=3/4$, $y/b=\eta=3/4$ に在る場合 $a=400$, $b=600$ 單位 kg.cm.

點の位置	$y/b=\eta$	$x/a=\xi$		w_1	w_2	w	M_x	M_y
I'	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
$\mathrm{I_{II}}$'	1/8	I	0/4	0.000 000	+0.000 068	+0.000 068	0.000 000	+0.553 160
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	−0.000 009	+0.000 039	+0.000 029	−0.057 390	+0.889 870
	〃	II	1/4	−0.000 028	+0.000 028	+0.000 000	+0.159 590	+1.446 100
	〃	III	2/4	−0.000 086	+0.000 043	−0.000 043	+0.168 180	+3.001 500
	〃	IV	3/4	−0.000 032	+0.000 021	−0.000 060	+1.890 800	+5.509 600
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	−0.000 049	−0.000 034	−0.000 084	+1.279 300	+7.564 400
	〃	V	4/4	0.000 000	−0.000 224	−0.000 224	0.000 000	+7.458 000
II'	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.000 079	+0.000 079	0.000 000	+1.691 300
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	−0.000 082	+0.000 054	−0.000 028	+0.343 670	+1.949 000
	〃	II	1/4	−0.000 180	+0.000 048	−0.000 131	+0.489 420	+2.325 900
	〃	III	2/4	−0.000 366	+0.000 035	−0.000 330	−0.147 700	+0.782 800
	〃	IV	3/4	−0.000 342	−0.000 173	−0.000 516	+1.472 900	−2.757 500
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	−0.000 194	−0.000 538	−0.000 732	+4.928 300	−0.306 500
	〃	V	4/4	0.000 000	−0.001 092	−0.001 092	0.000 000	+5.945 300
III'	2/4	I	0/4	0.000 000	−0.000 416	−0.000 416	0.000 000	+0.534 530
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	−0.000 431	−0.000 154	−0.000 588	−2.095 000	−1.876 800
	〃	II	1/4	−0.000 603	−0.000 046	−0.000 649	−13.291 000	−9.310 100
	〃	III	2/4	+0.001 377	−0.000 277	+0.001 099	−24.011 000	−65.342 000
	〃	IV	3/4	+0.004 283	−0.000 559	+0.003 724	+23.155 000	−157.180 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	+0.003 023	−0.000 416	+0.002 607	+22.769 000	−140.430 000
	〃	V	4/4	0.000 000	−0.000 483	−0.000 483	0.000 000	−111.820 000
IV'	3/4	I	0/4	0.000 000	−0.000 947	−0.000 947	0.000 000	−4.601 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	−0.000 338	−0.000 420	−0.000 758	−16.599 000	−4.807 000
	〃	II	1/4	+0.000 433	−0.000 208	+0.000 225	−65.161 000	−3.147 800
	〃	III	2/4	+0.013 893	−0.000 439	+0.013 454	−157.290 000	+115.290 000
	〃	IV	3/4	+0.037 117	+0.002 059	+0.039 176	+516.840 000	+559.320 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	+0.024 526	+0.008 410	+0.032 937	+190.530 000	+409.910 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.020 695	+0.020 695	0.000 000	+242.820 000
$\mathrm{IV_V}$'	7/8	I	0/4	0.000 000	−0.000 666	−0.000 666	0.000 000	−4.461 400
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	−0.000 208	−0.000 299	−0.000 508	−11.364 000	−5.644 200
	〃	II	1/4	+0.000 320	−0.000 153	+0.000 166	−41.721 000	−6.693 600
	〃	III	2/4	+0.008 601	−0.000 302	+0.008 299	−80.179 000	+7.272 500
	〃	IV	3/4	+0.020 763	+0.001 399	+0.022 162	+226.590 000	+35.491 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	+0.013 883	+0.005 425	+0.019 309	+90.498 000	+33.675 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.012 568	+0.012 568	0.000 000	+22.595 000
V'	4/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000

表中, p_0 は省略す.

分であることが知られる。

且つ w の式にて $\xi=1/2$ とすると

$$f(x)=2\sinh\frac{\pi p_n}{2}\sin\frac{\pi q_n}{2}$$

$$\phi(x)=2\cosh\frac{\pi p_n}{2}\cos\frac{\pi q_n}{2}$$

$$\sin m\pi\xi=(-1)^{\frac{m-1}{2}} \qquad m=1,3,5,7,\cdots\infty$$

となるから $\xi=1/2$ 線上の w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{2(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\sinh\frac{\pi p_n}{2}\sin\frac{\pi q_n}{2}+\frac{2a^2\lambda^2}{\pi^2}\cosh\frac{\pi p_n}{2}\cos\frac{\pi q_n}{2}\right\}+\sum_m A_{mn}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sin n\pi\eta$$

$$m, n=1,3,5,7,\cdots\infty$$

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

の簡單なる式を得る。

M_x の量は $\xi=1/2$ 線上のものが最大で他の各點のものは小さいから $\eta=1/2$ 線上のものを除き，實用上は $\xi=1/2$ で而かも m, n 共に 1 より 7 迄を採用した①のみの計算で充分である。たゞ $\eta=1/2$ 線上の M_x は $\xi=1/8$, $\xi=1/4$ 線との交點附近にて最大であるが其量は小さいものである。

M_y は數字表に示す如く其收斂が n の方向に緩慢であるが大體に於て $\xi=1/8$, $\xi=1/4$, $\xi=1/2$ 線上のものは殆んど等しく，たゞ $\xi=0$ 即ち版の緣に於ける値が少し不同である。この M_y に就ても $\xi=1/2$ 線上のもので實用上は差支へないのである。その計算は m, n 共 1 より 7 迄の①とするか, 或は m を 1 より 7 まで, n を 1 より 23 迄取つた①②⑦を採用すればより正確に近い數値が得られる。

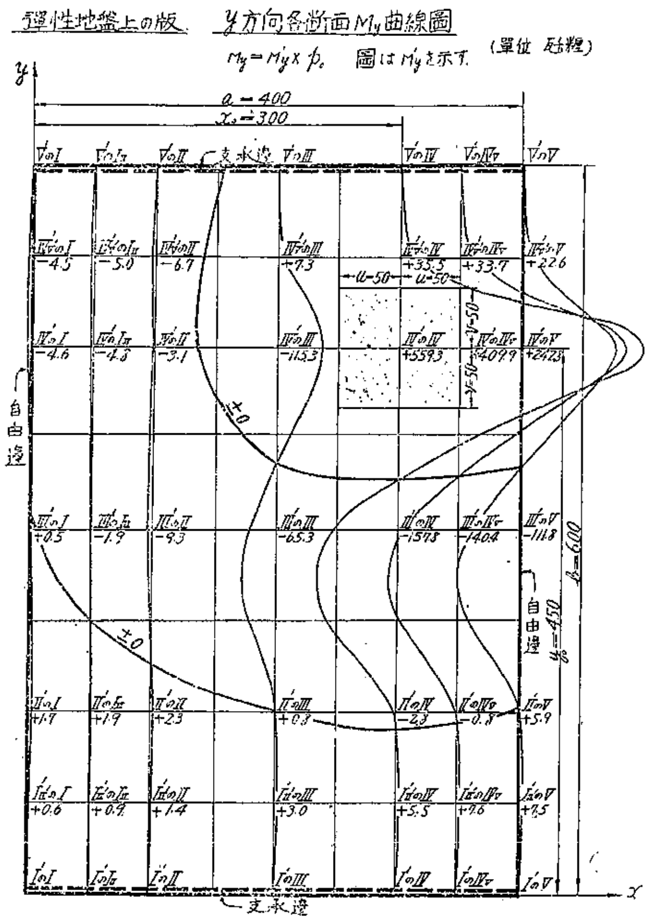
(B) 附圖の説明

(1) 彈性地盤上の $a=400$ cm, $b=600$ cm の矩形版にて分布荷重が $x_0/a=\xi_0=3/4$, $y_0/b=\eta_0=3/4$ に在る場合 $2u=2v=100$ cm, $p_0=1$ kg/cm^2 の等分布荷重に對する常數の値は表-1, w, M_x, M_y の値は表-3 に示す通りである。圖-1 は本表計算値より製作せる撓度の等高線圖である。之によると沈下の最大値は荷重の直下に起り，これを遠ざかるに從つて急に減少して版は僅少の浮上りを生じ, 又左下の部分に極めて僅かの量ではあるが版は再び沈下を生ずることが分る。而して, (圖-2, 3 省略) に依れば最大浮上りは最大沈下の約 40 分の 1 程度に過ぎない。又 w を w_1 及び w_2 に分けて考へると (圖-6, 7 省略) w_1 は荷重の中心にて w_2 の約 18 倍も影響するが, 版の兩端にては w_2 のみの影響で w_1 は四邊支承せられたる版の撓度であるから當然 0 である。x 一方向の斷面では w_2 は荷重に近い自由邊に於て最大となり，且つ浮上りの影響も w_1 よりは w_2 の方が遙かに大きい事が判る。w_1 と w_2 との曲線は全然異つた形を持つて居る。荷重の中心を通る斷面 IV′ の各點の沈下と之より y 一方向に $b/8$ だけ離れた斷面 IV′w の各點の沈下とを比較するに載荷面積附近に於ては前者は後者の約 2倍に增加してゐる。

M_x は圖-4 に示す如く，荷重附近に於ては常に正, 其の最大値は $-M_x$ の約 3 倍に達してゐる。

M_y は圖-5 に示す如く，荷重附近にて正で最大値は矢張り荷重直下に生ずる。荷重點を遠ざかるに從つて急に減少して其符號を變ずるが, $-M_y$ も $+M_y$ の 1/3 程度が最大である。更に遠ざかると M_y は再び正となる部分

圖-5.



が生ずる。其の最大値は荷重點附近の $_{\max}M_y$ の僅かに 1/80 程度に過ぎぬ。版全體として見渡すと M_y の y 方向の變化は稍々波狀形を呈し版面は二つの ±0 線によつて正負正の三つの部分に分割せられる。

(2)　彈性地盤上の $a=400$ cm，$b=600$ cm の矩形版にて分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/2$，$y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合

この場合に關する計算結果は**表-4** 並に**表-5** 及び**圖-8～14**（**圖-9, 10, 13, 14** 省略）に示す如くである。即ち正の沈下は荷重點を中心として起り四周邊附近には皆浮き上りを生ずる。これは勿論 C, a, b, u, v 等の大小に關聯するものである。又 w を w_1 と w_2 とに分けて見ると（**圖-13, 14** 省略）荷重の中心點にて w_2 の影響は w_1 の約 1/100 程度に過ぎない事が判る。

この事は實用的には w_2 を無視して單に，

$$w=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$

とする事が出來る。此式は第 6 章の (55) 式に外ならないのであつて，荷重の中心が版の中心點と一致し，而かも載荷面積が版面 $a\times b$ に比して小なるときは，近似的に四邊支承邊の版と見做しても大過のないことを意味する。斯る狀態にある道路の鋪裝版の撓度は實用的には上式を適用して計算し得るものと云ふ事が出來る。M_x は

表-4.

弾性地盤上の版　　分布荷重が $x_0/a = \xi_1 = 1/2$, $y_0/b = \eta_1 = 1/2$ に在る場合

$C = 10$ Kg./cm³

$\nu = 1/6$　　$h = 15$ cm.

$a = 400$ cm　$b = 600$ cm.

$E = 210{,}000$ Kg./cm²

$N = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = 60{,}748{,}000$ Kg.-cm.

$\lambda^4 = \dfrac{C}{N} = 0.000000164\ 61$ cm⁻⁴

$p_0 = 1$ Kg./cm²

$2u = 100$ cm.

$2v = 100$ cm

$$E_n' = \frac{\sum_m A'_{mn}\,\frac{1-(-1)^m}{2}\,m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{-a_n\sin\pi q_n - a_n'\sinh\pi p_n} = \frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$$

上式中,

$$p_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}+\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}},\quad q_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$A'_{mn} = \frac{16(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi_1\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1}{\pi^6 mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

$$a_n = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}p_n + 2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 q_n$$

$$a_n' = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}q_n - 2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 p_n$$

$m, n = 1, 3, 5, 7;$

n	p_n	q_n
1	1.8757	1.7553
3	2.4185	1.3598
5	3.4658	0.9489
7	4.7185	0.6967

n	A'_{mn}			
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$
1	+0.000 036 35	−0.000 010 01	+0.000 001 15	−0.000 000 09
3	−0.000 021 59	+0.000 005 69	−0.000 000 81	+0.000 000 03
5	+0.000 006 47	−0.000 002 21	+0.000 000 44	−0.000 000 04
7	−0.000 001 56	+0.000 000 71	−0.000 000 19	+0.000 000 02

n	$A'_{mn}E'$				$\sum_m A'_{mn}E'$
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	
1	+0.000 065 90	−0.000 294 85	+0.000 148 75	−0.000 033 00	−0.000 113 14
3	−0.000 183 20	+0.000 278 89	−0.000 132 52	+0.000 029 64	−0.000 007 25
5	+0.000 138 45	−0.000 134 85	+0.000 100 02	−0.000 023 34	+0.000 020 25
7	−0.000 [illegible] 95	+0.000 104 80	−0.000 061 72	+0.000 015 46	−0.000 005 44

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	$E_n' = \dfrac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$
1	−0.000 113 14	15 130	−0.000 000 007 457 20
3	−0.000 007 25	149 320	−0.000 000 000 048 56
5	+0.000 020 25	10 621 800	+0.000 000 000 001 90
7	−0.000 005 44	1 346 700 000	−0.000 000 000 000 00

表-5. 彈性地盤上の版

分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/2$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合 $a=400$, $b=600$ 單位 kg. cm（表中 p_0 は省略す）

點の位置				w'_1	w'_2	w'	M_x	M_y
$y/b=\eta$		$x/a=\xi$						
I′	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	Iα	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
Iα′	1/8	I	0/4	0.000 000	−0.001 420	−0.001 420	0.000 000	+0.889 880
	〃	Iα	1/8	−0.000 291	−0.000 562	−0.000 853	+4.504 800	−7.999 000
	〃	II	1/4	−0.000 411	−0.000 073	−0.000 484	−0.855 100	−20.704 000
	〃	III	2/4	−0.000 276	+0.000 138	−0.000 138	−0.748 500	−36.773 000
II′	1/4	I	0/4	0.000 000	−0.002 822	−0.002 822	0.000 000	−8.945 400
	〃	Iα	1/8	+0.000 322	−0.001 101	−0.000 779	−2.895 000	−25.607 000
	〃	II	1/4	+0.001 376	−0.000 153	+0.001 222	−10.021 000	−63.205 000
	〃	III	2/4	+0.003 679	+0.000 250	+0.003 930	+17.557 000	−149.600 000
III′	2/4	I	0/4	0.000 000	−0.003 429	−0.003 429	0.000 000	+3.165 700
	〃	Iα	1/8	+0.004 425	−0.001 337	+0.003 088	−83.139 000	+32.406 000
	〃	II	1/4	+0.013 526	−0.000 149	+0.013 376	−129.170 000	+121.790 000
	〃	III	2/4	+0.037 025	+0.000 357	+0.037 382	+571.350 000	+543.750 000

圖-11, M_y は圖-12 に示す。M_x は荷重點附近に於て正號を有し，其最大値は常に荷重の中心に生じ，これより遠ざかるに從つて，急速に減少して $-M_x$ となり，版の四隅附近に於て再び僅少なる $+M_x$ を生ずる。Mして，$-_{\max}M_x$ の最大値は $+_{\max}$ $_x$ の約 1/4 程度である。$+M_y$ も圖12 に示す如く荷重附近に起り，二つの ±0 線の外側には $-M_y$ の部分を生ずる。$-_{\max}M_y$ は $+_{\max}M_y$ の約 1/3 程度である。

圖-8.

