論　說　報　告

第29卷第12號　昭和18年12月

深い梁の挫屈荷重に就て

正會員　中　村　作　太　郎*

要旨　支持狀態の異なる數種の深い梁が任意の點に單一集中荷重を受くる時，その挫屈荷重を與へる一般式を微分方程式を解いて誘導し，その各點に就いて梁の最小挫屈荷重を求め，各梁の挫屈狀態を比較して見た。

目　次

1. 緒　言

深さに比べて，幅の狹い短形斷面の梁は，水平主軸に對する曲げの剛性が垂直主軸に對する曲げの剛性よりも著しく大であるから，垂直荷重を受けた場合，この荷重が餘り大きくない間は，曲げの平面內で梁の垂直撓みもまた極く小さい。併し，垂直荷重が段々大きくなり，ある限度を超過すると，梁に挫屈を生じ其の中心軸線は曲げの平面から側方に移動する。この際，梁の中心軸線が曲げの平面から外れると捩り作用も働くから，梁は曲げの剛性のみならず捩りの剛性もまた大なる程，挫屈が起り難い事になる。この種の問題は最初 L. Prandtl[1] 氏及び A. G. M. Michell[2] 氏に依り取扱はれた。桁梁の横挫屈に依る破壞の問題は，佛蘭西 Tarbe 附近の橋梁の破損に關聯して，La Revue Technique, November 15, 1897 に說明してある。其他 H. Reissner[3], J. Prescott[4] S. Timoshenko[5], A. Koroboff[6], A. N. Dinnik[7], K, Federhofer[8], Dr. Fritz, Stussi[9] 諸氏の貢獻がある。これ等の人々に依り，深い梁の挫屈は色々の場合に就いて硏究されて居るが，其の結果が未だ斷片的なるに鑑み，深い梁の挫屈に興味を持つて居る筆者は狹い範圍ではあるが，先づ，任意の單一集中荷重を受くる數種の梁の場合を纏めて見たものである。卽ち，(1) 片持梁，(2) 兩端單純支持梁（兩端では水平垂直兩變位に對し鉸），(3) 兩端挾持梁（兩端では水平變位に對し固定，垂直變位に對しては鉸），(4) 兩端固定梁（兩端では水平垂直兩變位に對し固定）の四種の場合を取扱つた。兩端固定梁の場合は，計算が甚だ繁雜にして，非常に困難を來したが，筆者

* 滿洲鐵鋼工務株式會社本溪湖支社土木課

(1) Dissertation, Nürnberg. 1899.
(2) Phil. Mag. Vol. 48, 1899.
(3) Sitzungsb. Berl. Math. Ges., 1904.
(4) Applied Elasticity. The Buckling of Deep Beams. Phil. Mag. Vol. 39, Feb. 1920.
(5) Theory of Elastic Stability.　(6) Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1911.
(7) Bull. Don. Polyteth. Inst., Novotcherkassk. 第 2 卷, 1913.
(8) Reports Intern. Congr. App. Mech.. Stockholm, 1930.
Z. Angew. Math. Mech., 第 6 卷. 1926.
(9) Schweiz. Bauzeitung. 第 105 卷, 1935; Pub. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng. 第 3 卷, 1935.

の一番目的とする處は，兩端單純支持梁，兩端挾持梁，兩端固定梁の三種の支持狀態に於ける挫屈荷重を明かにし，その各々の場合を比較檢討するにあつたので，計算を敢行した次第である。尙本文に於ては，(1)，荷重は總て中心軸線に作用し，偏心荷重を受けぬ事。(2)，梁は荷重に依り軸張力を受けぬものとする。(3)，剪斷力の影響を無視する。等の假定を必要とする。斷面の中心より上に荷重が掛かる場合には挫屈荷重は減少し，下に掛かる場合にはその逆である。又偏心荷重を受くる場合とか，荷重狀態や梁の種類の異なる場合に就いては後日に讓る事にする。挫屈荷重を解くに，エネルギー法の近似解法もあるが，本文は微分方程式を解いて求めた。以下順を追つて述べる事とする。

2. 基本方程式の誘導

一つの梁を水平に置き，其の中心軸線を Z 軸，水平軸を X 軸，鉛直軸を Y 軸とすれば，垂直荷重に依る曲げ作用は，YZ 平面內に於て起る。この際水平軸に對する曲げの剛性が，鉛直軸に對する曲げの剛性に比して著しく大であれば，限界荷重に達するまでは斷面の廻轉も中心軸線の移動も極めて小さい。今圖-1 は挫屈した梁の中心軸線を，平面圖で示したものとする。一横斷面 G の一方の側が他方に及ぼす作用は，一偶力と一鉛直力とであ

圖-1.

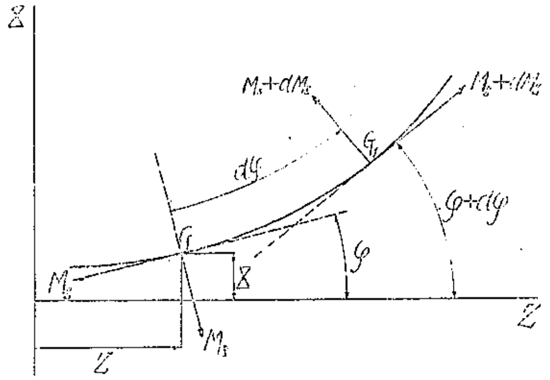
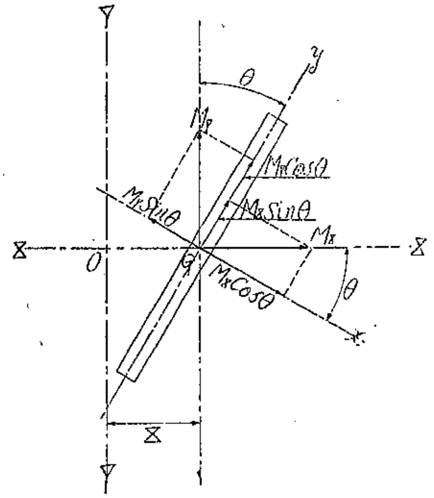


圖-2.



つて，此の偶力は M_x, M_y 及び M_z の 3 つの分偶力に分けて考へる事が出來る。今玆に，この水平面上の分偶力のみについて，G, G_1 の釣合を考へると，

$$(M_z+dM_z)-M_z\cos d\varphi+M_x\sin d\varphi=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$d\varphi$ は極く小さな角だから，

$$\cos d\varphi \fallingdotseq 1\,. \qquad \sin d\varphi \fallingdotseq d\varphi \qquad \therefore \quad dM_z+M_x d\varphi=0$$

卽

$$\frac{dM_z}{dZ}=-M_x\frac{d\varphi}{dZ} \quad\cdots\cdots(2)$$

然して

$$\frac{dX}{dZ}=\tan\varphi \fallingdotseq \varphi \qquad \frac{d\varphi}{dZ}=\frac{d^2X}{dZ^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dM_z}{dZ}=-M_x\frac{d^2X}{dZ^2}\quad\cdots\cdots(3)$$

(3) 式は G, G₁ の部分に加はる荷重及び剪斷力の影響を省略して求めたものである。G の横斷面圖，圖-2 に於て，圖心 G は X だけ移動し，且 θ だけ捩られて居る。この X 及び θ の値は，極く小さな値であるから，$\cos\theta\fallingdotseq 1$, $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ 尙移動後の横斷面の慣性主軸を，x, y とすれば，

$$\left.\begin{aligned}X&=x\cos\theta+y\sin\theta\fallingdotseq x+y\theta\\ Y&=y\cos\theta-x\sin\theta\fallingdotseq y-x\theta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

I_x 及び I_y を慣性主軸 x, y に關する斷面の二次モーメントとし，之に對應する曲げモーメントを求めると

$$\left.\begin{aligned}M_x&=M_X\cos\theta-M_Y\sin\theta\fallingdotseq M_X-\theta M_Y\\ M_y&=M_X\sin\theta+M_y\cos\theta\fallingdotseq\theta M_X+M_Y\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

yz 及び zx 平面に於て

$$\left.\begin{aligned}EI_x\frac{d^2y}{dz^2}&=M_x=M_X-\theta M_Y\\ EI_y\frac{d^2x}{dz^2}&=M_y=\theta M_X+M_Y\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

x, y の代りに x, y を用ひると (4) 式に依り

$$X=x+y\theta,\qquad \frac{dX}{dZ}=\frac{dx}{dz}+y\frac{d\theta}{dz}+\theta\frac{dy}{dz}$$

$$Y=y-x\theta,\qquad \frac{dY}{dZ}=\frac{dy}{dz}-x\frac{d\theta}{dz}-\theta\frac{dx}{dz}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2X}{dZ^2}=\frac{d^2x}{dz^2}+\theta\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz}+y\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dZ^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\theta\cdot\frac{d^2x}{dz^2}-2\frac{dx}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz}-x\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

然るに中心軸線上の點に就いて考へて居るのだから

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=0\,,\qquad x=y=0$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dZ^2}&=\frac{d^2x}{dz^2}+\theta\frac{d^2y}{dz^2}\\ \frac{d^2Y}{dZ^2}&=\frac{d^2y}{dz^2}-\theta\frac{d^2x}{dz^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