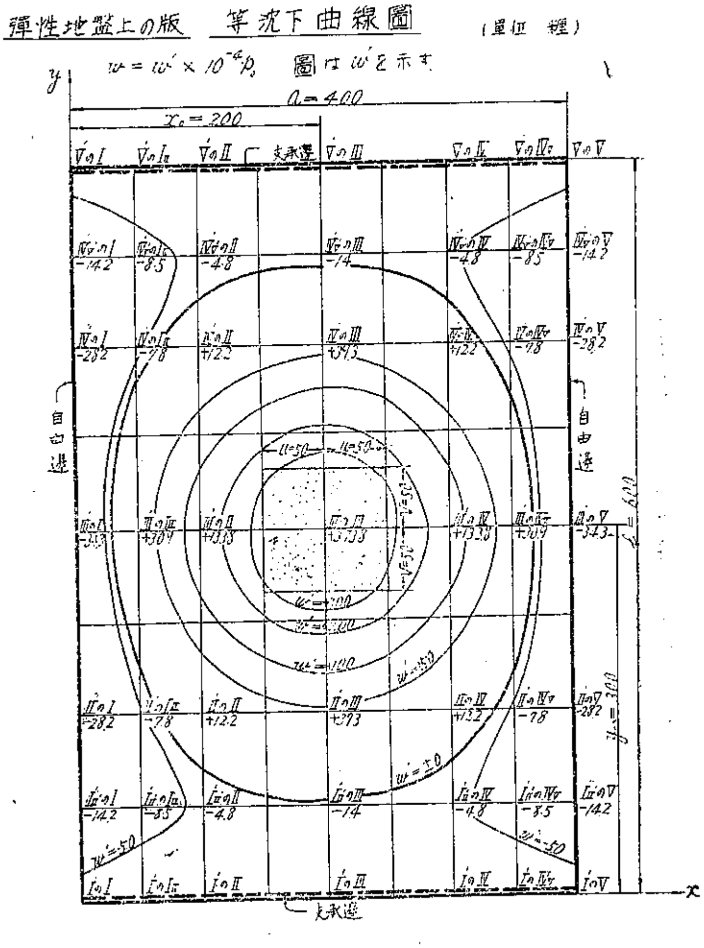


圖-12.

彈性地盤上の版　y方向各斷面 M_y 曲線圖（單位 吨糎）

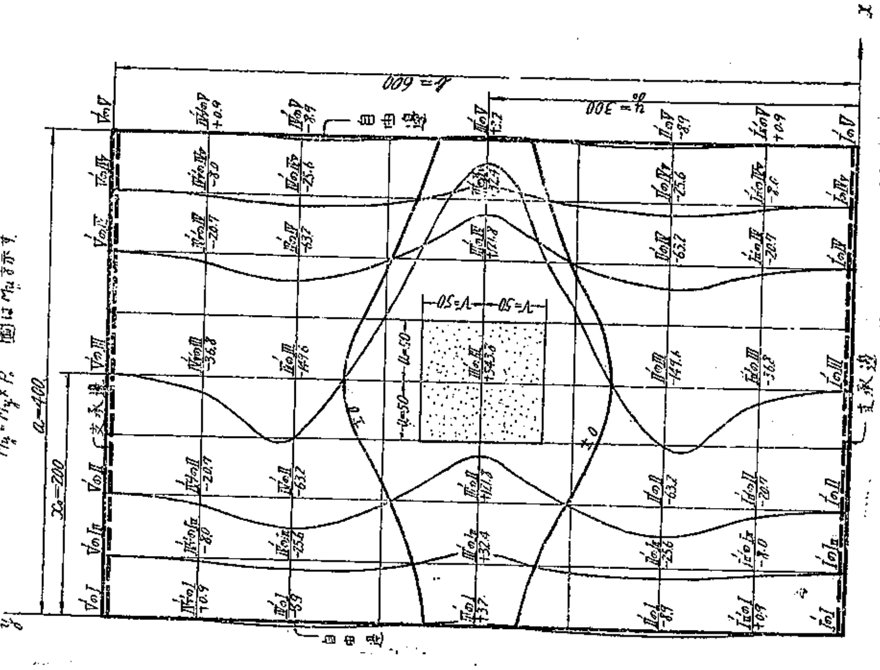


圖-11.

彈性地盤上の版　x方向各斷面 M_x 曲線圖（單位 吨糎）

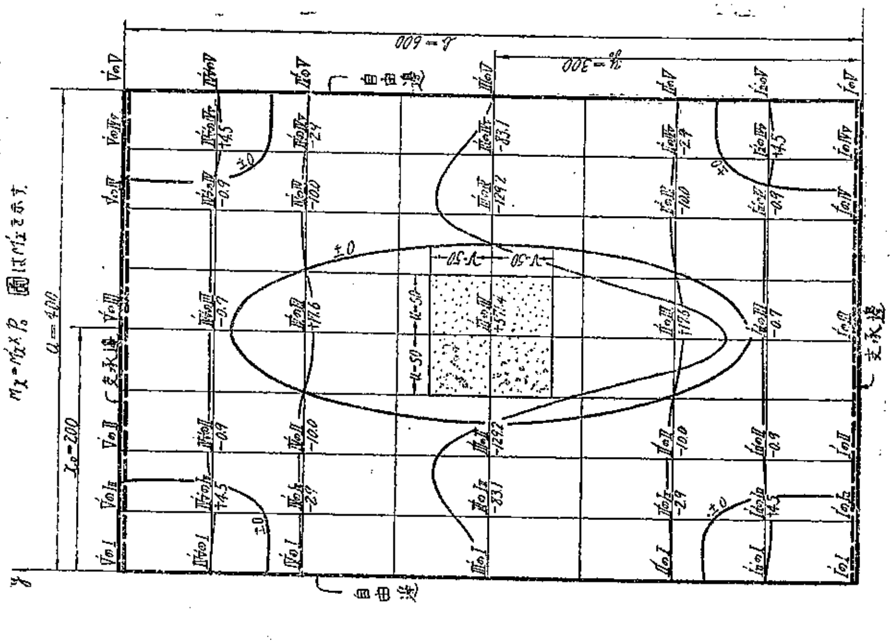


表-6. **彈性地盤上の版** 分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/8$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合（其の一）

$C = 10\ \mathrm{Kg/cm^3}$

$\nu = 1/6$

$h = 15\ \mathrm{cm}$

$a = 400\ \mathrm{cm}$

$b = 600\ \mathrm{cm}$

$E = 210{,}000\ \mathrm{Kg/cm^2}$

$N = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 60{,}748{,}000\ \mathrm{Kg\text{-}cm}$

$\lambda^4 = \dfrac{C}{N} = 0.000\,000\,164\,61\ \mathrm{cm^{-4}}$

$p_0 = 1\ \mathrm{Kg/cm^2}$

$2u = 100\ \mathrm{cm}$

$2v = 100\ \mathrm{cm}$

$$E_n' = \frac{\sum_m A'_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{-a_n\sin\pi q_n - a_n'\sinh\pi p_n} = \frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$$

$$F_n' = \frac{\sum_m A'_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{a_n\sin\pi q_n - a_n'\sinh\pi p_n} = \frac{\sum_m A'_{mn}F'}{Q''}$$

上式中

$$p_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}+\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$q_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$A'_{mn} = \frac{16}{\pi^6 mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}\sin^2 m\pi\xi_0(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta$$

$$a_n = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}p_n+2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 q_n$$

$$a_n' = \left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4\right\}q_n-2(1-\nu)\frac{a^4}{\pi^2 b^2}\lambda^2 n^2 p_n$$

$m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\qquad n = 1, 3, 5, 7$

n	p_n	q_n
1	1.8757	1.7533
3	2.4185	1.3598
5	3.4658	0.9489
7	4.7155	0.696[illegible]

n	A'_{mn}						
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
1	+0.000 013 91	+0.000 017 09	+0.000 009 25	+0.000 003 43	+0.000 001 06	+0.000 000 26	+0.000 000 03
3	−0.000 008 41	−0.000 009 14	−0.000 005 25	−0.000 002 21	−0.000 000 75	−0.000 000 19	−0.000 000 02
5	+0.000 006 47	+0.000 002 95	+0.000 002 04	+0.000 001 05	+0.000 000 40	+0.000 000 11	+0.000 000 01
7	−0.000 000 59	−0.000 000 81	−0.000 000 65	−0.000 000 39	−0.000 000 17	−0.000 000 05	−0.000 000 00

表-7. **彈性地盤上の版**・分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/8$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合（其の二）

n	$A'_{mn}E'$				$\sum_m A'_{mn}E'$
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	
1	+0.000 025 24	+0.000 272 41	+0.000 137 42	+0.000 012 63	+0.000 447 70
3	−0.000 070 12	−0.000 257 64	−0.000 122 43	−0.000 011 34	−0.000 461 54
5	+0.000 052 97	+0.000 180 03	+0.000 092 41	+0.000 008 93	+0.000 334 35
7	−0.000 024 48	−0.000 096 82	−0.000 057 03	−0.000 005 91	−0.000 184 26

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	$E_n' = \frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$
1	+0.000 447 70	15 180	+0.000 000 029 493 00
3	−0.000 461 54	149 320	−0.000 000 003 090 90
5	+0.000 334 35	10 621 000	+0.000 000 000 031 48
7	−0.000 184 26	1 346 700 000	−0.000 000 000 000 13

n	$A'_{mn}F'$			$\sum_m A'_{mn}F'$
	$m=2$	$m=4$	$m=6$	
1	+0.000 164 57	+0.000 230 92	+0.000 057 81	+0.000 453 30
3	−0.000 207 24	−0.000 206 49	−0.000 051 72	−0.000 465 45
5	+0.000 144 25	+0.000 150 24	+0.000 040 04	+0.000 334 54
7	−0.000 071 76	−0.000 087 34	−0.000 025 78	−0.000 184 39

n	$\sum_m A'_{mn}F$	Q''	$F_n = \frac{\sum_m A_{mn}F}{Q''}$
1	+0.000 453 30	15 282	+0.000 000 029 662 00
3	−0.000 465 45	149 360	−0.000 000 003 116 30
5	+0.000 334 54	10 621 000	+0.000 000 000 031 49
7	−0.000 184 39	1 346 700 000	−0.000 000 000 000 13

表-8. 彈性地盤上の版

分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/8$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合 $a=400$, $b=600$ 單位瓩・糎

表中 p_0 は省略す

點の位置				w_1	w_2	w	M_x	M_y
	$y/b=\eta$		$x/a=\xi$					
I	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
$\mathrm{I_{II}}$	1/8	I	0/4	0.000 000	−0.000 509	−0.000 509	0.000 000	−64.591 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	+0.000 254	−0.000 972	−0.000 718	−8.722 200	−54.490 000
	〃	II	1/4	+0.000 189	−0.001 094	−0.000 905	−10.494 000	−38.093 000
	〃	III	2/4	−0.000 291	−0.000 473	−0.000 765	−3.668 500	−8.769 500
	〃	IV	3/4	−0.000 242	−0.000 021	−0.000 264	+1.578 900	+0.655 110
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	−0.000 119	+0.000 045	−0.000 073	+1.020 900	+1.020 300
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.000 082	+0.000 082	0.000 000	+1.019 100
II	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.006 049	+0.006 049	0.000 000	−220.200 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	+0.002 545	+0.001 854	+0.004 400	−27.482 000	−193.540 000
	〃	II	1/4	+0.003 023	−0.000 810	+0.002 212	−29.512 000	−135.080 000
	〃	III	2/4	+0.000 322	−0.000 986	−0.000 664	−25.923 000	−27.863 000
	〃	IV	3/4	−0.000 431	−0.000 111	−0.000 543	−1.160 600	−1.641 900
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	−0.000 243	+0.000 028	−0.000 215	+1.164 700	+0.379 670
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.000 779	+0.000 077	0.000 000	+0.658 930
III	2/4	I	0/4	0.000 000	+0.052 579	+0.052 579	0.000 000	+581.730 000
	〃	$\mathrm{I_{II}}$	1/8	+0.023 858	+0.020 952	+0.044 810	+352.380 000	+583.940 000
	〃	II	1/4	+0.024 331	+0.004 647	+0.028 978	+77.537 000	+357.790 000
	〃	III	2/4	+0.004 425	−0.001 418	+0.005 007	−135.100 000	+21.272 000
	〃	IV	3/4	−0.000 421	−0.000 297	−0.000 718	−16.245 000	−2.795 800
	〃	$\mathrm{IV_V}$	7/8	−0.000 359	−0.000 075	−0.000 435	−1.801 600	−1.747 100
	〃	V	4/4	0.000 000	−0.000 047	−0.000 047	0.000 000	−1.176 300

(3) 彈性地盤上の $a=400$ cm, $b=600$ cm の矩形版にて分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/8, y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合

表-6〜8 及び**圖-15〜21**（**圖-16, 17, 20, 21** 省略）はこの場合の計算結果である。この場合の最大沈下は中心線（$y=b/2$）の荷重側の先端に生じ，前例同樣に w の大さは荷重點を遠ざかるに從つて，急激に減少し，版の隅角 $(a, o), (a, b)$ 附近を除き其他の部分には僅少なる浮上りを生ずる。

圖-15 に見る如く沈下の等高線は荷重點を中心として略々同心圓の形を取る。而して其の最大浮上りは最大沈下値の約 1/50 に過ぎぬ。

圖-18, 19 は夫々 M_x 及び N_y の圖表であるが $+M$ の區域が非常に狹く，$-M$ の部分が相當區域に擴大され，その最大値は $+M$ の最大値の約 40% 程度のものが惹起する。道路の矩形舗裝版に於て其の荷重が版の自由邊附近に作用し，而も版隅より相當距離に在る場合には近似的に前記各公式を適用し得るものである。

(4) 彈性地盤上の $a=400$ cm, $b=600$ cm の矩形版にて版全面に等分布荷重が在る場合

表-9, 10, 圖-22〜26（**圖-23, 24** 省略）はこの場合のものを示す。版の沈下は $\eta=1/4$ 線と $\eta=3/4$ 線間の各點に於て殆んど等しく $\eta=1/2$ 線卽ち版の中央にて特に大とはならずに寧ろ僅少の差ではあるが小さくなつてゐ

圖-18.

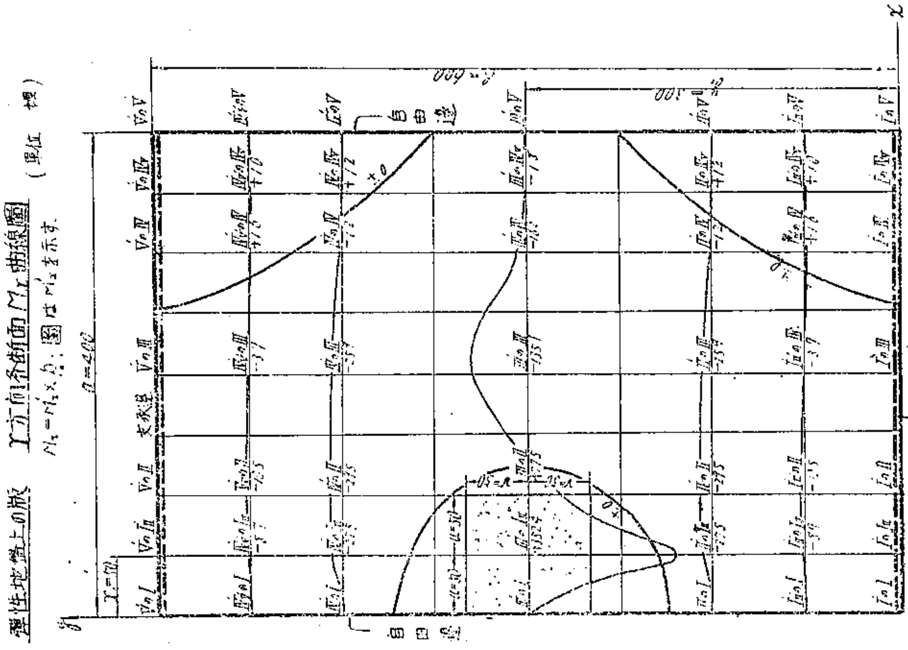


圖-15.

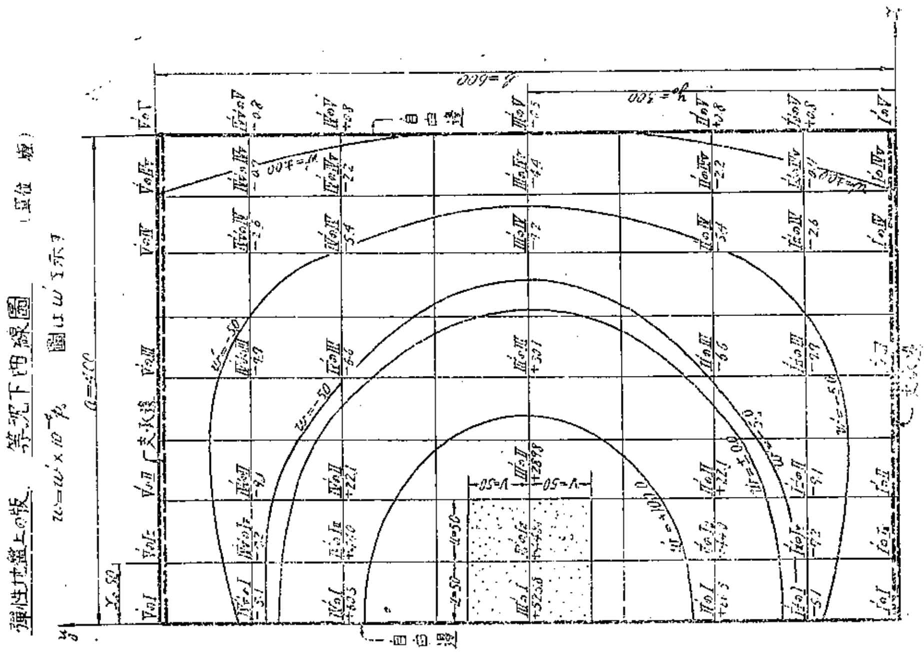


圖-22.

彈性地盤上の版 等沈下曲線圖 (單位 糎)

$w = w' \times 10^{-2} p_0$; 圖は w' を示す

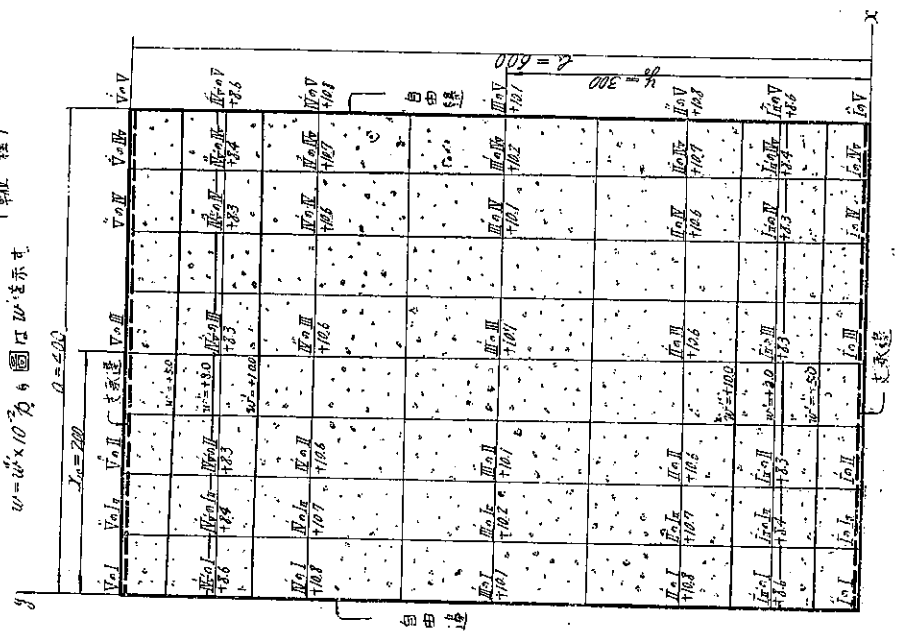


圖-19.

彈性地盤上の版 y 方向各斷面 M_y 曲線圖 (單位 糎)

$M_y = M'_y \times p_0$ 圖は M'_y を示す

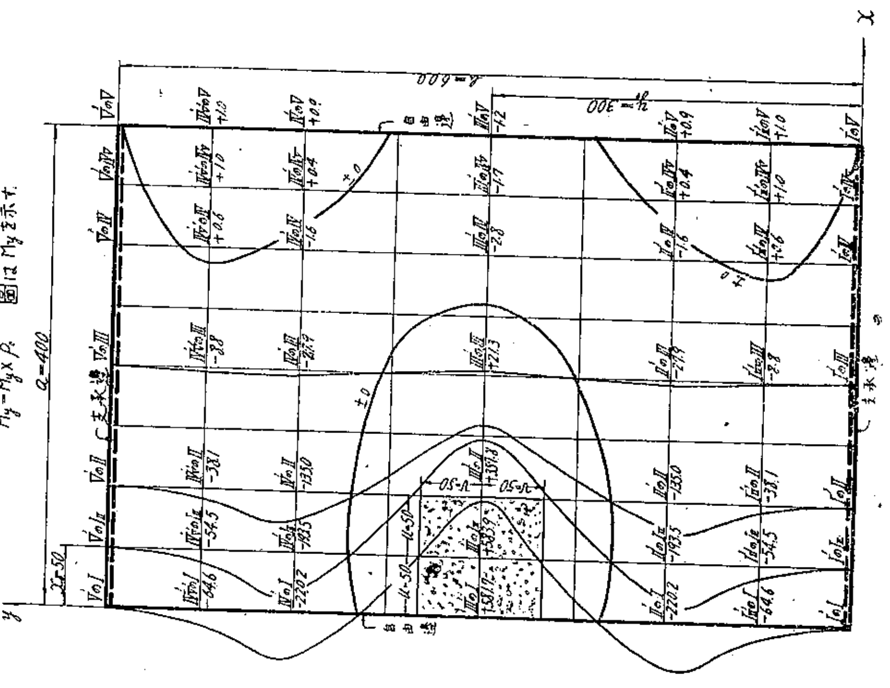


表-9.

彈性地盤上の版.

$$C = 10\ \mathrm{kg/cm^3}$$
$$\nu = 1/6 \qquad h = 15\,\mathrm{cm}$$
$$a = 400\,\mathrm{cm} \qquad b = 600\,\mathrm{cm}$$
$$E = 210.000\ \mathrm{kg/cm^2}$$
$$N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = 60.748.000\ \mathrm{kg\text{-}cm}$$
$$\lambda^4 = \frac{C}{N} = 0.000\,000\,164\,61\ \mathrm{cm^{-4}}$$
$$p_0 = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$$
$$2u = 400\ \mathrm{cm}$$
$$2v = 600\ \mathrm{cm}$$

n	p_n	q_n
1	1.8757	1.7533
3	2.4185	1.3598
5	3.4658	0.9489
7	4.7185	0.6967

版全面に分布荷重が在る場合.

$$E_n' = \frac{\sum_m A_{mn}' \frac{1-(-1)^m}{2} m \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2}{b^2} n^2 \right\}}{-a_n \sin \pi q_n - a_n' \sinh \pi p_n} = \frac{\sum_m A_{mn}' E'}{Q'}$$

$$A_{mn}' = \frac{16}{\pi^6 m n \left\{ \left(m^2 + \frac{a^2 n^2}{b^2}\right)^2 + \frac{a^4 \lambda^4}{\pi^4} \right\}}$$

$$p_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4} n^4 + \frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4} + \frac{a^2}{b^2} n^2}{2}} \qquad q_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4} n^4 + \frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4} - \frac{a^2}{b^2} n^2}{2}}$$

$$a_n = \left\{ (1-\nu)^2 \frac{a^4}{b^4} n^4 - \frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4 \right\} p_n + 2(1-\nu) \frac{a^4}{\pi^2 b^2} \lambda^2 n^2 q_n$$

$$a_n' = \left\{ (1-\nu)^2 \frac{a^4}{b^4} n^4 - \frac{a^4}{\pi^4}\lambda^4 \right\} q_n - 2(1-\nu) \frac{a^4}{\pi^2 b^2} \lambda^2 n^2 p_n$$

$m = 1, 3, 5, 7, \cdots\cdots \infty$;
$n = 1, 3, 5, 7, \cdots\cdots 23$; (但し本表には $m, n = 1, 3, 5, 7$; に就て記す)

n	A_{mn}' $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$
1	0.000 367 01	0.000 041 68	0.000 004 81	0.000 000 95
3	0.000 081 26	0.000 008 71	0.000 001 25	0.000 000 27
5	0.000 017 52	0.000 006 47	0.000 000 49	0.000 000 13
7	0.000 004 22	0.000 000 80	0.000 000 21	0.000 000 06

n	$A_{mn}'E'$ $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$\sum_m A_{mn}'E'$
1	0.000 666 05	0.001 233 10	0.000 622 08	0.000 333 23	0.002 854 50
3	0.000 677 22	0.000 426 86	0.000 202 85	0.000 109 56	0.001 416 50
5	0.000 374 49	0.000 218 35	0.000 112 08	0.000 063 14	0.000 768 07
7	0.000 173 10	0.000 117 44	-0.000 069 17	0.000 041 84	0.000 401 55

n	$\sum_m A_{mn}'E'$	Q'	$E_n' = \frac{\sum_m A_{mn}'E'}{Q'}$
1	0.002 854 50	15 180	0.000 000 188 040 00
3	0.001 416 50	149 320	0.000 000 009 486 10
5	0.000 768 07	10 621 000	0.000 000 000 072 31
7	0.000 401 55	1 346 700 000	0.000 000 000 000 29

圖-26.

彈性地盤上の版 y方向各斷面 M_y曲線圖 (單位 吨種)

$M_y = M'_y \times p_0$ 圖はM'_yを示す

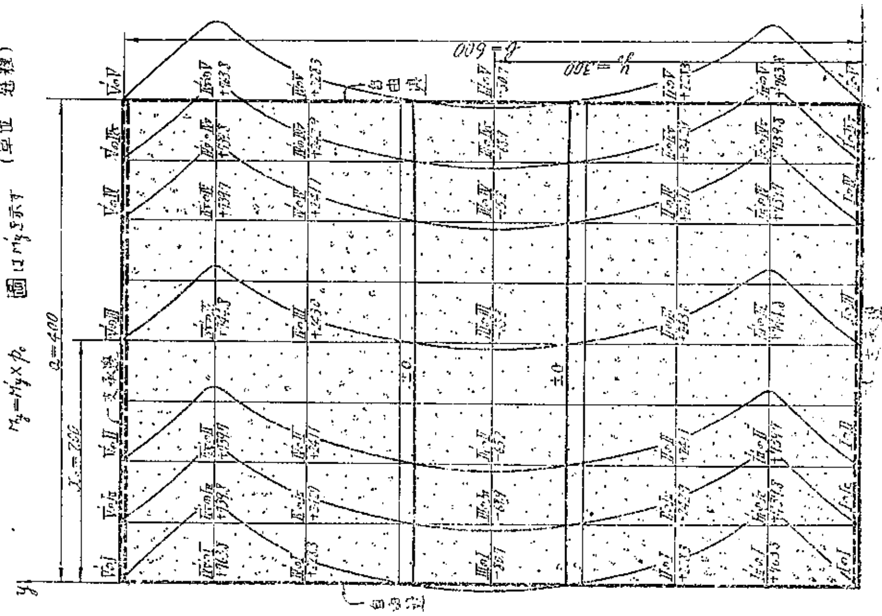


圖-25.

彈性地盤上の版 x方向各斷面 M_x曲線圖 (單位 吨種)

$M_x = M'_x \times p_0$ 圖はM'_xを示す

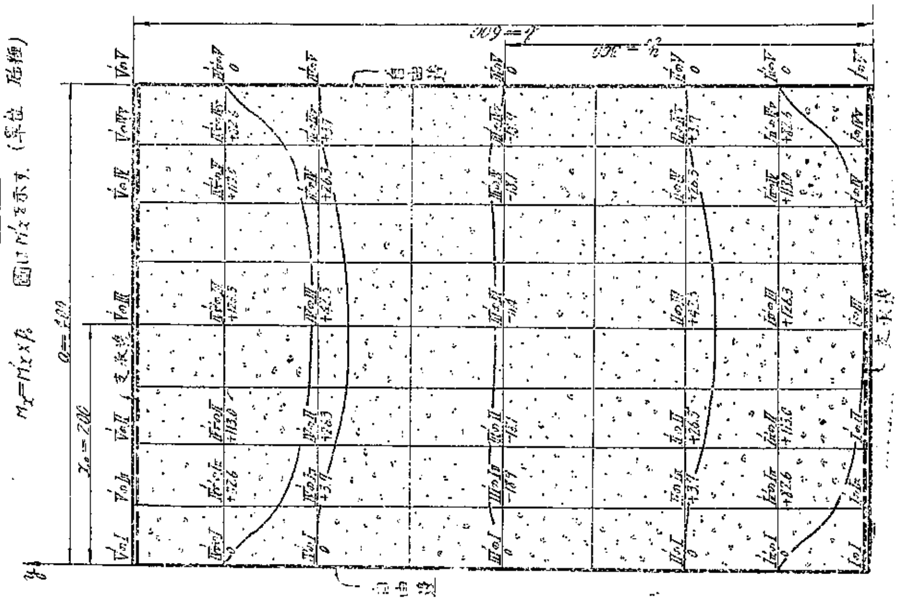


表-10.　彈性地盤上の版

版全面に分布荷重が在る場合，$a=400$，$b=600$，單位瓩・糎（表中 p_0 は省略す）

點の位置				w_1	w_2	w	M_x	M_y
$y/b=\eta$		$x/a=\xi$						
Ⅰ'	0/4	Ⅰ	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	ⅠⅡ	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	Ⅱ	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	Ⅲ	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
Ⅰ'Ⅱ'	1/8	Ⅰ	0/4	0.000 000	+0.085 851	+0.035 851	0.000 000	+763.760 000
	〃	ⅠⅡ	1/8	+0.049 107	+0.034 450	+0.083 556	+82.637 000	+739.820 000
	〃	Ⅱ	1/4	+0.075 889	+0.007 215	+0.083 104	+113.000 000	+739.690 000
	〃	Ⅲ	2/4	+0.087 941	-0.004 745	+0.083 195	+126.300 000	+744.750 000
Ⅱ'	1/4	Ⅰ	0/4	0.000 000	+0.107 790	+0.107 790	0.000 000	+228.260 000
	〃	ⅠⅡ	1/8	+0.063 487	+0.043 307	+0.106 790	+3.744 900	+242.850 000
	〃	Ⅱ	1/4	+0.098 934	+0.007 003	+0.105 940	+26.302 000	+241.070 000
	〃	Ⅲ	2/4	+0.114 730	-0.008 827	+0.105 910	+42.304 000	+242.980 000
Ⅲ'	2/4	Ⅰ	0/4	0.000 000	+0.101 200	+0.101 200	0.000 000	-80.693 000
	〃	ⅠⅡ	1/8	+0.063 597	+0.038 104	+0.101 700	-18.934 000	-68.937 000
	〃	Ⅱ	1/4	+0.098 522	+0.002 611	+0.101 130	-13.086 000	-65.206 000
	〃	Ⅲ	2/4	+0.113 040	-0.011 994	+0.101 040	-11.444 000	-63.294 000