(6) 式より，

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{\theta M_X+M_Y}{EI_y},\qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{M_X-\theta M_Y}{EI_x}$$

を (7) 式右邊に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dZ^2}&=\frac{\theta M_XI_x+M_YI_x+\theta M_XI_y-\theta^2M_YI_y}{EI_xI_y}=\frac{\theta M_X(I_x+I_y)+M_Y(I_x-\theta^2I_y)}{EI_xI_y}\\ \frac{d^2Y}{dZ^2}&=\frac{M_XI_y-\theta M_YI_y-\theta^2M_XI_x-\theta M_YI_x}{EI_xI_y}=\frac{M_X(I_y-\theta^2I_x)-\theta M_Y(I_x+I_y)}{EI_xI_y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

$M_Y=0,\ \theta=0$ の場合は，$\dfrac{d^2Y}{dZ^2}=\dfrac{M_X}{EI_x}$ ····(9) となり普通の場合の關係を得。尙，捩りモーメント M_Z と捩れ角

θ との關係は梁の捩りの剛性係數を C とすれば，

$$\tau=\frac{d\theta}{dZ}=\frac{Mz}{C} \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{dMz}{dZ}=C\frac{d^2\theta}{dZ^2}$$ ∴ (3) 式に依り，

$$C\frac{d^2\theta}{dZ^2}=-M_x\frac{d^2X}{dZ^2} \qquad \cdots\cdots(11)$$

∴ (8) 式の $\frac{d^2X}{dZ^2}$ を代入すると，

$$C\frac{d^2\theta}{dZ}+\frac{M_X}{EI_xI_y}\{\theta M_X(I_x+I_y)+M_Y(I_x-\theta^2I_y)\}=0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

これが挫屈現象を表はす基本方程式である。

I_x に對し I_y は極めて小さいから，これを省略すれば

$$C\frac{d^2\theta}{dZ^2}+\frac{M_X}{EI_y}(\theta\cdot M_X+M_Y)=0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

$M_Y=0$ なら

$$C\frac{d^2\theta}{dZ^2}+\frac{(M_X)^2}{EI_y}\theta=0 \qquad \cdots\cdots(14)$$

3. 片持梁の挫屈

基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0 \qquad \cdots\cdots(15)$$

自由端の圖心 A 點を座標の原點とすると，任意の點の M_x は $0\leqq z\leqq \xi l$ に於ては，$M_x=0$ 又 $M_y=-M_0=0$ なる故

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}=0\,,\quad \frac{d\theta}{dz}=A_1\,,\quad \theta=A_1z+A_2$$

圖-3. (側面)

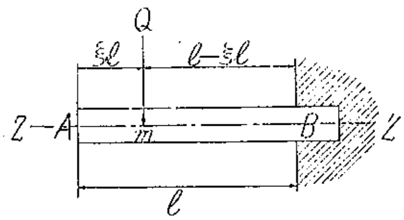
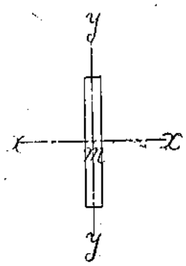


圖-4. (斷面)



$$\left.\begin{array}{ll} z=0 \text{ に於て,} & \frac{d\theta}{dz}=0 \\ z=\xi l \text{ に於て,} & \frac{d\theta}{dz}=0 \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(16)$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ に於て，$M_x=Q(z-\xi l)$，$M_y=-M_0=0$

$z-\xi l=t$ とすれば

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt},\quad \frac{d^2\theta}{dz^2}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

又 $M_x=Q\cdot t$ (但し $z>\xi l$)。

境界條件は，(16) 式より $z-\xi l=t=0$ に於て $\dfrac{d\theta}{dz}=\dfrac{d\theta}{dt}=0$，又 $z=l$ に於て $\theta=0$ 即ち

$$\left.\begin{array}{ll} t=0 \text{ に於て,} & \dfrac{d\theta}{dt}=0 \\ t=l-\xi l \text{ に於て} & \theta=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(17)$$

∴ (15) 式より

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x^2}{EI_y}\cdot\theta=0\cdots\cdots\cdots(18)$$

これに $M_x=Q\cdot t$ を代入すれば，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Q^2}{EI_yC}\theta\cdot t^2=0\cdots\cdots\cdots(19)$$

そこで

$$\theta=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdot \quad \text{或は} \quad \sum a_rt_r \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+4a_4t^3+\cdots\cdot$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=2a_2+3\cdot2a_3t+4\cdot3a_4t^2+5\cdot4a_5t^3+\cdots\cdot$$

(19) 式に於て $s^4=\dfrac{Q^2}{EI_yC}$ とおけば

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+s^4\theta t^2=0\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$s^4\theta\cdot t^2=s^4t^2(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdot)=s^4a_0t^2+s^4a_1t^3+s^4a_2t^4+s^4a_3t^5\cdots\cdots$$

∴ (20) 式より

$$2a_2+3\cdot2a_3t+(4\cdot3a_4+s^4a_0)t^2+(5\cdot4a_5+s^4a_1)t^3+\cdots\cdot+\{r(a-1)a_r+s^4a_{r-4}\}t^{r-2}+\cdots\cdot=0\cdots\cdots(21)$$

$$\therefore\quad a_2=0\ ,\quad a_3=0\ ;\quad r(r-1)a_r+s^4a_{r-4}=0$$

$$\therefore\quad a_r=-\frac{s^4}{r(r-1)}\cdot a_{r-4}$$

即ち，各係數は 4 の差を以て繰り返へされ，a_2, a_3 に始まる系統は總て 0 である。殘るのは a_0 及び a_1 に始まる系統のみである。

$$\therefore\quad a_4=-\frac{s^4}{4\cdot3}a_0,\quad a_5=-\frac{s^4}{5\cdot4}a_1,\quad a_8=-\frac{s^4}{8\cdot7}a_4=\frac{s^8}{8\cdot7\cdot4\cdot3}a_0,\quad a_9=-\frac{s^4}{9\cdot8}a_5=\frac{s^8}{9\cdot8\cdot5\cdot4}a_1$$

$$\therefore\quad \theta=a_0\left(1-\frac{s^4}{3\cdot4}t^4+\frac{s^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}t^8-\frac{s^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}t^{12}+\cdots\cdot\right)$$
$$+a_1t\left(1-\frac{s^4}{4\cdot5}t^4+\frac{s^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}t^8-\frac{s^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}t^{12}+\cdots\cdot\right)$$

$t=0$ の時に $\dfrac{d\theta}{dt}=0$ なる故

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{a_0s^4}{3}t^3+\frac{a_0s^8}{3\cdot4\cdot7}t^7-\frac{a_0s^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}t^{11}+\cdots\cdots+a_1-\frac{a_1s^4}{4}t^4+\frac{a_1s^8}{4\cdot5\cdot8}t^8$$

$$-\frac{a_1s^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}t^{12}+\cdots\cdots=0 \qquad \therefore \quad a_1=0$$

$t=l-\xi l$ の時に $\theta=0$

$$\therefore \quad \theta=a_0\left(1-\frac{s^4}{3\cdot4}t^4+\frac{s^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}t^8-\frac{s^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}t^{12}+\cdots\cdots\right)$$

$$=a_0\left\{1-\frac{s^4}{3\cdot4}l^4(1-\xi)^4+\frac{s^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}l^8(1-\xi)^8-\frac{s^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}l^{12}(1-\xi)^{12}+\cdots\cdots\right\}=0$$

$$\therefore \quad 1-\frac{s^4l^4(1-\xi)^4}{3\cdot4}+\frac{s^8l^8(1-\xi)^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots=0 \quad \cdots\cdots(22)$$

今，$s^4l^4(1-\xi)^4=u$ とすれば

$$1-\frac{u}{3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

u の最小根は，略ゝ

$$u=16.099, \quad s^2l^2(1-\xi)^2=\sqrt{u}=4.012, \quad s^4=\frac{Q^2}{EI_yC}$$

$$\therefore \quad Q=s^2\sqrt{EI_yC}=\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)^2l^2}\cdot\sqrt{EI_yC}$$

即ち表-1 の如し。

表-1.

ξ	$1-\xi$	$(1-\xi)^2$	$\sqrt{u}$	$\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)^2}$	$\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0	1.00	1.00	4.012	4.012	$\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.10	0.90	0.81	〃	4.960	〃
0.20	0.80	0.64	〃	6.275	〃
0.30	0.70	0.49	〃	8.190	〃
0.40	0.60	0.36	〃	11.150	〃
0.50	0.50	0.25	〃	16.050	〃
0.60	0.40	0.16	〃	25.080	〃
0.70	0.30	0.09	〃	44.580	〃
0.80	0.20	0.04	〃	100.30	〃
0.90	0.10	0.01	〃	401.20	〃
0.93	0.07	0.0049	〃	818.78	〃
0.95	0.05	0.0025	〃	1604.80	〃
0.97	0.03	0.0009	〃	4458.78	〃
0.99	0.01	0.0001	〃	40120.11	〃
1.00	0	0	〃	∞	〃

この結果を圖示すれば，圖-5 の如くなる。

圖-5.