る（圖-22）。M_x は M_y に比較するとその約 17％ のものが惹起され $\eta=1/2$ 線附近は負號を有し，$\eta=1/8$ 線附近にて大きく $\xi=1/2$ 線との交點（I′II′ の III）が最大である（圖-25）。

M_y は $\eta=1/8$ 線と $\xi=1/2$ 線との交點（I′II′ の III）にて最大で且つ $\xi=1/2$ 線上の各點のものが他の點のものより稍々大きい。$\eta=1/2$ 線附近にては負號を有するが $+M_{y\max}$ の 10％ にも達せぬ値である（圖-26）。

[II]　同上正方形版に就て

之は省略するが，矩形板の場合と大體同様である（圖-27～46，表-11～20 省略）。

[III]　平版橋に就て

(A)　計算説明

この場合に採用した數値は

$$a=750\ \mathrm{cm}\ ,\qquad b=500\ \mathrm{cm}\ ,\qquad h=40\ \mathrm{cm}\ ,\qquad N=1\,152\,000\,000\ \mathrm{kg\cdot cm}$$

でコンクリート版である。

平版橋の場合に於ても荷重が任意の點に在るとき，及び $\eta=1/2$ 線上に在るときの w, M は，彈性基礎上の版と同様に m, n を 1 より 8 迄採つた計算値①のみを採用しても實用上は支障無いものと云へる。

荷重が任意の點例へば荷重の中心が $\xi=3/4$，$\eta=3/4$ 點上にあるとき $\xi=3/4$ 線上の荷重の中心點の w, M は

		比率
w の ①$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=1}^{8}$ {公式}	$=194.18\,(10^{-4}p_0)$	94.42 %
w の ②$=\sum\limits_{m=1}^{8}\sum\limits_{n=9}^{16}$ { 〃 }	$=\ \ 0.11$ (〃)	0.05 %
w の ③$=\sum\limits_{m=9}^{16}\sum\limits_{n=1}^{8}$ { 〃 }	$=11.27$ (〃)	5.48 %
w の ⑤$=\sum\limits_{m=17}^{24}\sum\limits_{n=1}^{8}$ { 〃 }	$=\ \ 0.10$ (〃)	0.05 %
計	205.66 (〃)	100.00 %

		比率
M_x の ①	$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}\{\text{公式}\}=920.72\,p_0$	95.17 %
M_x の ②	$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=9}^{16}\{\ 〃\ \}=9.90\,p_0$	1.02 %
M_x の ③	$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=1}^{8}\{\ 〃\ \}=60.74\,p_0$	6.28 %
M_x の ⑤	$=\sum_{m=17}^{24}\sum_{n=1}^{8}\{\ 〃\ \}=-23.87\,p_0$	−2.47 %
計	$967.49\,p_0$	100.00 %

		比率
M_y の ①	$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}\{\text{公式}\}=1\,717.20\,p_0$	90.78 %
M_y の ②	$=\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=9}^{16}\{\ 〃\ \}=47.27\,p_0$	2.50 %
M_y の ③	$=\sum_{m=9}^{16}\sum_{n=1}^{8}\{\ 〃\ \}=132.38\,p_0$	7.00 %
M_y の ⑤	$=\sum_{m=17}^{24}\sum_{n=1}^{8}\{\ 〃\ \}=-5.35\,p_0$	−0.28 %
計	$1\,891.50\,p_0$	100.00 %

となるから①のみでも充分であるが，特に③を加へるとより正確に近いものが得られる。圖面はこの①の數値により作圖したものである。

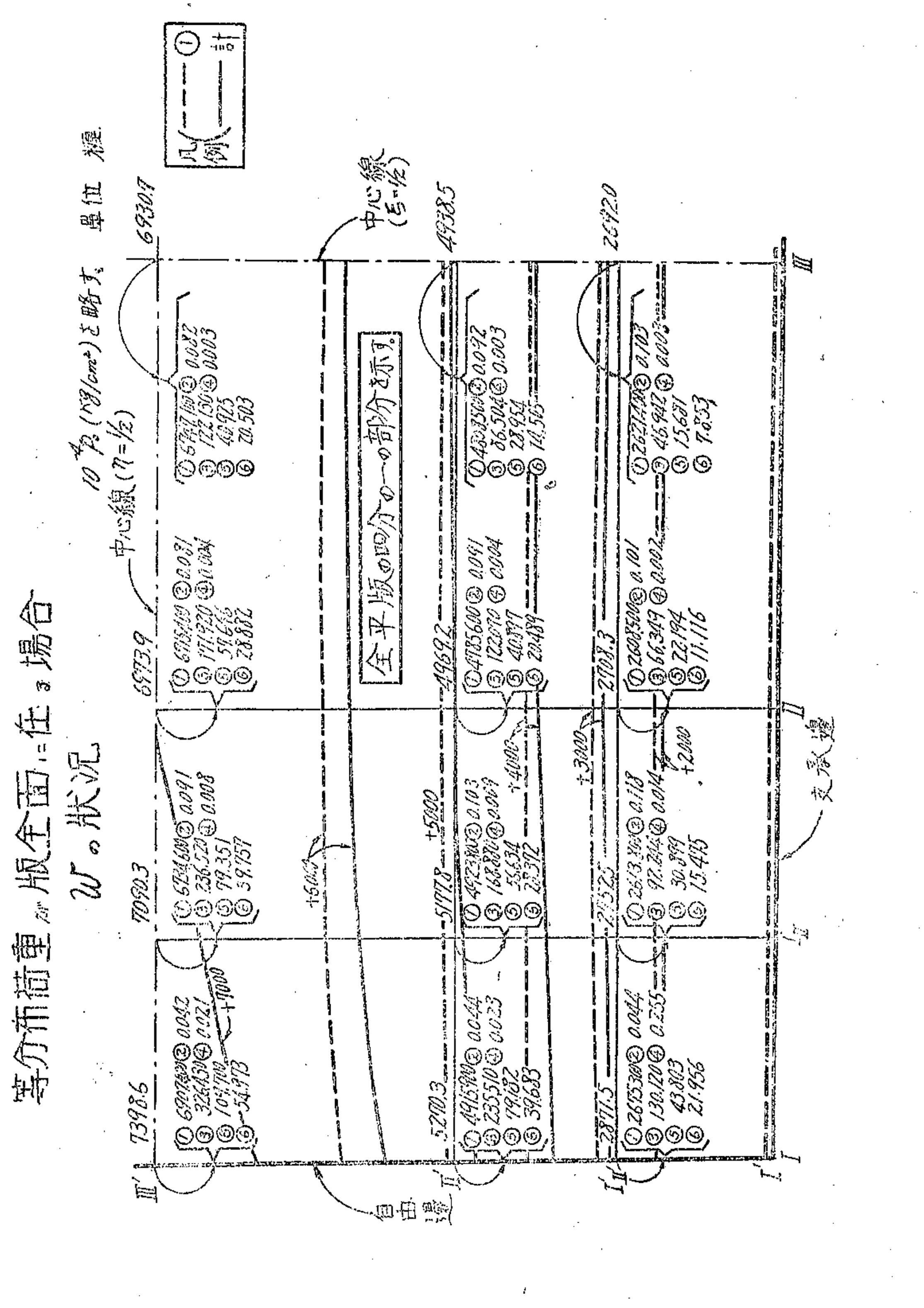
荷重の中心と版の中心と一致する場合

荷重の中心點にて

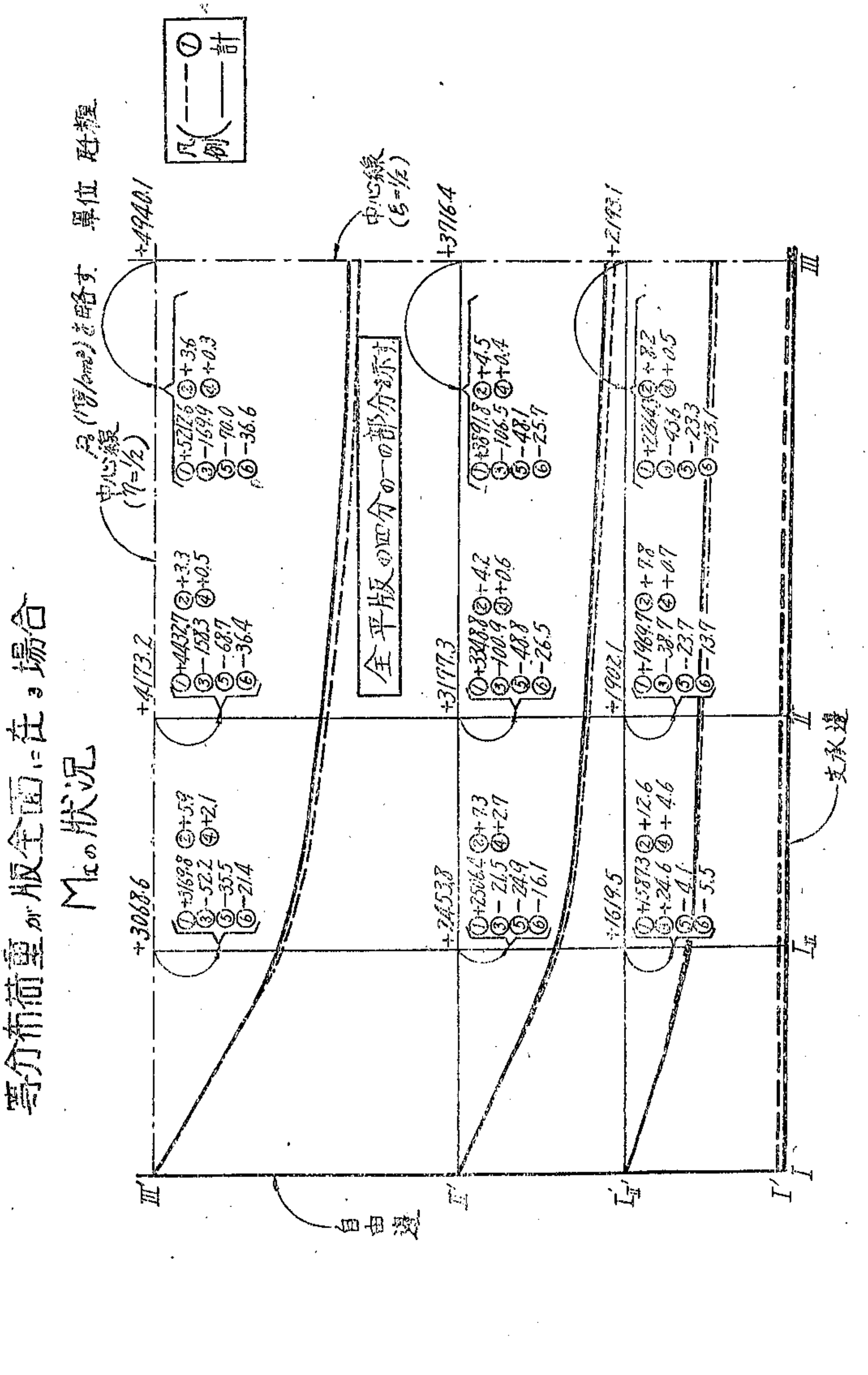
		比率
w の ①	$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}\{\text{公式}\}=275.32\,(10^{-4}p_0)$	97.71 %
w の ②	$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=0.11\,(\ 〃\ )$	0.04 %
w の ③	$=\sum_{m=9}^{15}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=7.50\,(\ 〃\ )$	2.66 %
w の ⑤	$=\sum_{m=17}^{23}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.22\,(\ 〃\ )$	−0.08 %
w の ⑥	$=\sum_{m=25}^{31}\sum_{n=1}^{7}\{\ 〃\ \}=-0.92\,(\ 〃\ )$	−0.33 %
計	$281.79\,(\ 〃\ )$	100.00 %

		比率
M_x の ①	$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{7}\{\text{公式}\}=1\,181.30\,p_0$	95.37 %
M_x の ②	$=\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=9}^{15}\{\ 〃\ \}=11.03\,p_0$	0.89 %

圖表-5.


等分布荷重ガ版全面ニ在ル場合
wノ状況
中心線(η=1/2)
中心線(ξ=1/2)
全平版ノ四分ノ一ノ部分ヲ示ス。
凡例
計
單位 糎
自由邊
支承邊

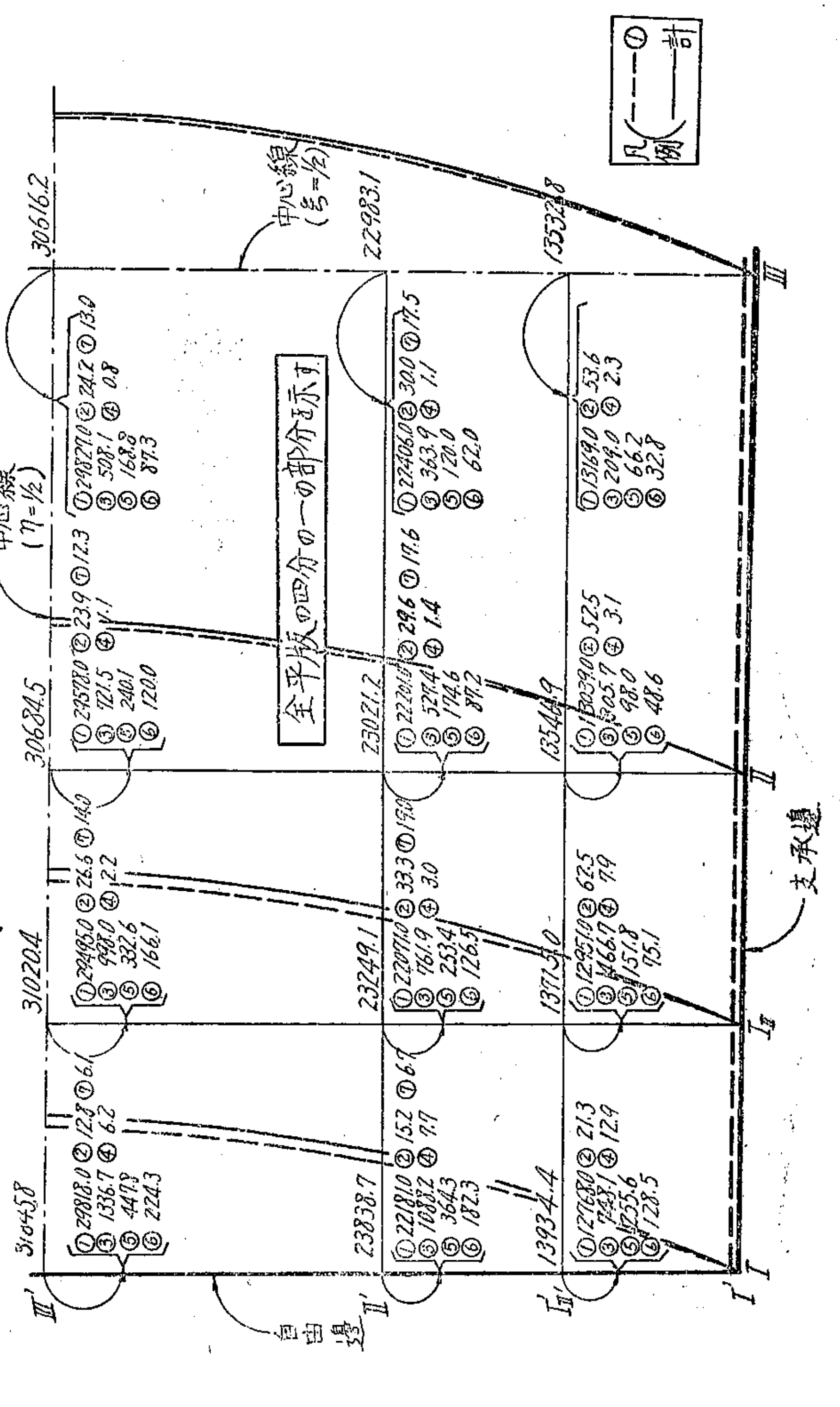
圖表-6.


等分布荷重が版全面に在る場合
M_xの狀況
凡例 ―――① ――計
中心線 ($\xi=1/2$)
中心線 ($\eta=1/2$)
全平版の四分の一の部分を示す
自由邊
支承邊
+3068.6
+4173.2
+4940.1
+2453.8
+3177.3
+3716.4
+1619.5
+1902.1
+2193.1

圖表-7.

等分布荷重が版全面に在る場合

M_yの状況



$$M_x \text{ の ③} = \sum_{m=9}^{15} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = \quad 71.68\,p_0 \qquad 5.79\,\%$$

$$M_x \text{ の ⑤} = \sum_{m=17}^{23} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = -22.82\,p_0 \qquad -1.84\,\%$$

$$M_x \text{ の ⑥} = \sum_{m=25}^{31} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = -\ 2.55\,p_0 \qquad -0.21\,\%$$

計　$1\,238.64\,p_0$　100.00 %

比率

$$M_y \text{ の ①} = \sum_{m=1}^{7} \sum_{n=1}^{7} \{\text{公式}\} = 1\,878.90\,p_0 \qquad 94.77\,\%$$

$$M_y \text{ の ②} = \sum_{m=1}^{7} \sum_{n=9}^{15} \{\ \text{〃}\ \} = \quad 47.75\,p_0 \qquad 2.41\,\%$$

$$M_y \text{ の ③} = \sum_{m=9}^{15} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = \quad 62.97\,p_0 \qquad 3.18\,\%$$

$$M_y \text{ の ⑤} = \sum_{m=17}^{23} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = \ -5.88\,p_0 \qquad -0.30\,\%$$

$$M_y \text{ の ⑥} = \sum_{m=25}^{31} \sum_{n=1}^{7} \{\ \text{〃}\ \} = \ -1.16\,p_0 \qquad -0.06\,\%$$

計　$1\,982.58\,p_0$　100.00 %

この場合も w に就ては①の計算値即ち m, n 共 1 より 7 迄のもので差支へないが，M_x と M_y は①の計算値に更に②③の値を加へると，より正確に近いものが得られる。作圖は①の數値に據つたものである。

以上の圖表-5～7 に依り等分布荷重が版全面にあるときは m の方向にその w も M も收斂が緩慢である事が知られる。

$\eta=1/2$ 線上の各點の沈下は殆んど等しい。又 $\eta=1/4$ 線上にても同様である。たゞ $\xi=0$ 線即ち版の緣に於て僅少ではあるが大きくなつてゐる。この緣の w は，w の一般式にて $\xi=0$ と置くと，

$$\sin m\pi\xi=0$$
$$f(x)=0$$
$$\phi(x)=\cosh\frac{an\pi}{b}+1$$

を得るから

$$w=\sum_n E_n\cdot\frac{2}{1-\nu}\left(\cosh\frac{an\pi}{b}+1\right)\sin n\pi\eta$$

なる簡單な式となる。

この式にて n は 1 より 7 まで m は 1 より 23 まで，即ち前圖表の①,③,⑤を計算し，これをその點の沈下値と見做しても實用上は充分である。然し作圖は前表の數値即ち m は 1 より 31 迄，n は 1 より 15 迄採りしもので畫いたものである。

M_x は M_y に比し其値僅少ではあるが惹起される。その內で $\eta=1/2$ 線上のものが最大である。そして實用上は m, n を 1 より 7 まで採用せし計算値①のみで充分であるが，製圖は前表に依つたものである。

M_y は $\eta=1/4$ 線上の各點にて殆んど相等しい値である。又 $\eta=1/2$ 線上の各點にても同様であるが，版の緣にて僅かではあるが大きくなつてゐる。

表-21. 平版橋

分布荷重が $x_0/a=\xi_0=3/4$, $y_0/b=\eta_0=3/4$ 在る場合（單位 瓩糎）其の一

$$\nu = 1/6$$
$$h = 40\ cm.$$
$$a = 750\ cm.$$
$$b = 500\ cm.$$
$$E = 210{,}000\ ^{kg}/_{cm^2}$$
$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 1{,}152{,}000{,}000\ kg\ cm.$$
$$p_0 = 1\ ^{kg}/_{cm^2}$$
$$2u = 102\ cm.$$
$$2v = 70\ cm.$$

$$E_n' = \frac{\sum_m A'_{mn} \frac{1-(-1)^m}{2} m \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2} \right\}}{\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{ (3+\nu)\sinh\frac{an\pi}{b} - (1-\nu)\frac{\pi a n}{b} \right\}} = \frac{\sum_m A'_{mn} E'}{Q'}$$

$$F_n' = \frac{\sum_m A'_{mn} \frac{1+(-1)^m}{2} m \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2} \right\}}{\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{ (3+\nu)\sinh\frac{an\pi}{b} + (1-\nu)\frac{\pi a n}{b} \right\}} = \frac{\sum_m A'_{mn} F'}{Q''}$$

$$A'_{mn} = \frac{16}{\pi^6 mn\left(m^2 + \frac{a^2n^2}{b^2}\right)^2} \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$$

n	A'_{mn}						
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
1	+0.000 036 43	−0.000 013 61	+0.000 002 85	0.000 000 00	−0.000 000 42	+0.000 000 28	−0.000 000 09
2	−0.000 005 31	+0.000 004 34	−0.000 001 54	0.000 000 00	+0.000 000 37	−0.000 000 27	+0.000 000 10
3	+0.000 000 79	−0.000 000 84	+0.000 000 39	0.000 000 00	−0.000 000 14	+0.000 000 12	−0.000 000 05
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	−0.000 000 09	+0.000 000 11	−0.000 000 06	0.000 000 00	+0.000 000 03	−0.000 000 03	+0.000 000 01
6	+0.000 000 05	−0.000 000 07	+0.000 000 04	0.000 000 00	−0.000 000 02	+0.000 000 03	−0.000 000 01
7	−0.000 000 02	+0.000 000 02	−0.000 000 01	0.000 000 00	+0.000 000 01	−0.000 000 01	+0.000 000 00

表-22. 平版橋

分布荷重が $x_0/a=\xi_0=3/4$, $y_0/b=\eta_0=3/4$ に在る場合，(單位 瓩糎) 其の二

n	$A'_{mn}E'$ $m=1$	$A'_{mn}E'$ $m=3$	$A'_{mn}E'$ $m=5$	$A'_{mn}E'$ $m=7$	$\sum_m A'_{mn}E'$
1	+0.000 186 73	+0.000 112 56	-0.000 062 39	-0.000 036 [illegible]	+0.000 200 29
2	-0.000 092 95	-0.000 117 90	+0.000 078 81	+0.000 048 64	-0.000 083 39
3	+0.000 030 43	+0.000 054 79	-0.000 045 20	-0.000 030 44	+0.000 009 58
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	-0.000 009 98	-0.000 023 34	+0.000 025 22	+0.000 020 30	+0.000 012 19
6	+0.000 008 95	+0.000 022 08	-0.000 025 70	-0.000 022 13	-0.000 016 80
7	-0.000 004 13	-0.000 010 54	+0.000 012 92	+0.000 011 73	+0.000 009 97

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	$E'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$
1	+0.000 200 29	581	+0.000 000 344 370 000
2	-0.000 083 39	530046	-0.000 000 000 157 330
3	+0.000 009 58	214 360 000	+0.000 000 000 000 044
4	0.000 000 00	55 260 000 000	0.000 000 000 000 000
5	+0.000 012 19	12 797 000 000 000	+0.000 000 000 000 000
6	-0.000 016 80	2 455 400 000 000 000	-0.000 000 000 000 000
7	+0.000 009 97	390 210 000 000 000 000	+0.000 000 000 000 000

n	$A'_{mn}F'$ $m=2$	$A'_{mn}F'$ $m=4$	$A'_{mn}F'$ $m=6$	$\sum_m A'_{mn}F'$
1	-0.000 221 26	0.000 000 00	+0.000 067 48	-0.000 153 78
2	+0.000 178 04	0.000 000 00	-0.000 088 05	+0.000 090 03
3	-0.000 069 67	0.000 000 00	+0.000 053 26	-0.000 016 41
4	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00
5	+0.000 025 64	0.000 000 00	-0.000 032 86	-0.000 007 22
6	-0.000 023 49	0.000 000 00	+0.000 034 71	+0.000 011 21
7	+0.000 010 99	0.000 000 00	-0.000 017 93	-0.000 006 93

n	$\sum_m A'_{mn}F'$	Q''	$F'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}F'}{Q''}$
1	-0.000 153 78	608	-0.000 000 252 880 000
2	+0.000 090 03	530440	+0.000 000 000 169 730
3	-0.000 016 41	214 360 000	-0.000 000 000 000 076
4	0.000 000 00	55 260 000 000	0.000 000 000 000 000
5	-0.000 007 22	12 797 000 000 000	-0.000 000 000 000 000
6	+0.000 011 21	2 455 400 000 000 000	+0.000 000 000 000 000
7	-0.000 006 93	390 210 000 000 000 000	-0.000 000 000 000 000

表-23.

平版橋 分布荷重が $x/a=\xi_0=3/4$, $y/b=\eta_0=3/4$ に在る場合 $a=750$ $b=500$ 單位瓩糎

點の位置 $y/b=\eta$		$x/a=\xi$		w_1	w_2	w	M_x	M_y
I′	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	I_II	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV_V	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
I′_II	1/8	I	0/4	0.000 000	+0.001 457	+0.001 457	0.000 000	+65183 000
	〃	I_II	1/8	+0.000 670	+0.001 237	+0.001 908	-15923 000	+77777 000
	〃	II	1/4	+0.001 392	+0.001 186	+0.002 579	-19832 000	+97633 000
	〃	III	2/4	+0.002 891	+0.001 792	+0.004 684	+21990 000	+143530 000
	〃	IV	3/4	+0.002 963	+0.003 767	+0.006 730	+84701 000	+142160 000
	〃	IV_V	7/8	+0.001 778	+0.005 431	+0.007 209	+56700 000	+201160 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.007 522	+0.007 522	0.000 000	+229350 000
II′	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.002 690	+0.002 690	0.000 000	+121570 000
	〃	I_II	1/8	+0.001 253	+0.002 285	+0.003 538	-30992 000	+146240 000
	〃	II	1/4	+0.002 617	+0.002 191	+0.004 808	-39819 000	+136740 000
	〃	III	2/4	+0.005 557	+0.003 322	+0.008 879	+39060 000	+287420 000
	〃	IV	3/4	+0.005 868	+0.007 033	+0.012 902	+119850 000	+350620 000
	〃	IV_V	7/8	+0.003 545	+0.010 204	+0.013 749	+117330 000	+409170 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.014 242	+0.014 242	0.000 000	+467100 000
III′	2/4	I	0/4	0.000 000	+0.003 767	+0.003 767	0.000 000	+173560 000
	〃	I_II	1/8	+0.001 844	+0.003 211	+0.005 055	-50199 000	+216660 000
	〃	II	1/4	+0.003 913	+0.003 094	+0.007 007	-73614 000	+246660 000
	〃	III	2/4	+0.009 044	+0.004 746	+0.013 791	+26062 000	+531910 000
	〃	IV	3/4	+0.010 948	+0.010 293	+0.021 242	+477430 000	+780810 000
	〃	IV_V	7/8	+0.006 716	+0.015 263	+0.021 980	+247580 000	+855880 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.021 921	+0.021 921	0.000 000	+952030 000
IV′	3/4	I	0/4	0.000 000	+0.002 586	+0.002 586	0.000 000	+98657 000
	〃	I_II	1/8	+0.001 358	+0.002 241	+0.003 600	-37411 000	+155930 000
	〃	II	1/4	+0.002 927	+0.002 181	+0.005 109	-68923 000	+234460 000
	〃	III	2/4	+0.007 477	+0.003 390	+0.010 868	-55907 000	+624990 000
	〃	IV	3/4	+0.011 378	+0.007 535	+0.018 913	+940330 000	+1,708300 000
	〃	IV_V	7/8	+0.006 843	+0.011 431	+0.018 274	+255560 000	+1281300 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.016 900	+0.016 900	0.000 000	+915410 000
IV′_V	7/8	I	0/4	0.000 000	+0.001 388	+0.001 388	0.000 000	+56168 000
	〃	I_II	1/8	+0.000 744	+0.001 207	+0.001 951	-21002 000	+84690 000
	〃	II	1/4	+0.001 613	+0.001 179	+0.002 791	-34989 000	+132350 000
	〃	III	2/4	+0.004 249	+0.001 840	+0.006 090	-40084 000	+382240 000
	〃	IV	3/4	+0.006 690	+0.004 122	+0.010 813	+531710 000	+851960 000
	〃	IV_V	7/8	+0.004 060	+0.006 300	+0.010 360	+157510 000	+740590 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.009 425	+0.009 425	0.000 000	+582190 000
V′	4/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	I_II	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV_V	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000

表中 P_0 は省略す

表-24.

平版橋，分布荷重が $x/a=\xi_0=1/2$，$y/b=\eta_0=1/2$ に在る場合．　單位 瓩 糎

$\nu=\frac{1}{6}$

$h=40$ cm.

$a=750$ cm.

$b=500$ cm.

$E=210{,}000$ kg/cm²

$N=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}=1{,}152{,}000{,}000$ kg cm.

$p_0=1$ kg/cm²

$2u=102$ cm.