4. 兩端單純支持梁の挫屈

こゝで取扱ふ兩端單純支持梁とは，兩端では兩端が單に捩れない様に捩り偶力が働き，單に支持されて居る梁の事で即ちこの場合は兩端を水平及び垂直兩變位に對して鉸と考へ得るものである。

圖-6. (側面)

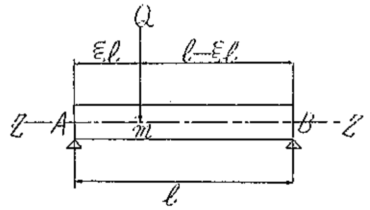


圖-7. (斷面)

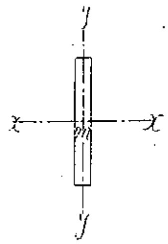
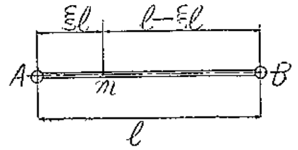


圖-8. (平面)



荷重 Q は梁斷面の重心に作用するものとす。今 A 點を原點とすれば，

(1) $0 \leqq z \leqq \xi l$ の場合

基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta M_x+M_y)=0 \cdots\cdots(24)$$

上式 (24) に於て，

$$M_y=-M_0=0, \qquad M_x=\frac{l-\xi l}{l}Q\cdot z=(1-\xi)\cdot Q\cdot z$$

∴ (24) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}\cdot z^2\cdot\theta=0 \cdots\cdots(25)$$

$$s^4=\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}=\frac{Q^2}{\frac{1}{(1-\xi)^2}EI_yC}$$ とすれば，(25) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+s^4z^2\cdot\theta=0 \cdots\cdots(26)$$

この微分方程式を解くために

$$\theta=\sum a_rz^r=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$$ とおけば

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}=\sum r(r-1)a_rz^{r-2}=2a_2+3\cdot2a_3z+4\cdot3a_4z^2+5\cdot4a_5z^3+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \sum\{r(r-1)a_rz^{r-2}+s^4a_rz^{r+2}\}=0$$

$$2a_2+3\cdot2a_3z+(4\cdot3a_4+s^4a_0)z^2+(5\cdot4a_5+s^4a_1)z^3+\cdots\cdots+\{r(r-1)a_r+s^4a_{r-4}\}z^{r-2}+\cdots\cdots=0 \cdots\cdots(27)$$

$$\therefore\quad a_2=0, \qquad a_3=0, \qquad r(r-1)a_r+s^4a_{r-4}=0$$

$$\therefore\quad a_r=-\frac{s^4}{r(r-1)}a_{r-4}$$

即ち

$$a_4=-\frac{s^4}{3\cdot4}a_0, \quad a_5=-\frac{s^4}{4\cdot5}a_1, \quad a_8=-\frac{s^4}{7\cdot8}a_4=+\frac{s^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}a_0, \quad a_9=-\frac{s^4}{8\cdot9}a_5=\frac{s^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}a_1\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \theta=a_0\left\{1-\frac{s^4z^4}{3\cdot4}+\frac{s^8z^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}z^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}+a_1\left\{z-\frac{s^4z^5}{4\cdot5}+\frac{s^8z^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}z^{13}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(28)$$

$z=0$ では $\theta=0$ $\therefore$ $\theta=a_0=0$

$$\therefore \quad \theta=a_1z\left\{1-\frac{s^4z^4}{4\cdot5}+\frac{s^8z^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}z^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(29)$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{s^4z^4}{4}+\frac{s^8z^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{s^{12}z^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right) \quad\cdots\cdots(30)$$

$z=\xi l$ に於ては，$s^4\xi^4l^4=u$ とすれば

$$\theta=a_1\xi l\left\{1-\frac{s^4\xi^4l^4}{4\cdot5}+\frac{s^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}\xi^{12}l^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}=a_1\xi l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(31)$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left\{1-\frac{s^4\xi^4l^4}{4}+\frac{s^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot}-\frac{s^{12}\xi^{12}l^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right\}=a_1\left\{1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(32)$$

(2) $\xi l\leqq z\leqq l$ の場合

基本方程式 (24) $C\dfrac{d^2\theta}{dz^2}+\dfrac{M_x}{EI_y}(\theta M_x+M_y)=0$ に於て

$$M_y=-M_0=0, \qquad M_x=Q\cdot\xi(l-z)$$

$\therefore$ 上式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2\xi^2(l-z)^2}{EI_yC}\cdot\theta=0 \quad\cdots\cdots(33)$$

$l-z=t$ とおき $s'^4=\dfrac{\xi^2Q^2}{EI_yC}$ とすれば，(33) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+s'^4\cdot t^2\cdot\theta=0 \quad\cdots\cdots(34)$$

(34) 式の解は (26) 式と同様に

$$\theta=a_0'\left(1-\frac{s'^4t^4}{3\cdot4}+\frac{s'^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s'^{12}t^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right)+a_1't\left(1-\frac{s'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right) \quad\cdots\cdots(35)$$

境界條件 $z=l$ 即ち $t=(l-z)=0$ では，$\theta=0$

$\therefore$ (35) 式より $a_0'=0$

$$\therefore \quad \theta=a_1't\left(1-\frac{s'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right) \quad\cdots\cdots(36)$$

又

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left(1-\frac{s'^4t^4}{4}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{s'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right) \quad\cdots\cdots(37)$$

$z=\xi l$ に於ては，$u=s^4\xi^4l^4$，$s'^4=\dfrac{\xi^2}{(1-\xi)^2}s^4$ なるを以て

$$\theta=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$

$$=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{s^4l^4\xi^2(1-\xi)^2}{4\cdot5}+\frac{s^8l^8\xi^4(1-\xi)^4}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}l^{12}\xi^6(1-\xi)^6}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$

$$=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

又

$$\frac{d\theta}{dz}=-a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(39)$$

そこで，m 點 (ξl) に於ては，θ 及び $d\theta/dz$ は左右について夫々相等しと置き，即ち式 (31)=(38), (32)=(39)

$$\theta=a_1\xi l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$

$$=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}&1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots=A\\&1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots=A'\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(40)$$

とすれば，

$$a_1\xi\cdot A-a_1'(1-\xi)A'=0\quad\cdots\cdots(41)$$

次ぎに，

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left\{1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right\}$$

$$=-a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}&1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots=C\\&1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots=C'\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(42)$$

とすれば，

$$a_1C+a_1'C'=0\quad\cdots\cdots(43)$$

これをまとめれば，

$$\begin{cases}a_1\xi A-a_1'(1-\xi)A'=0&\cdots\cdots(41)\\a_1C+a_1'C'=0&\cdots\cdots(43)\end{cases}$$

$$(41)\times C'+(43)\times(1-\xi)A'\qquad a_1\xi\cdot A\cdot C'+a_1(1-\xi)\cdot C\cdot A'=0$$

$a_1\neq0$ とすれば，

$$A\cdot C'+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)C\cdot A'=0\quad\cdots\cdots(44)$$

茲に，

$$\begin{cases}A=1-\dfrac{u}{4\cdot5}+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\\A'=1-\dfrac{u}{4\cdot5}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\\C=1-\dfrac{u}{4}+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\\C'=1-\dfrac{u}{4}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\end{cases}$$

表-2.

ξ	$\frac{1-\xi}{\xi}$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^8$
0.01	99	9 801	9.703×10^5	9.606×10^7	9.5099×10^9	9.4148×10^{11}	9.3207×10^{13}	9.2274×10^{15}
0.05	19	361	6 859	1.3032×10^5	2.4761×10^6	4.7046×10^7	8.9387×10^8	1.6984×10^{10}
0.10	9	81	729	6 561	59 049	5.3144×10^5	4.783×10^6	4.3047×10^7
0.20	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
0.30	2.33	5.43	12.66	29.50	68.70	160	373	870
0.40	1.50	2.25	3.38	5.07	7.60	11.40	17.10	25.70
0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

表-3.

ξ	$A=1-\frac{u}{4.5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\cdots$
全　値	$1-0.05\,u+0.000694\,u^2-0.00000444\,u^3+\cdots\cdots\cdots$

表-4.

ξ	$A'=1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{5\cdot4\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots$
0.01	$1-400.05\,u+66\,665\,u^2-4\,189\,587\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$1-18.05\,u+90.50\,u^2-209.20\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$1-4.05\,u+4.560\,u^2-2.36\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$1-0.80\,u+0.178\,u^2-0.0182\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$1-0.272\,u+0.0205\,u^2-0.000712\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$1-0.1125\,u+0.0035\,2\,u^2-0.0000\,507\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$1-0.050\,u+0.000694\,u^2-0.00000444\,u^3+\cdots\cdots$

表-5.

ξ	$C=1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{8\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\cdots$
全　値	$1-0.25\,u+0.00625\,u^2-0.0000578\,u^3+\cdots\cdots\cdots$

表-6.