$2v=70$ cm.

$$E'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}}{\frac{a^2n^3}{b^3}\left\{(3+\nu)\sinh\frac{an\pi}{b}-(1-\nu)\frac{\pi an}{b}\right\}}=\frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$$

上式中，

$$A'_{mn}=\frac{16}{\pi^6 mn\left(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1$$

$m,n=1,3,5,7;$

n	A'_{mn}			
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$
1	+0.000 072 85	−0.000 005 71	+0.000 000 35	−0.000 000 19
3	−0.000 001 59	+0.000 000 79	−0.000 000 29	+0.000 000 10
5	+0.000 000 19	−0.000 000 13	+0.000 000 07	−0.000 000 03
7	−0.000 000 04	+0.000 000 03	−0.000 000 02	+0.000 000 01

n	$A'_{mn}E'$				$\sum_m A'_{mn}E'$
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	
1	+0.000 373 45	−0.000 225 12	+0.000 124 78	−0.000 073 21	+0.000 199 90
3	−0.000 060 35	+0.000 107 60	−0.000 090 49	+0.000 060 88	+0.000 019 22
5	+0.000 019 97	−0.000 046 69	+0.000 050 44	−0.000 040 61	−0.000 016 89
7	−0.000 008 26	+0.000 021 09	−0.000 025 85	+0.000 023 46	+0.000 010 43

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	E'_n
1	+0.000 199 90	581	+0.000 000 343 700 000 00
3	+0.000 019 22	214 360 000	+0.000 000 000 000 089 66
5	−0.000 016 89	12 747 000 000 000	−0.000 000 000 000 000 00
7	+0.000 010 43	390 210 000 000 000 000	+0.000 000 000 000 000 00

$\xi=0$ のときは

$$M_y=N\sum_n E_n\frac{\pi^2}{b^2}n^2\cdot 2(1+\nu)\left(\cosh\frac{an\pi}{b}+1\right)\sin n\pi\eta$$

なる式となる。

實用上は m は 1 より 23 まで，n は 1 より 7 までを採用して計算したる①，③，⑤にて充分で，それを版の M_y と見做しても差支へないものである。然し製圖は前表の數値によつたものである。

表-25．平版橋 分布荷重が $x_0/a=\xi_0=1/2$，$y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合，$a=750$，$b=500$，單位瓩・糎

（表中の p_0 は省略す）

點の位置				w_1	w_2	w	M_x	M_y
$y/b=\eta$		$x/a=\xi$						
I′	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	I$_{II}$	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
I$_{II}$′	1/8	I	0/4	0.000 000	+0.004 946	+0.004 946	0.000 000	+224450 000
	〃	I$_{II}$	1/8	+0.002 424	+0.003 542	+0.005 966	−14507 000	+255900 000
	〃	II	1/4	+0.004 833	+0.002 560	+0.007 394	+34167 000	+247350 000
	〃	III	2/4	+0.007 767	+0.001 813	+0.009 580	+252030 000	+310930 000
II′	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.009 114	+0.009 114	0.000 000	+417440 000
	〃	I$_{II}$	1/8	+0.004 507	+0.006 534	+0.011 042	−30874 000	+474210 000
	〃	II	1/4	+0.009 045	+0.004 728	+0.013 774	+49655 000	+585400 000
	〃	III	2/4	+0.012 862	+0.003 350	+0.018 213	+510.010 000	+654530 000
III′	2/4	I	0/4	0.000 000	+0.012 785	+0.012 785	0.000 000	+536990 000
	〃	I$_{II}$	1/8	+0.006 435	+0.009 212	+0.015 648	−46736 000	+690080 000
	〃	II	1/4	+0.013 035	+0.006 680	+0.019 715	+18.057 000	+919440 000
	〃	III	2/4	+0.022 700	+0.004 737	+0.027 528	+1163400 000	+1878800 000

(B) 附圖の說明

表-21～29 並に圖-47～80（圖-48, 49, 52～55, 57, 58, 61～64, 66, 67, 70～73, 75, 76, 79, 80 省略）はこの場合の計算表及びそれらに依る製圖を示すものである。

この場合に於て最も注目に値する事は荷重の位置によつては，版の最大沈下量は必ずしも荷重の直下で生ずるものではないことで，圖-47 の等沈下曲線圖にてそれを知る事が出來る。又圖-47 と圖-65 とを比較すると前者に於ける版の最大沈下量は後者の約半分に過ぎぬ。即ち版の最大沈下を生ずる荷重の位置は圖-65 の場合である事を知る。荷重の位置の變化による M_x の値は圖-50, 59, 68 及び 77 に示す通りである。平版橋に於てかゝる荷重の場合に對する M_x の理論的公式は餘り見受けられぬのであつて，著者の諸公式による計算により是等を明瞭ならしめることを得たものである。今日まで餘り注意されなかつた事は圖-77 を除く外の三つの場合には版の約半面以上に $-M_x$ が惹起されると云ふ現象である。更に圖-68 に於ては，$+M_x$ は荷重點附近のみで全版の約 3/4 の區域に亙りて $-M_x$ が生ずる。今若し圖-68 に於て，更に今一個の荷重を對稱的に載荷すると假定すれば，版の中心線（$\xi=1/2$）內の中心點に於ける $-M_x$ の値は倍加される結果となり，そのときの最大値は $+\max M_x$ の約 80％ にも達することを知る。この計算より $-M_x$ に對應出來るやうに版の厚さ又は上部鐵筋量等を理論的に計算出來るものである。

（圖-54, 55, 63, 64, 72, 73, 79, 80 省略）は荷重點にて，その版の桁（荷重の幅を桁の幅とする）として考へ

表-26.

平版橋. 分布荷重が $x_0/a=\xi_0=51/750$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合. 單位 瓩糎

$\nu=1/6$　　　$p_0=1$ kg/cm²

$h=40$ cm.　　$2u=102$ cm.

$a=750$ cm.　　$2v=70$ cm.

$b=500$ cm.

$E=210{,}000$ kg/cm²

$N=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}=1{,}152{,}000{,}000$ kg·cm.

$$E'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}}{\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{(3+\nu)\sinh\frac{an\pi}{b}-(1-\nu)\frac{\pi an}{b}\right\}}=\frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'},$$

$$F'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}}{\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{(3+\nu)\sinh\frac{an\pi}{b}+(1-\nu)\frac{\pi an}{b}\right\}}=\frac{\sum_m A'_{mn}F'}{Q''},$$

上式中,

$$A'_{mn}=\frac{16}{\pi^6 mn\left(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right)^2}\sin^2 m\pi\xi_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1,$$

$m=1,2,3,4,5,6,7;$　　$n=1,3,5,7;$

n	A'_{mn} $m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
1	+0.000 015 44	+0.000 007 97	+0.000 003 41	+0.000 001 55	+0.000 000 75	+0.000 000 37	+0.000 000 19
3	−0.000 000 33	−0.000 000 49	−0.000 000 47	−0.000 000 36	−0.000 000 25	−0.000 000 16	−0.000 000 10
5	+0.000 000 04	+0.000 000 07	+0.000 000 08	+0.000 000 08	+0.000 000 06	+0.000 000 05	+0.000 000 03
7	−0.000 000 00	−0.000 000 01	−0.000 000 01	−0.000 000 02	−0.000 000 01	−0.000 000 01	−0.000 000 01

n	$A'_{mn}E'$ $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$\sum_m A'_{mn}E'$
1	+0.000 079 17	+0.000 134 60	+0.000 109 35	+0.000 073 00	+0.000 396 14
3	−0.000 012 90	−0.000 065 53	−0.000 079 22	−0.000 060 71	−0.000 218 38
5	+0.000 004 23	+0.000 027 92	+0.000 044 20	+0.000 040 49	+0.000 116 86
7	−0.000 001 75	−0.000 012 61	−0.000 022 65	−0.000 023 39	−0.000 060 42

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	$E'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}E'}{Q'}$
1	+0.000 396 14	581	+0.000 000 681 110 000 000 00
3	−0.000 218 38	214 350 000	−0.000 000 000 001 018 800 00
5	+0.000 116 86	12 797 000 000 000	+0.000 000 000 000 000 009 13
7	−0.000 060 42	390 210 000 000 000 000	−0.000 000 000 000 000 000 00

n	$A'_{mn}F'$ $m=2$	$m=4$	$m=6$	$\sum_m A'_{mn}F'$
1	+0.000 129 67	+0.000 124 80	+0.000 091 48	+0.000 345 95
3	−0.000 040 83	−0.000 078 20	−0.000 072 20	−0.000 191 24
5	+0.000 015 02	+0.000 038 50	+0.000 044 54	+0.000 098 06
7	−0.000 006 44	−0.000 018 50	−0.000 024 30	−0.000 049 25

n	$\sum_m A'_{mn}F'$	Q''	$F'_n=\frac{\sum_m A'_{mn}F'}{Q''}$
1	+0.000 345 95	608	+0.000 000 568 880 000 000 00
3	−0.000 191 24	214 360 000	−0.000 000 000 000 892 140 00
5	+0.000 098 08	12 797 000 000 000	+0.000 000 000 000 000 007 66
7	−0.000 049 25	390 210 000 000 000 000	−0.000 000 000 000 000 000 00

表-27. 平版橋 分布荷重が $x/a=\xi_0=51/750$, $y_0/b=\eta_0=1/2$ に在る場合. $a=750$, $b=500$ 單位 瓩糎
（表中の p_0 は省略す）

點の位置				w_1	w_2	w	M_x	M_y
	$y/b=\eta$		$x/a=\xi$					
I′	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	Iⅱ	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IV	3/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	IVv	7/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	V	4/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
Iⅱ′	1/8	I	0/4	0.000 000	+0.016 805	+0.016 805	0.000 000	+525.310 000
	〃	Iⅱ	1/8	+0.001 469	+0.011 936	+0.013 405	+84.819 000	+410.570 000
	〃	II	1/4	+0.001 972	+0.008 105	+0.010 078	+10.230 000	+370.440 000
	〃	III	2/4	+0.001 315	+0.003 590	+0.004 905	−60.795 000	+202.080 000
	〃	IV	3/4	+0.000 534	+0.001 962	+0.002 497	−39.314 000	+102.300 000
	〃	IVv	7/8	+0.000 249	+0.001 782	+0.002 031	−21.718 000	+83.701 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.001 842	+0.001 842	0.000 000	+63.642 000
II′	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.031 759	+0.031 759	0.000 000	+1120.800 000
	〃	Iⅱ	1/8	+0.002 985	+0.022 317	+0.025 303	+184.670 000	+922.610 000
	〃	II	1/4	+0.003 803	+0.015 045	+0.018 849	+4.934 100	+763.260 000
	〃	III	2/4	+0.002 441	+0.006 636	+0.009 078	−117.610 000	+380.230 000
	〃	IV	3/4	+0.000 987	+0.003 631	+0.004 618	−78.261 000	+171.490 000
	〃	IVv	7/8	+0.000 460	+0.003 309	+0.003 770	−41.441 000	+152.770 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.003 446	+0.003 446	0.000 000	+[illegible] 000
III′	2/4	I	0/4	0.000 000	+0.046 997	+0.046 997	0.000 000	+[illegible] 000
	〃	Iⅱ	1/8	+0.005 324	+0.032 168	+0.037 498	+600.410 000	+[illegible] 000
	〃	II	1/4	+0.005 753	+0.021 418	+0.027 172	−131.860 000	+[illegible] 000
	〃	III	2/4	+0.003 457	+0.009 391	+0.012 849	−204.460 000	+551.030 000
	〃	IV	3/4	+0.001 380	+0.005 144	+0.006 533	−120.570 000	+260.050 000
	〃	IVv	7/8	+0.000 655	+0.004 721	+0.005 377	−58.984 000	+237.920 000
	〃	V	4/4	0.000 000	+0.005 016	+0.005 016	0.000 000	+[illegible] 000

圖-47.

平版橋　等沈下曲線圖

$w = w' \times 10^{-?} p_0$　圖は w' を示す．（單位 瓩糎）

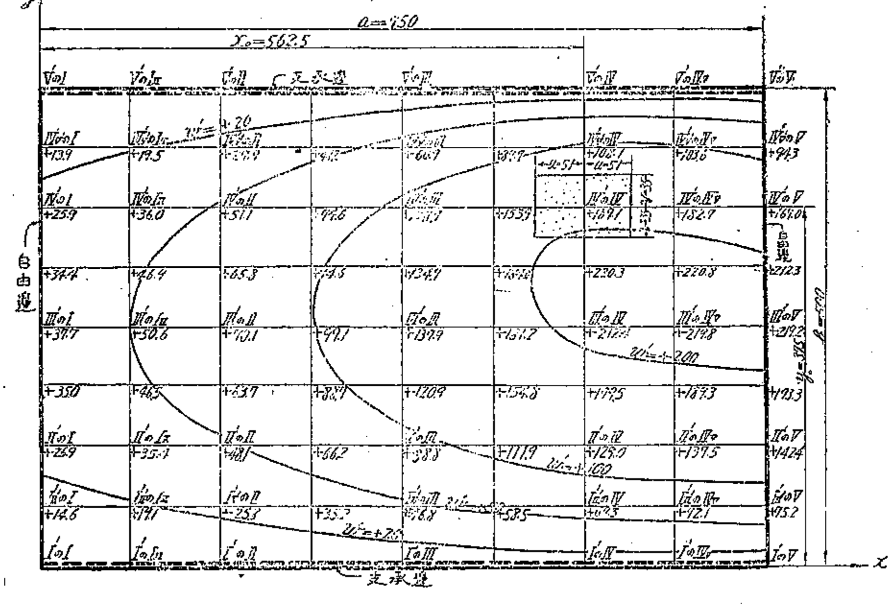


圖-50.

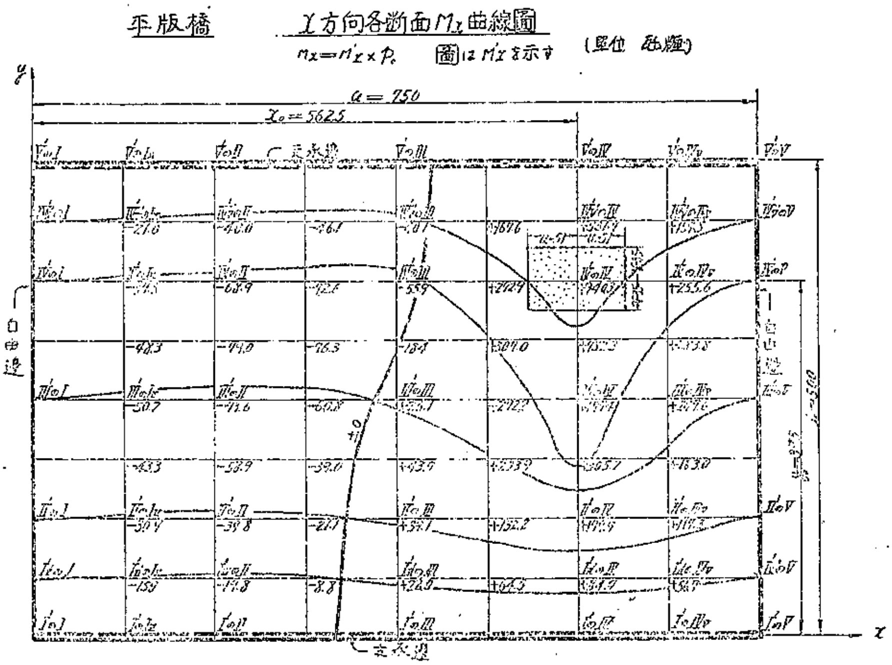

平版橋
X方向各斷面Mx曲線圖
a=750
x₀=562.5
自由邊
支承邊

圖-51.

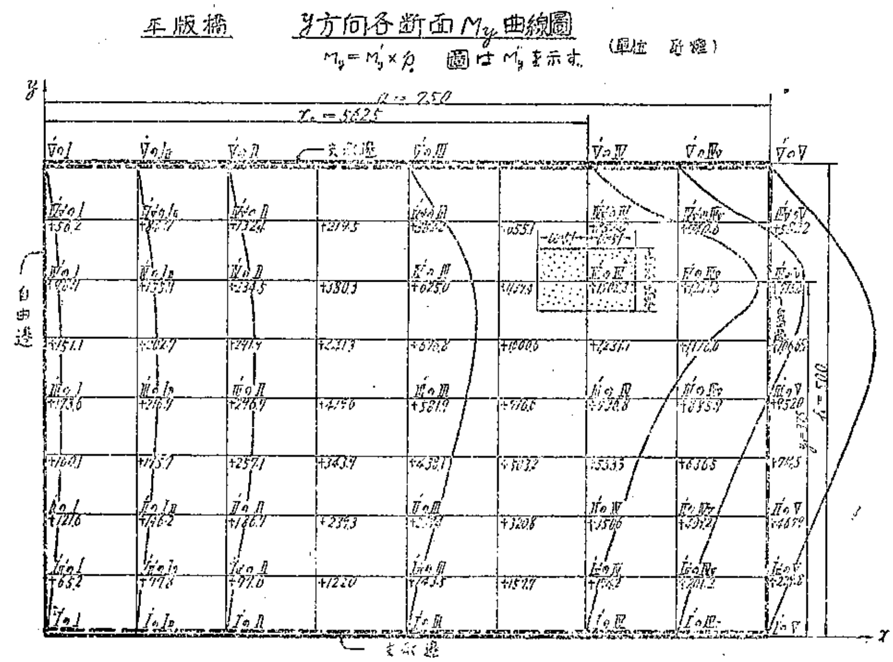

平版橋
Y方向各斷面My曲線圖
a=750
x₀=562.5
自由邊
支承邊

圖-56.