ξ	$C'=1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots$
0.01	$1-2\,450\,u+600\,373\,u^2\quad 54\,483\,805\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$1-90.25\,u+814.50\,u^2\quad 2\,722.60\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$1-20.25\,u+41.00\,u^2-30.70\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$1-4.00\,u+1.60\,u^2-0.237\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$1-1.357\,u+0.1845\,u^2-0.00927\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$1-0.5625\,u+0.0317\,u^2-0.000661\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$1-0.250\,u+0.00625\,u^2-0.0000578\,u^3+\cdots\cdots$

以上の式より u を求め，$Q^2=\dfrac{s^4EI_yC}{(1-\xi)^2}$，即ち $Q=\dfrac{\sqrt{u}\sqrt{EI_yC}}{(1-\xi)\xi^2l^2}$ 式より挫屈荷重の係數を求むれば，表-7，表-8 の如し。

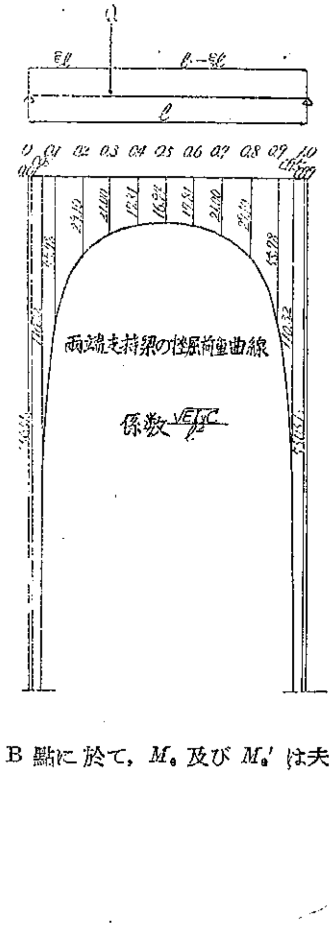
表-7.

ξ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
u	0.00297	0.0686	0.252	0.865	1.750	2.926	4.482

表-8.

ξ	u	$\sqrt{u}$	$1-\xi$	$\xi^2(1-\xi)$	$Q=\dfrac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\cdot\dfrac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.01	0.00297	0.0545	0.99	0.000099	$550.51\dfrac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	0.0686	0.2620	0.95	0.002375	110.32 〃
0.10	0.252	0.5020	0.90	0.009	55.78 〃
0.20	0.865	0.9310	0.80	0.032	29.10 〃
0.30	1.750	1.323	0.70	0.063	21.00 〃
0.40	2.926	1.710	0.60	0.096	17.81 〃
0.50	4.482	2.118	0.50	0.125	16.94 〃

圖-9.



5. 兩端挾持梁の挫屈

こゝで取扱ふ兩端挾持梁とは，兩端は水平變位に對し固定されるだけで單に支持されて居る梁の事で，即ち兩端を水平變位に對し固定，垂直變位に對し鉸と考へ得る。

この場合は鉛直軸の周りの偶力，M_0, M_0' が作用する。

圖-10.（側面）

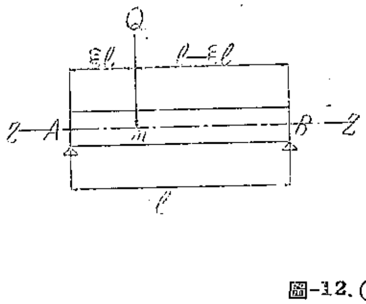


圖-11.（斷面）

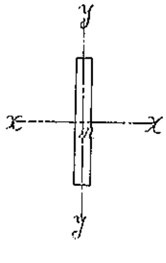


圖-12.（平面）

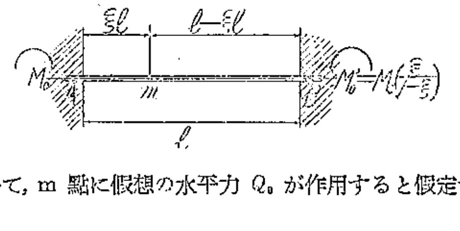


圖-12 に於て，m 點に假想の水平力 Q_0 が作用すると假定すれば，A 點及び B 點に於て，M_0 及び M_0' は夫

夫次の如し。

$$M_0=-\frac{Q_0(\xi l)(l-\xi l)^2}{l^2}=-Q_0\cdot l\xi(1-\xi)^2,\qquad M_0'=-\frac{Q_0\xi^2l^2(l-\xi l)}{l^2}=-Q_0\cdot l\cdot\xi^2(1-\xi)$$

$$\therefore\quad M_0'=-Q_0l\cdot\xi(1-\xi)\cdot\xi=M_0\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$$

今，基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta M_x+M_y)=0 \qquad \cdots\cdots(45)$$

に於て

(1) $o\leqq z\leqq \xi l$ の場合

$M_x=\frac{(l-\xi l)}{l}Q\cdot z=(1-\xi)\cdot Q\cdot z,\qquad M_y=-M_0$ なるを以て，(45) 式は

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dz^2}+(1-\xi)^2Q^2z^2\cdot\theta-(1-\xi)QzM_0=0 \qquad \cdots\cdots(46)$$

$$\left.\begin{aligned}S^4&=\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}\\ Sb&=\frac{M_0}{6\sqrt{EI_yC}}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(47)$$

とすれば

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}\cdot z^2\cdot\theta-\frac{(1-\xi)QzM_0}{EI_yC}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dz^2}+s^4z^2\theta-6s^3bz=0 \qquad \cdots\cdots(48)$$

この微分方程式の解は　$\theta=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$　とおいて

$$\theta=a_0\left(1-\frac{s^4z^4}{3\cdot4}+\frac{s^8z^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1z\left(1-\frac{s^4z^4}{4\cdot5}+\frac{s^8z^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}+bs^3z^3\left(1-\frac{s^4z^4}{6\cdot7}+\frac{s^8z^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(49)$$

境界條件は，$z=0$ に於て　$\theta=0$　$\therefore\quad a_0=0$

$$\therefore\quad \theta=a_1z\left(1-\frac{s^4z^4}{4\cdot5}+\frac{s^8z^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bs^3z^3\left(1-\frac{s^4z^4}{6\cdot7}+\frac{s^8z^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(50)$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{s^4z^4}{4}+\frac{s^8z^8}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bs^3z^2\left(3-\frac{s^4z^4}{6}+\frac{s^8z^8}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(51)$$

$z=\xi l$　に於て，　$s^4\xi^4l^4=u$　とすれば

$$\theta=a_1\xi l\left(1-\frac{s^4\xi^4l^4}{4\cdot5}+\frac{s^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bs^3\xi^3l^3\left(1-\frac{s^4\xi^4l^4}{6\cdot7}+\frac{s^8\xi^8l^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right)$$

$$=a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bs^3\xi^3l^3\left(1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(52)$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{s^4\xi^4l^4}{4}+\frac{s^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bs^3\xi^2l^2\left(3-\frac{s^4\xi^4l^4}{6}+\frac{s^8\xi^8l^8}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right)$$

$$=a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bs^3\xi^2l^2\left(3-\frac{u}{9}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(53)$$

(2)　$\xi l \leqq z \leqq l$ の場合

$M_x = Q\cdot\xi(l-z)$,　　$M_y = -M_0'$　　　なるを以て基本方程式は,

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dz^2}+Q^2\xi^2(l-z)^2\theta-Q\xi(l-z)M_0'=0 \quad \cdots\cdots(54)$$

$l-z=t$ とおく,

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dt^2}+Q^2\xi^2t^2\cdot\theta-Q\xi tM_0'=0 \quad \cdots\cdots(55)$$

$$\left.\begin{aligned} s'^4 &= \frac{\xi^2Q^2}{EI_yC} \\ s'b' &= \frac{M_0'}{6\sqrt{EI_yC}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(56)$$

とすれば, (55) 式は次の如くなる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+s'^4t^2\cdot\theta-6s'^3b't=0 \quad \cdots\cdots(57)$$

(57) を解けば, 前同様に

$$\theta=a_0'\left(1-\frac{s'^4t^4}{3\cdot4}+\frac{s'^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1't\left(1-\frac{s'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+b's'^3t^3\left(1-\frac{s'^4t^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots(58)$$

$z=l$ に於て, 即ち　　$t=l-z=0$　　$\therefore$　　$\theta=a_0'=0$

$$\theta=a_1't\left(t-\frac{s'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+b's'^3t^3\left(1-\frac{s'^4t^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\right) \quad \cdots\cdots(59)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left(1-\frac{s'^4t^4}{4}+\frac{s'^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\right)+b's'^3t^2\left(3-\frac{s'^4t^4}{6}+\frac{s'^8t^8}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots(60)$$

$z=\xi l$ に於て, $t=l-z=l(1-\xi)$ なれば,

$$\left.\begin{aligned} s'^4 &= \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2}s^4 \\ b's'^3 &= bs^3\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(61)$$

の如き關係があるから, (59), (60) 式より

$$\begin{aligned}\theta&=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right\}+b's'^3l^3(1-\xi)^3\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right\}\\ &=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}\\ &\quad+bs^3\xi^2(1-\xi)l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(62)\end{aligned}$$

$$-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}+bs^3\xi^2l^2\left\{3-\frac{u}{6}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(63)$$

そこで, $z=\xi l$ に於ては, θ 及び $d\theta/dz$ は左右より相等しとおき (52)=(62), (53)=(63)

$$\theta=a_1\xi l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right\}+bs^3\xi^3l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right\}$$

$$=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}+bs^3\xi^2(1-\xi)l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore\quad a_1\xi l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right\}-a_1'(1-\xi)l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$+bs^3\xi^3l^3\left[\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\frac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\cdots\cdots\right]=0 \quad\cdots\cdots(64)$$

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots=A\\&1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots=A'\\&\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\frac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\cdots\cdots=B\end{aligned}\right\}$$

とすれば,

$$a_1\xi\cdot l\cdot A-a_1'(1-\xi)l\cdot A'+bs^3\xi^3l^3\cdot B=0 \quad\cdots\cdots(65)$$

又

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bs^3\xi^2l^2\left(3-\frac{u}{6}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right)$$

$$+a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}+bs^3\xi^2l^2\left\{3-\frac{u}{6}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}=0$$

$$\therefore\quad a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$+bs^3\xi^2l^2\left[6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\cdots\cdots\right]=0 \quad\cdots\cdots(66)$$

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots=C\\&1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots=C'\\&6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\cdots\cdots=D\end{aligned}\right\}$$

とすれば,

$$a_1C+a_1'C'+bs^3\xi^2l^2\cdot D=0 \quad\cdots\cdots(67)$$

次に基本方程式,

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dz^2}\cdot\frac{1}{M_x}+(\theta M_x+M_y)=0$$

に於て

$$EI_y\int C\frac{d^2\theta}{dz^2}\cdot\frac{1}{M_x}\,dz=0$$

$$\therefore\quad -\int(\theta M_x+M_y)dz=0 \quad\cdots\cdots(68)$$

$0\leqq z\leqq\xi l$ に於て

$$\begin{cases} M_y=-M_0 \\ M_x=(1-\xi)\cdot Q\cdot z \end{cases}$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ に於て,

$$\begin{cases} M_y=-M_0' \\ M_x=Q\xi(l-z) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_{z=0}^{z=\xi l}\{6\sqrt{EI_yC}\cdot sb-s^2\cdot z\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\}dz-\int_{z=\xi l}^{z=l}\left\{6\sqrt{EI_yC}\cdot sb\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)s^2t\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\right\}dt=0 \quad\cdots\cdots(69)$$

$$\therefore\quad \int_{z=0}^{z=\xi l}(6\cdot s\cdot b-s^2\cdot z\cdot\theta)dz+\int_{z=l}^{z=\xi l}\left\{6\cdot s\cdot b\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)-\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)s^2t\cdot\theta\right\}dt=0$$

$$\therefore\quad \int_0^{\xi l}6\cdot s\cdot bdz-\int_0^{\xi l}s^2z\cdot\theta\cdot dz+\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t=0}^{t=l(1-\xi)}6\cdot sb\cdot dt-\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_0^{l(1-\xi)}s^2t\cdot\theta dt=0 \quad\cdots\cdots(70)$$

(70) 式に於て $\int_0^{\xi l}6\cdot s\cdot bdz=6\cdot s\cdot b\cdot\xi\cdot l$

$$\int_0^{\xi l}s^2z\cdot\theta dz=\frac{a_1}{s^2\xi l}\left\{\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{3\cdot4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\right\}+bs\xi l\left\{\frac{u}{5}-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\cdots\right\}$$

$$\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t=0}^{t=l(1-\xi)}6\cdot sb\cdot dt=6\cdot s\cdot b\cdot l\cdot\xi,$$

$$\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)_{t=0}^{t=l(1-\xi)}s^2t\cdot\theta\cdot dt=\frac{a_1'}{s^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\right\}$$
$$+b\cdot s\cdot\xi\cdot l\left\{\frac{u}{5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6-\cdots\right\}$$

なるを以て, (70) 式は

$$6\cdot s\cdot b\xi\cdot l-\frac{a_1}{s^2\xi l}\left\{\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\right\}-b\cdot s\cdot\xi l\left\{\frac{u}{5}-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\cdots\right\}$$
$$+6\cdot s\cdot b\cdot l\cdot\xi-\frac{a_1'}{s^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-3}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\right\}$$
$$-b\cdot s\cdot\xi\cdot l\left\{\frac{u}{5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6-\cdots\right\}=0 \quad\cdots\cdots(71)$$

$$\therefore\quad b\cdot s\cdot\xi\cdot l\left[12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\right]$$
$$-\frac{a_1}{s^2\xi l}\left\{\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\right\}-\frac{a_1'}{s^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right.$$
$$\left.+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\right\}=0 \quad\cdots\cdots(72)$$

今,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots=E \\ &\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots=E' \\ &12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots=F \end{aligned}\right\}$$

とすれば，

$$b\cdot s\cdot \xi l\cdot F-\frac{a_1}{s^2\xi l}E-\frac{a_1'}{s^2(1-\xi)l}\cdot E'=0 \quad \cdots\cdots(73)$$

故に，(65), (67), (73) の 3 式を再記すれば

$$\left.\begin{array}{ll}(65) & a_1\xi l\cdot A-a_1'(1-\xi)l\cdot A'+bs^3\xi^3l^3\cdot B=0\\ (67) & a_1C+a_1'C'+bs^2\xi^2l^2\cdot D=0\\ (73) & b\cdot s\cdot \xi lF-\dfrac{a_1}{s^2\xi l}E-\dfrac{a_1'}{s^2(1-\xi)l}E'=0\end{array}\right\}$$

この 3 式より a_1, a_1', b を消去すれば，次の如し。

$$\xi\cdot(A\cdot D-B\cdot C)\left\{C'F+\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)D\cdot E'\right\}+(CF+D\cdot E)\{(1-\xi)A'\cdot D+\xi BC'\}=0 \quad \cdots\cdots(74)$$

茲に，

$$A=1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots$$

$$A'=1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}
B=\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\dfrac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\dfrac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\dfrac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^7\right\}+\cdots\\
C=1-\dfrac{u}{4}+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\\
C'=1-\dfrac{u}{4}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\\
D=6-\dfrac{u}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\dfrac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\dfrac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots\\
E=\dfrac{u}{3}-\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots\\
E'=\dfrac{u}{3}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots\\
F=12-\dfrac{u}{5}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\dfrac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\dfrac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots
\end{array}\right\}(75)$$

表-9.

ξ	$\frac{1-\xi}{\xi}$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7$	$\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^8$
0.01	99.00	9 801	9.703×10^5	9.606×10^7	9.5099×10^9	9.4148×10^{11}	9.3207×10^{13}	9.2274×10^{15}
0.05	19.00	361	6 859	1.3032×10^5	2.4761×10^6	4.7046×10^7	8.9387×10^8	1.6984×10^{10}
0.10	9.00	81	729	6 561	59 049	5.3144×10^5	4.7830×10^6	4.3047×10^7
0.20	4.00	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
0.30	2.33	5.43	12.66	29.50	68.70	160.00	373.00	870.
0.40	1.50	2.25	3.38	5.07	7.60	11.40	17.10	25.70
0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

表-10.

ξ	$A=1-\dfrac{u}{4\cdot5}+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots$
全　値	$1-0.05\,u+0.0006\,94\,u^2-0.0000\,0444\,u^3+\cdots\cdots$

表-11.

ξ	$A'=1-\dfrac{u}{4\cdot5}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots$
0.01	$1-490.05\,u+66\,665\,u^2-4\,189\,587\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$1-18.05\,u+90.50\,u^2-209.20\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$1-4.05\,u+4.560\,u^2-2.36\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$1-0.80\,u+0.178\,u^2-0.0182\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$1-0.272\,u+0.0205\,u^2-0.0007\,12\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$1-0.1125\,u+0.0035\,2\,u^2-0.0000\,507\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$1-0.050\,u+0.0006\,94\,u^2-0.0000\,0444\,u^3+\cdots\cdots$

表-12.

ξ	$B=\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\dfrac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\dfrac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\dfrac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}\left\{1-\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^7\right\}+\cdots\cdots$
0.01	$-98+23\,102.3\,u-2\,058\,420\,u^2+96\,069\,403\,u^3-\cdots\cdots$
0.05	$-18+163.3\,u-535.95\,u^2+921.33\,u^3-\cdots\cdots$
0.10	$-8+17.33\,u-12.781\,u^2+4.930\,u^3-\cdots\cdots$
0.20	$-3+1.50\,u-0.2214\,u^2+0.0169\,u^3-\cdots\cdots$
0.30	$-1.33+0.278\,u-0.0146\,5\,u^2+0.0003\,83\,u^3-\cdots\cdots$
0.40	$-0.50+0.0567\,u-0.0014\,3\,u^2+0.0000\,166\,u^3-\cdots\cdots$
0.50	0

表-13.