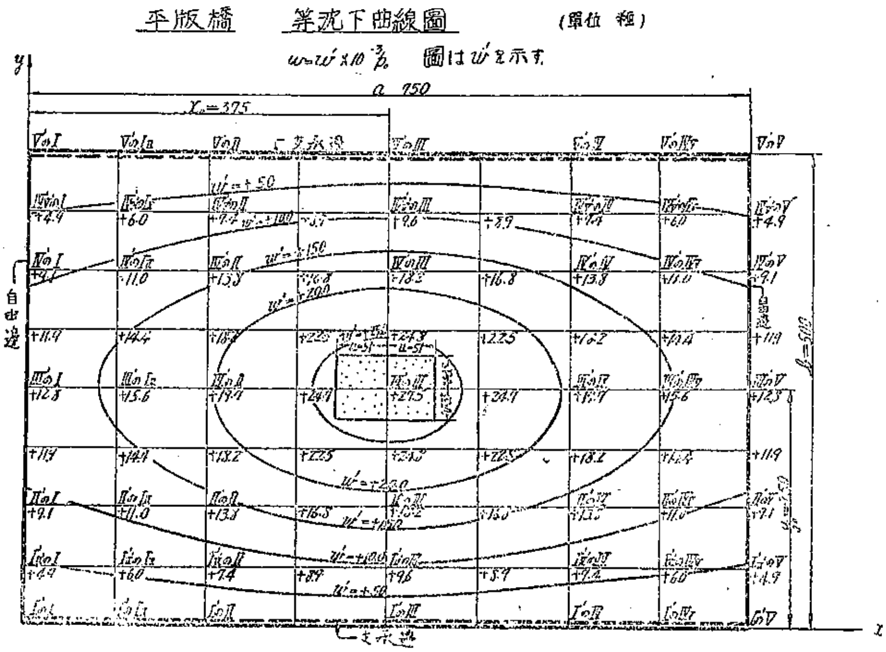

平版橋　等沈下曲線圖
(單位 糎)
圖はw'を示す
a 750
自由邊
支承邊

圖-59.

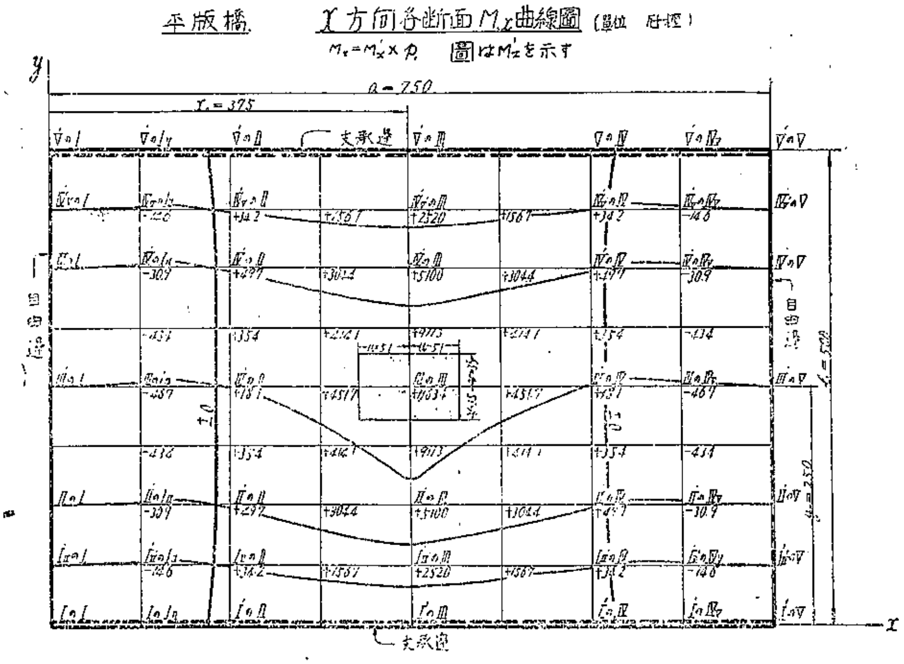

平版橋　X方向各斷面M_x曲線圖
圖はM'_xを示す
a = 750
自由邊
支承邊

圖-60.

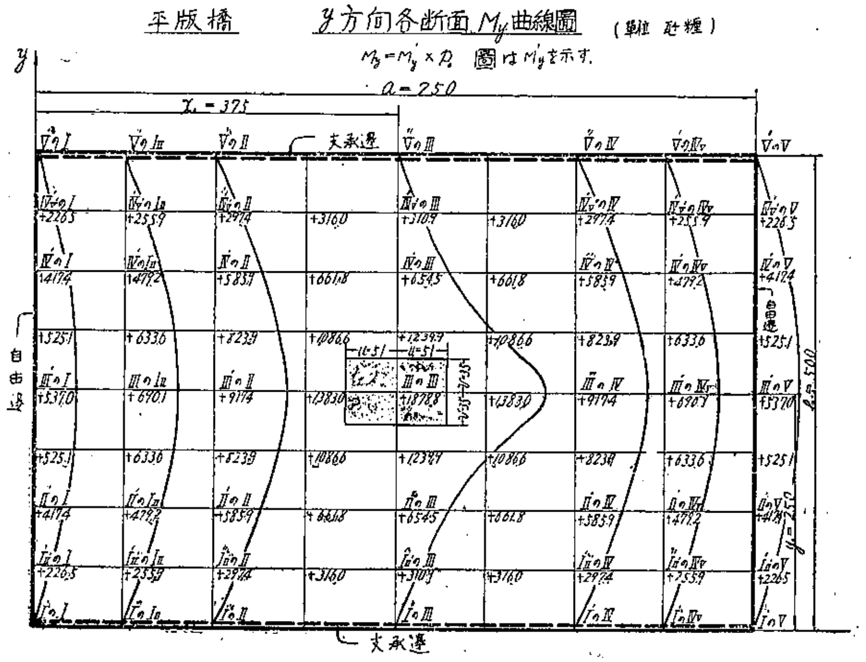

平版橋
y方向各断面 My 曲線圖
(單位 瓩糎)
My=M'y×P. 圖はM'yを示す.
a=250
x1=375
支承邊
自由邊
支承邊

圖-65.

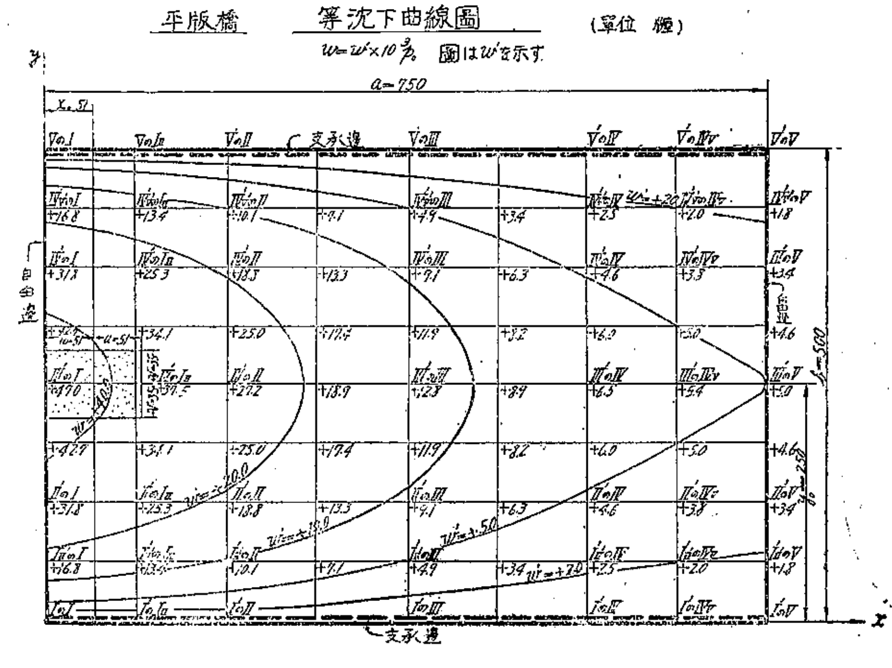

平版橋
第沈下曲線圖
(單位 糎)
w=w'×10^3 P. 圖はw'を示す
a=750
支承邊
自由邊
支承邊

圖-68.

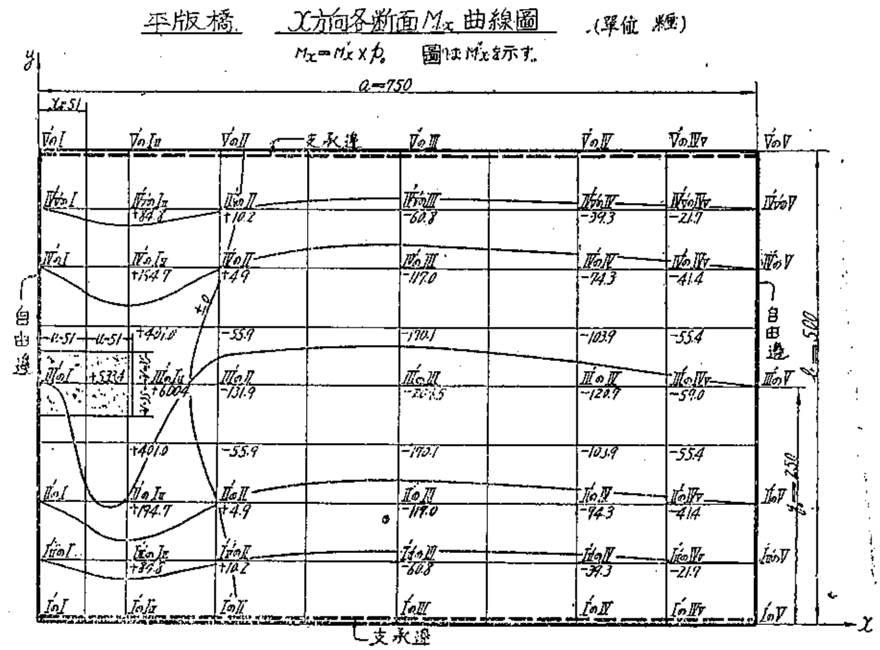


圖-69.

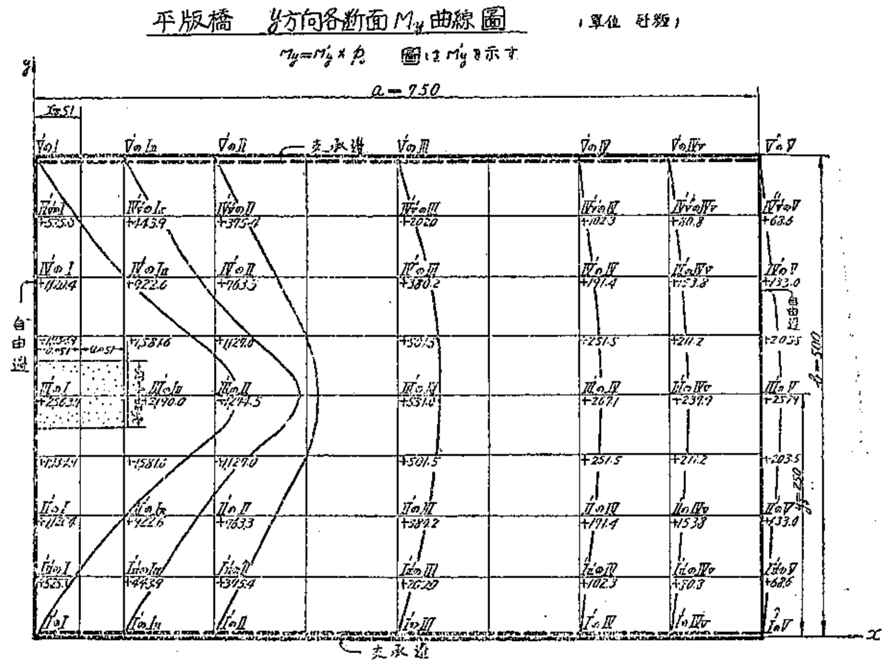


表-28.

平版橋．版全面ニ分布荷重ガ在ル場合．　　　單位瓩糎．

$\nu = \frac{1}{6}$

$h = 40\,cm$

$a = 750\,cm$

$b = 500\,cm$

$E = 210.000\,kg/cm^2$

$N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = 1,152,000,000\ kg\cdot cm$

$p_0 = 1\,kg/cm^2$

$2u = 750\,cm$

$2v = 500\,cm$

$$E'_n = \frac{\sum_m A'_{mn} \frac{1-(-1)^m}{2} m \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2 n^2}{b^2} \right\}}{\frac{a^3 n^3}{b^3} \left\{ (3+\nu)\sinh\frac{a n \pi}{b} - (1-\nu)\frac{\pi a n}{b} \right\}} = \frac{\sum_m A'_{mn} E'}{Q'}$$

上式中．

$$A'_{mn} = \frac{16}{\pi^6 m n \left(m^2 + \frac{a^2 n^2}{b^2} \right)^2}$$

$m = 1, 3, 5, 7, \cdots\cdots 31;$
$n = 1, 3, 5, 7, \cdots\cdots 15;$
（但シ本表ニハ $m, n = 1, 3, 5, 7$ ニ就キ記ス）

n	A'_{mn} $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$
1	+0.001 575 60	+0.000 043 85	+0.000 004 48	+0.000 000 90
3	+0.000 012 28	+0.000 002 16	+0.000 000 56	+0.000 000 16
5	+0.000 001 01	+0.000 000 26	+0.000 000 10	+0.000 000 04
7	+0.000 000 19	+0.000 000 05	+0.000 000 02	+0.000 000 01

n	$A'_{mn}E'$ $m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$\sum_m A'_{mn}E'$
1	+0.003 075 30	+0.001 726 00	+0.000 652 75	+0.000 336 61	+0.010 791 00
3	+0.000 468 40	+0.000 299 08	+0.000 168 32	+0.000 099 62	+0.001 035 40
5	+0.000 105 75	+0.000 087 65	+0.000 064 60	+0.000 045 70	+0.000 303 71
7	+0.000 039 01	+0.000 035 30	+0.000 024 52	+0.000 023 54	+0.000 127 38

n	$\sum_m A'_{mn}E'$	Q'	E'_n
1	+0.010 791 00	531	+0.000 018 55[illegible]
3	+0.001 035 40	214 360 000	+0.000 000 [illegible]
5	+0.000 303 71	12 791 000 000 000	+0.000 000 [illegible]
7	+0.000 127 38	390 210 000 000 000 000	+0.000 000 [illegible]

表-29.