ξ	$C=1-\dfrac{u}{4}+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots$
全　値	$1-0.25\,u+0.00625\,u^2-0.0000\,578\,u^3+\cdots\cdots$

表-14.

ξ	$C'=1-\dfrac{u}{4}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\dfrac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\dfrac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\dfrac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots$
0.01	$1-2\,450\,u+600\,373\,u^2-54\,483\,805\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$1-90.25\,u+814.50\,u^2-2\,722.60\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$1-20.25\,u+41.00\,u^2-30.70\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$1-4.00\,n+1.60\,u^3-0.237\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$1-1.357\,u+0.1845\,u^2-0.0092\,7\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$1-0.5625\,u+0.0317\,u^2-0.0006\,61\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$1-0.250\,u+0.0062\,5\,u^2-0.0000\,578\,u^3+\cdots\cdots$

表-15.

ξ	$D=6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots$
0.01	$6-1\,633.67\,u+228\,713.34\,u^2-14\,555\,970.15\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$6-60.33\,u+310.3\,u^2-727.36\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$6-13.67\,u+15.624\,u^2-8.216\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$6-2.833\,u+0.612\,u_2-0.0633\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$6-1.072\,u+0.0726\,u^2-0.0024\,9\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$6-0.542\,u+0.0144\,5\,u^2-0.0001\,92\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$6-0.333\,u+0.0047\,6\,u^2-0.0000\,31\,u^3+\cdots\cdots$

表-16.

ξ	$E=\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots$
全　値	$0.333\,u-0.0071\,5\,u^2+0.0000\,632\,u^3-\cdots\cdots$

表-17.

ξ	$E'=\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots$
0.01	$323\,433\,u-67\,927\,861\,u^2+5\,884\,259\,034\,u^3-\cdots\cdots$
0.05	$2\,286.3\,u-17\,686.4\,u^2+56\,431.3\,u^3-\cdots\cdots$
0.10	$243\,u-422.5\,u^2+302.5\,u^3-\cdots\cdots$
0.20	$21.3\,u-7.32\,u^2+1.035\,u^3-\cdots\cdots$
0.30	$4.22\,u-0.492\,u^2+0.0235\,5\,u^3-\cdots\cdots$
0.40	$1.127\,u-0.0543\,u^2+0.0010\,8\,u^3-\cdots\cdots$
0.50	$0.333\,u-0.0071\,5\,u^2+0.0000\,632\,u^3-\cdots\cdots$

表-18.

ξ	$F=12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots$
0.01	$12-1\,960.40\,u+245\,126\,u^2-15\,675\,660\,u^3+\cdots\cdots$
0.05	$12-72.40\,u+344.8\,u^2-783.30\,u^3+\cdots\cdots$
0.10	$12-16.40\,u+17.36\,u^2-8.849\,u^3+\cdots\cdots$
0.20	$12-3.40\,u+0.68\,u^2-0.0683\,u^3+\cdots\cdots$
0.30	$12-1.287\,u+0.0807\,5\,u^2-0.0026\,82\,u^3+\cdots\cdots$
0.40	$12-0.650\,u+0.0160\,5\,u^2-0.0002\,065\,u^3+\cdots\cdots$
0.50	$12-0.40\,u+0.0052\,9\,u^2-0.0000\,333\,u^3+\cdots\cdots$

そこで，(74) 式を滿足する u の最小値を ξ の各値に對して求むれば，表-19, 20 の如し。

表-19.

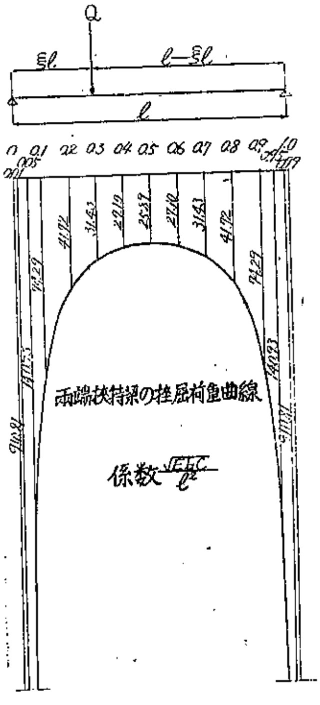
ξ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
u	0.00813	0.1120	0.4470	1.782	3.920	6.771	10.470

表-20.

ξ	u	$\sqrt{u}$	$1-\xi$	$\xi^2(1-\xi)$	$Q=\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	
0.01	0.0081 3	0.0901 7	0.99	0.0000 99	910.81	$\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	0.1120	0.3347	0.95	0.0023 75	140.93	〃
0.10	0.4470	0.6686	0.90	0.009	74.29	〃
0.20	1.782	1.3350	0.80	0.032	41.72	〃
0.30	3.920	1.980	0.70	0.063	31.43	〃
0.40	6.771	2.602	0.60	0.096	27.10	〃
0.50	10.470	3.236	0.50	0.125	25.89	〃

この結果を圖示すれば 圖-13 の如し。

圖-13.



6. 雨端固定梁の挫屈

こゝで取扱ふ雨端固定梁とは，雨端は垂直，水平雨變位に對し固定された場合，即ち，完全なる雨端固定梁を意味するものである。勿論，軸張力の働く完全固定梁の意味ではない。

圖-14.(側面)

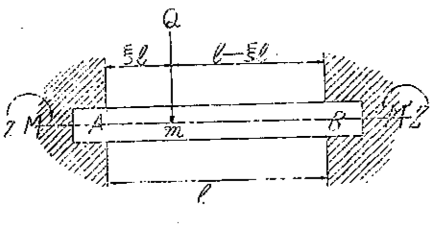


圖-15.(断面)

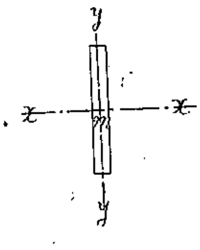
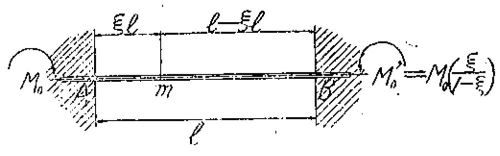


圖-16.(平面)



この場合は，雨端挟持梁の場合と同様，鉛直軸の周りの偶力 M_0, M_0' が作用する。故に，圖-16 に於て，m 點に假想の水平力 Q_0 が作用すると假定すれば，A 點及び B 點に於て，M_0 及び M_0' は夫々

$$M_0=-\frac{Q_0\xi l(l-\xi l)^2}{l^2}=-Q_0\cdot l\cdot\xi(1-\xi)^2$$

$$M_0'=-\frac{Q_0\xi^2l^2(l-\xi l)}{l^2}=-Q_0\cdot l\cdot\xi^2(1-\xi)$$

$$\therefore\quad M_0'=-Q_0l\cdot\xi(1-\xi)\cdot\xi=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$$

今，基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0 \quad\cdots\cdots(76)$$

に於て

(1) $0\leqq z\leqq\xi l$ の場合

$$M_x=Q\frac{(l-\xi l)^2\{(l+2\xi l)z-\xi l^2\}}{l^3}=Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)$$

∴ (76) 式は，

$$CEI_y\frac{d^2\theta}{dz^2}+Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)\cdot\{\theta\cdot Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)-M_0\}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2(1-\xi)^4(z+2\xi z-\xi l)^2\cdot\theta}{CEI_y}-\frac{Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)}{CEI_y}M_0=0 \quad\cdots\cdots(77)$$

$z+2\xi z-\xi l=t$ と置く。

$$\frac{dt}{dz}=1+2\xi,\qquad \frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt}(1+2\xi),\qquad \frac{d^2\theta}{dz^2}=(1+2\xi)^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore\quad (1+2\xi)^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Q^2(1-\xi)^4t^2\cdot\theta}{EI_y\cdot C}-\frac{Q(1-\xi)^2\cdot t}{EI_y\cdot C}M_0=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{(1-\xi)^4\cdot Q^2}{(1+2\xi)^2EI_y\cdot C}t^2\cdot\theta-\frac{(1-\xi)^2Q}{(1+2\xi)^2EI_y\cdot C}t\cdot M_0=0 \quad\cdots\cdots(78)$$

茲に

$$\left.\begin{aligned} s^4&=\frac{(1-\xi)^4}{(1+2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_y\cdot C}\\ sb&=\frac{1}{6(1+2\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(79)$$

とすれば，(78) 式は，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+s^4t^2\cdot\theta-6s^3b\cdot t=0 \quad\cdots\cdots(80)$$

この微分方程式の解は $\theta=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdots$ とおいて

$$\theta=a_0\left(1-\frac{s^4t^4}{3\cdot4}+\frac{s^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}t^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)+a_1t\left(1-\frac{s^4t^4}{4\cdot5}+\frac{s^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)$$
$$+bs^3t^3\left(1-\frac{s^4t^4}{6\cdot7}+\frac{s^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s^{12}t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right) \quad\cdots\cdots(81)$$

境界條件より，

(i) $z=0$ に於て

$\theta=0$ ，即ち，$t=z+2\xi z-\xi l=-\xi l$ に於て，$\theta=0$

$$\therefore \quad \theta=a_0\left\{1-\frac{s^4\xi^4l^4}{3\cdot4}+\frac{s^8\xi^8l^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}\xi^{12}l^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-a_1\xi l\left\{1-\frac{s^4\xi^4l^4}{4\cdot5}+\frac{s^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}\xi^{12}l^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right\}-bs^3\xi^3l^3\left\{1-\frac{s^4\xi^4l^4}{6\cdot7}+\frac{s^8\xi^8l^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s^{12}\xi^{12}l^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}=0 \quad \cdots\cdots(82)$$

(ii) $z=\xi l$ に於て,

即ち, $t=z+2\xi z-\xi l=\xi l+2\xi^2l-\xi l=+2\xi^2l$

(81) 式より,

$$\theta=a_0\left\{1-\frac{s^4(2\xi^2l)^4}{3\cdot4}+\frac{s^8(2\xi^2l)^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+a_1(2\xi^2l)\left\{1-\frac{s^4(2\xi^2l)^4}{4\cdot5}+\frac{s^8(2\xi^2l)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+bs^3(2\xi^2l)^3\cdot\left\{1-\frac{s^4(2\xi^2l)^4}{6\cdot7}+\frac{s^8(2\xi^2l)^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(83)$$

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt}\cdot(1+2\xi)=\left\{a_0\left(-\frac{s^4t^3}{3}+\frac{s^8t^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{s^{12}t^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right)+a_1\left(1-\frac{s^4t^4}{4}+\frac{s^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{s^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right)\right.$$

$$\left.+bs^3t^2\left(3-\frac{s^4t^4}{6}+\frac{s^8t^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{s^{12}t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots\right)\right\}\cdot(2\xi+1)$$

$\therefore$ $z=\xi l$ 即ち, $t=+2\xi^2l$ に於て,

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=\left[a_0\left\{-\frac{s^4(2\xi^2l)^3}{3}+\frac{s^8(2\xi^2l)^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right\}+a_1\left\{1-\frac{s^4(2\xi^2l)^4}{4}+\frac{s^8(2\xi^2l)^8}{4\cdot5\cdot8}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right\}+bs^3(2\xi^2l)^2\left\{3-\frac{s^4(2\xi^2l)^4}{6}+\frac{s^8(2\xi^2l)^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{s^{12}(2\xi^2l)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}\right]\cdot(2\xi+1)\cdots(84)$$

(2) $\xi l\leqq z\leqq l$ の場合

基本方式程

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0 \quad に於て$$

$$M_x=Q\frac{(\xi l)^2}{l^3}[l\{l+(l-\xi l)\}-\{l+2(l-\xi l)\}z]=Q\cdot\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}$$

$$M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right), \qquad M_y=-M_0'$$

∴ 基本方程式は

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{\theta\cdot Q^2}{EI_y}\xi^4\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}^2+\frac{Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}}{EI_y}\cdot\left\{-M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\right\}=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2\xi^4\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}^2}{CEI_y}\cdot\theta-\frac{Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)M_0}{CEI_y}=0 \quad\cdots\cdots(85)$$

$l(2-\xi)-(3-2\xi)z=t'$ と置く。

$$\frac{dt'}{dz}=-(3-2\xi), \quad \frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt'}\{-(3-2\xi)\}, \quad \frac{d^2\theta}{dz^2}=(3-2\xi)^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt'^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt'^2}(3-2\xi)^2+\frac{\xi^4Q^2}{CEI_y}t'^2\cdot\theta-\frac{\xi^2Q\left(\dfrac{\xi}{1-\xi}\right)}{CEI_y}t'\cdot M_0=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dz'^2}+\frac{\xi^4Q^2}{(3-2\xi)^2EI_yC}\cdot t'^2\cdot\theta-\frac{\xi^2\left(\dfrac{\xi}{\xi-1}\right)Q}{(3-2\xi)^2\cdot EI_yC}t'\cdot M_0=0 \quad\cdots\cdots(86)$$

今

$$\left.\begin{aligned} s'^4&=\frac{\xi^4}{(3-2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_yC}\\ s'b'&=\frac{\xi}{6(3-2\xi)(1-\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(87)$$

とすれば，(86) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2}+s'^4t'^2\cdot\theta-6s'^3b't'=0 \quad\cdots\cdots(88)$$

この微分方程式の解は，

$$\theta=a_0'\left(1-\frac{s'^4t'^4}{3\cdot4}+\frac{s'^8t'^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s'^{12}t'^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right)+a_1't'\left(1-\frac{s'^4t'^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8t'^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}t'^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right)$$
$$+b's'^3t'^3\left(1-\frac{s'^4t'^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8t'^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s'^{12}t'^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right)\quad\cdots\cdots(89)$$

(i) $z=l$ に於て，

$$\theta=0$$

$$\therefore \quad t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)z=l(2-\xi)-(3-2\xi)\cdot l=-l(1-\xi)$$

$$\therefore \quad \theta=a_0'\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{3\cdot4}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}$$
$$-a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$
$$-b's'^3l^3(1-\xi)^3\left\{1-\frac{s'^4l^4(1-\xi)^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8l^8(1-\xi)^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}=0\quad\cdots\cdots(90)$$

(ii) $z=\xi l$ に於て，

$$t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)\xi l=2l(1-\xi)^2$$

$$\therefore \quad \theta=a_0'\left\{1-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{3\cdot4}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}$$
$$+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}\left\{1-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{4\cdot5}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$
$$+b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^3\left\{1-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{6\cdot7}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}\quad\cdots(91)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=\frac{d\theta}{dt'}\{-(3-2\xi)\}=-(3-2\xi)\left\{a_0'\left(-\frac{s'^4t'^3}{3}+\frac{s'^8t'^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{s'^{12}t'^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right)\right.$$
$$\left.+a_1'\left(1-\frac{s'^4t'^4}{4}+\frac{s'^8t'^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{s'^{12}t'^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right)+b's'^3t'^2\left(3-\frac{s'^4t'^4}{6}+\frac{s'^8t'^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{s'^{12}t'^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\right)\right\}$$
$$=-(3-2\xi)\left\{a_0'\left[-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^3}{3}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)\}^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]\right.$$

$$+a_1'\left[1-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{4}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right]$$

$$+b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^2\left[3-\frac{s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{6}+\frac{s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\right]\Big\} \quad \cdots\cdots(92)$$

以上の式に於て，$s^4\xi^4l^4=u$ とすれば，(82) 式より，

$$\theta=a_0\left\{1-\frac{u}{3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}-a_1\xi l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$

$$-bs^3\xi^3l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}=0 \quad \cdots\cdots(93)$$

(83) 式に於て，

$$s^4(2\xi^2l)^4=(2\xi)^4\cdot u, \qquad s^8(2\xi^2l)^8=(2\xi)^8u^2, \qquad s'^{12}(2\xi^2l)^{12}=(2\xi)^{12}u^3 \qquad \text{なる故}$$

$$\theta=\Big[a_0\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}+a_1(2\xi^2l)\Big\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4\cdot5}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}$$

$$-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\Big\}+bs^3(2\xi^2l)^3\left\{1-\frac{(2\xi)^4u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}\Big] \cdots(94)$$

(84) 式に於て，

$$s^4(2\xi^2l)^3=\frac{(2\xi)^3\cdot u}{\xi l}, \qquad s^8(2\xi^2l)^7=\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{\xi l}, \qquad s^{12}(2\xi^2l)^{11}=\frac{(2\xi)^{11}u^3}{\xi l}$$

なるを以て，

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}\left\{-\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{(2\xi)^{11}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right\}$$

$$+a_1(2\xi+1)\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right\}$$

$$+bs^3(2\xi^2l)^2(2\xi+1)\left\{3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(95)$$

次ぎに，(79) 式と (87) 式より，

$$\left.\begin{aligned} s'^4&=s^4\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^4 \\ s'b'&=sb\cdot\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(96)$$

$$b's'^3=s^3b\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^3 \quad \cdots\cdots(97)$$

故に，

$$s'^4l^4(1-\xi)^4=u\cdot\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2, \qquad s'^8l^8(1-\xi)^8=u^2\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4, \qquad s'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}=u^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6$$

なるを以て，(90) 式は，

$$\theta=a_0'\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}$$

$$-a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}$$

$$-bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3\cdot l^3\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}=0 \qquad \cdots\cdots(98)$$

又，(91) 式は，

$$s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u, \qquad s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2,$$

$$s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3, \qquad b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^3=bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3$$

$$\therefore \quad \theta=a_0'\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12}+\cdots\right]$$

$$+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-3\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2)1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right]$$

$$+bs^3\cdot\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right] \qquad \cdots\cdots(99)$$