點の位置 $y/b=\eta$		$x/a=\xi$		w_1	w_2	w	M_x	M_y
I′	0/4	I	0/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	I_{II}	1/8	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	II	1/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	〃	III	2/4	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
I'_{II}	1/8	I	0/4	0.000 000	+0.287 150	+0.287 150	0.000 000	+13930.000 000
	〃	I_{II}	1/8	+0.070 212	+0.205 040	+0.275 250	+1619.500 000	+13715.000 000
	〃	II	1/4	+0.122 690	+0.148 140	+0.270 820	+1902.100 000	+13587.000 000
	〃	III	2/4	+0.164 310	+0.104 890	+0.269 200	+2193.100 000	+13533.000 000
II′	1/4	I	0/4	0.000 000	+0.527 030	+0.527 030	0.000 000	+23538.000 000
	〃	I_{II}	1/8	+0.139 840	+0.377 940	+0.517 780	+2453.800 000	+23249.000 000
	〃	II	1/4	+0.223 420	+0.273 500	+0.496 910	+3177.390 000	+23021.000 000
	〃	III	2/4	+0.300 060	+0.193 790	+0.493 850	+3716.400 000	+22983.000 000
III′	2/4	I	0/4	0.000 000	+0.739 860	+0.739 860	0.000 000	+31846.000 000
	〃	I_{II}	1/8	+0.176 200	+0.532 840	+0.709 030	+3048.600 000	+31020.000 000
	〃	II	1/4	+0.311 030	+0.386 360	+0.697 390	+4173.200 000	+30685.000 000
	〃	III	2/4	+0.4[illegible] 040	+0.274 030	+0.693 070	+4920.100 000	+30616.000 000

圖-74.

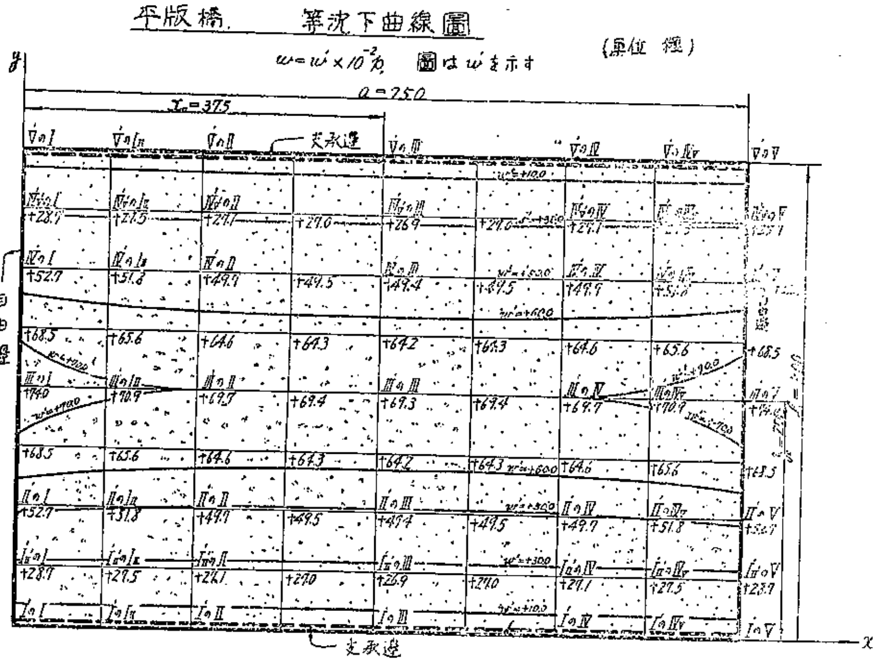

平版橋.　等沈下曲線圖
$w = w' \times 10^{-2}$ 粍　圖は w' を示す
(單位 粍)
$a = 750$
$x_0 = 375$
支承邊
自由邊
+28.7
+27.5
+27.1
+27.0
+26.9
+52.7
+51.8
+49.9
+49.5
+49.4
+68.5
+65.6
+64.6
+64.3
+64.2
+74.0
+70.9
+69.7
+69.4
+69.3
+w'=+10.0
+w'=+30.0
+w'=+60.0
+w'=+70.0
+w'=+90.0
x
y

圖-77.

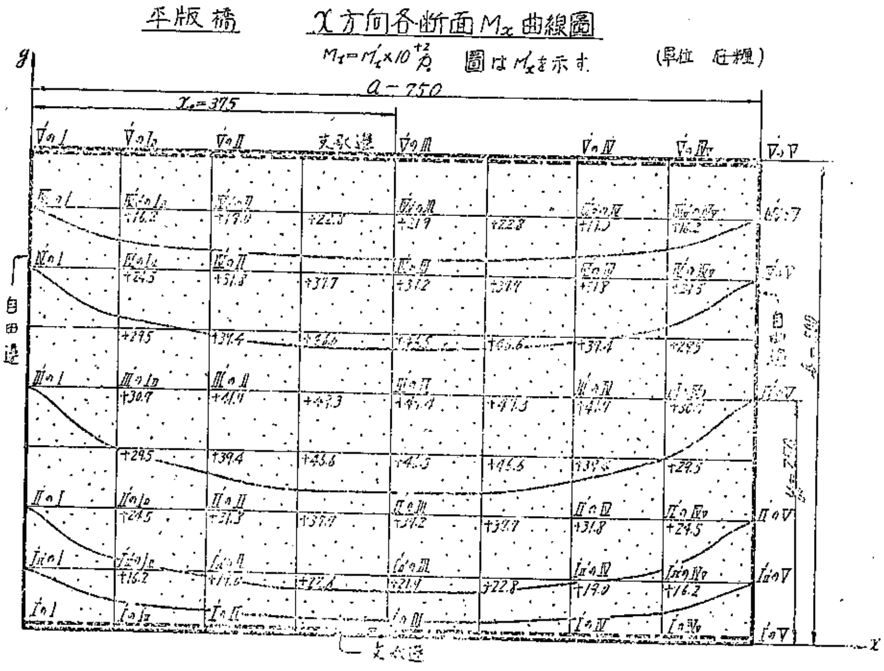
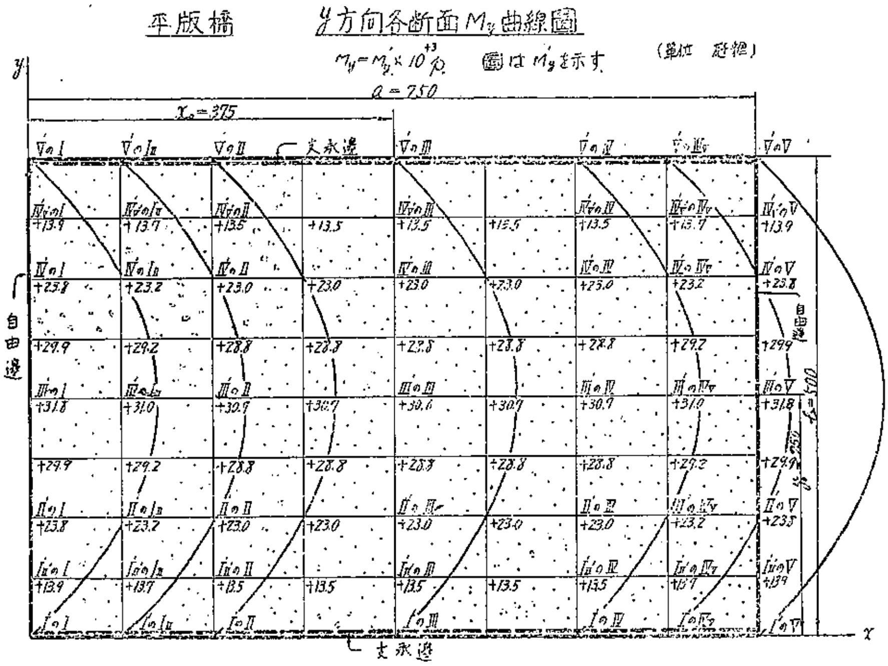

平版橋　x方向各断面 M_x 曲線圖
$M_x = M_x' \times 10^{+2}$ 瓩　圖は M_x' を示す
(單位 瓩粍)
$a = 750$
$x_0 = 375$
支承邊
自由邊
+16.2
+19.0
+22.3
+21.9
+22.8
+24.5
+31.3
+37.7
+37.2
+29.5
+39.4
+45.6
+30.7
+41.9
+47.3
x
y

圖-78.



た場合，桁としての w, M_y と，版の理論的計算による w, M_y とを比較したものであるが，これによると桁としての計算値の約 30％ が版に實際に生ずる値である。たゞ版全面に等分布荷重がある場合のみその差は非常に小さいものである。

[IV]　圖-81 と圖-82 とは等分布荷重が平版橋の中心點にある場合

この場合その幅員と徑間との比が w（中心點の）に及ぼす影響，又は a/b と M（中心點）との關係を示すものである。是等によると w と M は版の徑間 b が一定でもその幅員 a の大小に依り非常に異なつた値を持つと云ふ事を知るものである。

參考書

岡田良知：級數論

佐野靜雄：應用數學

小平吉男：物理數學；第一卷，第二卷

K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.

A. Kneser: Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik.

K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage.

〃　〃：Fünfstellige Tafeln der Kreis und Hyperbelfunktionen.

A. Nadái: Elastische Platten.

井口鹿象：Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten.

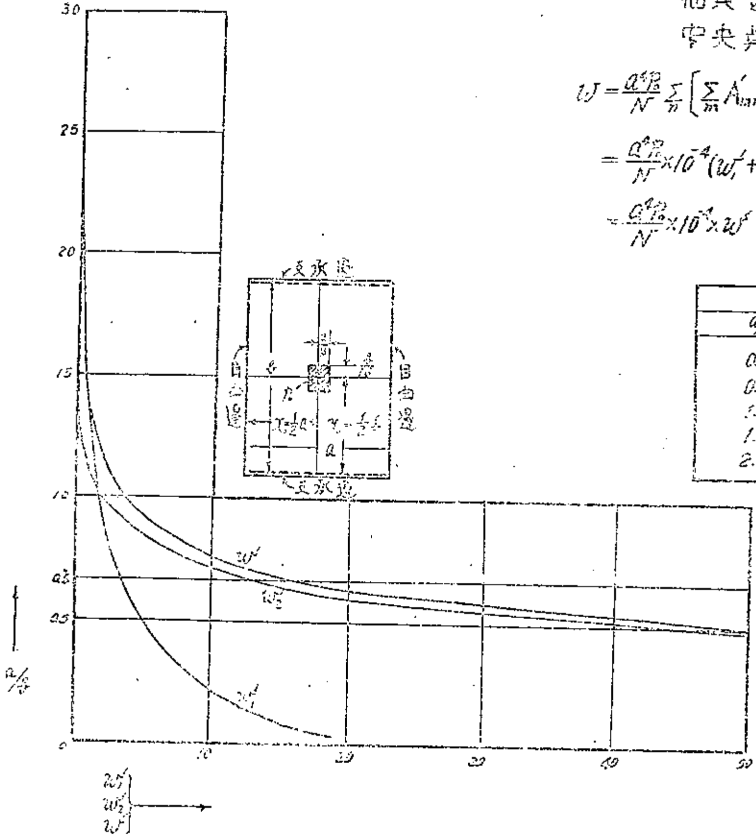
〃　〃：Die Eigenschwingen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platten.

妹澤克惟：振動學

E. Schneider: Mathematische Schwingungslehre.

圖-81.

平版橋



分布荷重が中央に在る場合.

幅員と徑間との比を與へて，

中央点の沈下比を求める圖表

$$w=\frac{a^4 p_0}{N}\sum_n\left[\sum_m A'_{mn}\sin m\pi\xi+E'_n\left\{\frac{n\pi a}{b}f(x)+\frac{2}{1-\nu}\phi(x)\right\}\right]\sin n\pi\eta$$

$$=\frac{a^4 p_0}{N}\times10^{-4}(w_1'+w_2')$$

$$=\frac{a^4 p_0}{N}\times10^{-4}\times w'$$

茲に，$N=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

E = 版の彈性係數 (kg/cm²)

a = 幅員 (cm)　h = 版厚 (cm)

p_0 = 荷重 (kg/cm²)　ν = ポアソン比 $=\frac{1}{6}$

$m, n = 1,3,5,7$;

w_1', w_2', w' の表

a/b	w_1'	w_2'	w'
0.5	+4.913 800	+44.842 000	+49.756 000
0.6	+3.465 300	+12.587 000	+16.052 000
1.0	+1.756 100	+1.678 400	+3.434 500
1.5	+0.684 480	+0.139 550	+0.824 030
2.0	+0.307 960	+0.014 580	+0.322 540

圖-32.

T版橋

分布荷重が中央に在る場合
幅員と徑間との比を與へて，
中央點の曲げモーメント比を求める圖表

$$M_x=\pi^2 a^2 p_0 \sum_n \Big[\sum_m \Lambda'_{mn}\Big\{m^2+\nu\frac{a^2 n^2}{b^2}\Big\}\sin m\pi\xi-(1-\nu)\frac{\pi a^3 n^3}{b^3}E'_n j'(x)\Big\}\sin n\pi\eta$$

$$= a^2 10^{-4} p_0 \times M'_x$$

$$M_y=\pi^2 a^2 p_0 \sum_n \Big[\sum_m \Lambda'_{mn}\Big\{\nu m^2+\frac{a^2 n^2}{b^2}\Big\}\sin m\pi\xi+E'_n\frac{a^2 n^2}{b^2}\Big\{(1-\nu)\frac{\pi a n}{b}j(x)+2(1+\nu)$$

$$\times j(x)\Big\}\Big]\sin n\pi\eta$$

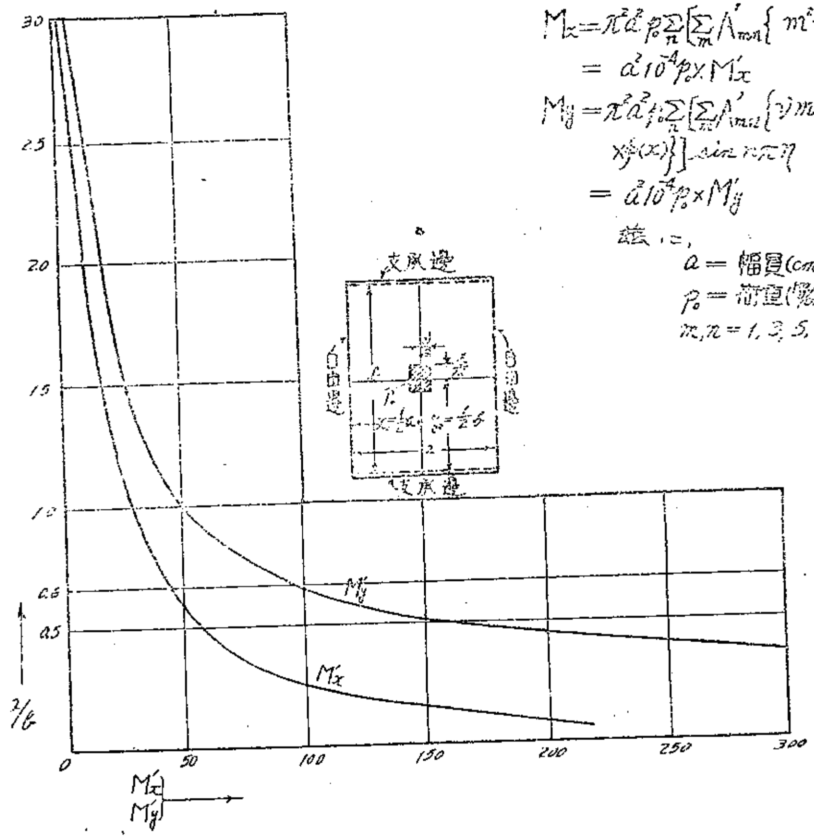
$$= a^2 10^{-4} p_0 \times M'_y$$

茲に，

a = 幅員(cm)
p_0 = 荷重(kg/cm²)
$m, n = 1, 3, 5, 7, ;$

M'_x, M'_y の表

a/l	M'_x	M'_y
0.5	+56.851 00	+155.450 00
0.6	+44.405 00	+94.107 00
1.0	+29.161 00	+49.586 00
1.5	+17.643 00	+27.839 00
2.0	+11.784 00	+19.134 00



(昭. 18. 8. 26. 受付)