又，(92) 式は，

$$s'^4\{2l(1-\xi)^2\}^3=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\frac{\{2(1-\xi)\}^3}{(1-\xi)\cdot l}\cdot u, \qquad s'^8\{2l(1-\xi)^2\}^7=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\frac{\{2(1-\xi)\}^7}{(1-\xi)l}\cdot u^2$$

$$s'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{11}=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot\frac{\{2(1-\xi)\}^{11}}{(1-\xi)l}\cdot u^3,$$

$$b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^2(3-2\xi)=bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)\frac{\xi^3}{(1-\xi)^3}\cdot\{2l(1-\xi)^2\}^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=-a_0'(3-2\xi)\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\frac{\{2(1-\xi)\}^3}{(1-\xi)l}\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot\frac{\{2(1-\xi)\}^7}{(1-\xi)l}\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot\frac{\{2(1-\xi)\}^{11}}{(1-\xi)l}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]-a_1'(3-2\xi)\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right]+bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)\left(\frac{\xi^3}{(1-\xi)^3}\right)\{2l(1-\xi)^2\}^2$$

$$\times\left[3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\right]$$

$$=-a_0'(3-2\xi)\frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{(2-\xi)\}^2\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot\{2(1-\xi)\}^6\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{10}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]$$

$$-a_1'(3-2\xi)\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right]$$

$$-bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3\cdot(2l)^2\cdot\left[3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{6\cdot7\cdot10}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\right]\cdots\cdots(100)$$

そこで，$z=\xi l$ に於ては，θ 及び $d\theta/dz$ は左右より相等し。即ち，(94)=(99)，(95)=(100) とおいて，

$$\theta=a_0\left\{1-\frac{(2\xi)^4u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right\}+a_1(2\xi^2l)\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4\cdot5}\right.$$
$$\left.+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right\}+bs^3(2\xi^2l)^3\left\{1-\frac{(2\xi)^4u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}=a_0'\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right]+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right]$$
$$+bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right]\cdots\cdots(101)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}\left\{-\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{(2\xi)^7\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right\}$$
$$+a_1(2\xi+1)\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right\}$$
$$+bs^3(2\xi^2l)^2(2\xi+1)\left\{3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right\}$$
$$=-a_0'(3-2\xi)\frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\{2(1-\xi)\}^2}{3}u+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot\{2(1-\xi)\}^6u^2}{3\cdot4\cdot7}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot\{2(1-\xi)\}^{10}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]-a_1'(3-2\xi)\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\right]$$
$$-bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3(2l)^2\left[3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^{6}\{2(1-\xi)\}^{12}u^{3}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\Bigg]\cdots\cdots(102)$$

次に，基本方程式

$$EI_y\,C\frac{d^2\theta}{dz^2}\cdot\frac{1}{M_x}+(\theta M_x+M_y)=0\ \text{に於て}$$

$$EI_y\int C\frac{d^2\theta}{dz^2}\frac{1}{M_x}dz=0$$

$$\therefore\quad -\int(\theta M_x+M_y)dz=0\cdots\cdots(103)$$

$0\leqq z\leqq\xi l$ に於て，

$$\left.\begin{aligned}&M_y=-M_0\\&M_x=Q(1-\xi)^2(z+2\xi Z-\xi l)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(104)$$

$$\left.\begin{aligned}&s^4=\frac{(1-\xi)^4}{(1+2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_yC}\\&sb=\frac{1}{6(1+2\xi)}\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(105)$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ に於て

$$\left.\begin{aligned}&M_y=-M_0'=-M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\\&M_x=Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(106)$$

$$\left.\begin{aligned}&s'^4=\frac{\xi^4}{(3-2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_yC}\\&s'b'=\frac{\xi}{6(3-2\xi)(1-\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(107)$$

$$\therefore\quad\int_{z=0}^{z=\xi l}[M_0-Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)\theta]dz+\int_{z=\xi l}^{z=l}[M_0'-Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}\theta]dz=0\ (108)$$

而して，　$0\leqq z\leqq\xi l$ の場合，

$$M_0=6(1+2\xi)sb\cdot\sqrt{EI_yC},\quad Q=s^2\frac{(1+2\xi)}{(1-\xi)^2}\sqrt{EI_yC}$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ の場合

$$M_0=\frac{6(3-2\xi)(1-\xi)}{\xi}s'b'\sqrt{EI_yC},\quad Q=s'^2\cdot\frac{(3-2\xi)}{\xi^2}\sqrt{EI_yC},$$

$$M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)=6(3-2\xi)s'b'\sqrt{EI_yC}$$

なるを以て，(108) 式は

$$\int_{z=0}^{z=\xi l}[6(1+2\xi)s\cdot b\cdot\sqrt{EI_yC}-(1+2\xi)(z+2\xi z-\xi l)\cdot s^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}]dz$$

$$+\int_{z=\xi l}^{z=l}[6(3-2\xi)s'b'\sqrt{EI_yC}-(3-2\xi)\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}s^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}]dz=0\quad\cdots(109)$$

今，　$0\leqq z\leqq\xi l$ に於て，　$t=z+2\xi z-\xi l$　なる故　$\dfrac{dt}{dz}=1+2\xi$

$$\therefore\quad dz=\left(\frac{1}{1+2\xi}\right)dt,\ z=0 \text{ なら } t=-\xi l \quad z=\xi l \text{ なら } t=+2\xi^2 l$$

又 $\xi l\leqq z\leqq l$ に於て, $t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)z$ なる故 $\frac{dt'}{dz}=-(3-2\xi)$

$$\therefore\quad dz=-\frac{1}{(3-2\xi)}dt' \quad z=\xi l \text{ なら } t'=2l(1-\xi)^2 \quad z=l \text{ なら } t'=-l(1-\xi)$$

∴ (109) 式は $\int_{z=0}^{z=\xi l}\{6(1+2\xi)\cdot s\cdot b\sqrt{EI_yC}-(1+2\xi)\cdot t\cdot s^2\cdot\theta\cdot\sqrt{EI_yC}\}\left(\frac{1}{1+2\xi}\right)dt$

$$+\int_{z=\xi l}^{z=l}\left\{6(3-2\xi)\cdot sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\sqrt{EI_yC}\right.$$

$$\left.-(3-2\xi)t'\cdot s^2\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\right\}\left\{\frac{1}{(3-2\xi)}\right\}dt'=0$$

$$\therefore\quad 6\cdot s\cdot b\int_{t=-\xi l}^{t=+2\xi^2 l}dt-s^2\int_{t=-\xi l}^{t=+2\xi^2 l}\left[a_0\left(t-\frac{s^4t^5}{3\cdot4}+\frac{s^8t^9}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s^{12}t^{13}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right)\right.$$

$$+a_1\left(t^2-\frac{s^4t^6}{4\cdot5}+\frac{s^8t^{10}}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s^{12}t^{14}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right)+bs^3\left(t^4-\frac{s^4t^8}{6\cdot7}+\frac{s^8t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{s^{12}t^{16}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right)\right]dt-6\cdot sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t'=+2l(1-\xi)^2}^{t'=-l(1-\xi)}dt'$$

$$+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\cdot s^2\int_{t'=+2l(1-\xi)^2}^{t'=-l(1-\xi)}\left[a_0'\left(t'-\frac{s'^4t'^5}{3\cdot4}+\frac{s'^8t'^9}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{s'^{12}t'^{13}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\right)\right.$$

$$+a_1'\left(t'^2+\frac{s'^4t'^6}{4\cdot5}+\frac{s'^8t'^{10}}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{s'^{12}t'^{14}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\right)$$

$$\left.+b's'^3\left(t'^4-\frac{s'^4t'^8}{6\cdot7}+\frac{s'^8t'^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{s^{12}t'^{16}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\right)\right]dt'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(110)$$

$$\therefore\quad 6\cdot s\cdot b\xi l(2\xi+1)-a_0(2\xi^2l)^2s^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\right\}$$

$$-a_1(2\xi^2l)^3s^2\left\{\frac{1}{3}-\frac{(2\xi)^4u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\right\}$$

$$-bs^5(2\xi^2l)^5\left\{\frac{1}{5}-\frac{(2\xi)^4u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{(2\xi)^8u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\right\}$$

$$+a_0(\xi l)^2s^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\right\}$$

$$-a_1(\xi l)^3s^2\left\{\frac{1}{3}-\frac{u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\right\}$$

$$-bs^5(\xi l)^5\left\{\frac{1}{5}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\right\}$$

$$+6\cdot sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)l(1-\xi)(3-2\xi)$$

$$+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\cdot s^2\cdot\left[a_0'l^2(1-\xi)^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\right\}-a_1'l^3(1-\xi)^3\left\{\frac{1}{3}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5\cdot7}\right.$$

$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\Bigg\}-b's'^3l^5(1-\xi)^5\Bigg\{\frac{1}{5}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2 u}{6\cdot7\cdot9}$$

$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}-\cdots\Bigg\}-a_0'\{2l(1-\xi)^2\}^2\Bigg\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot4\cdot6}$$

$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\Bigg\}$$

$$-a_1'\{2l(1-\xi)^2\}^3\Bigg\{\frac{1}{3}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\Bigg\}-b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^5\Bigg\{\frac{1}{5}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot7\cdot9}$$

$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\Bigg\}\Bigg]=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(111)$$

$$a_0(2\xi^2l)^2s^2=a_0(\xi l)^2s^2(2\xi)^2,\quad a_1(2\xi^2l)^3s^2=a_1(\xi l)^3s^2(2\xi)^3$$

$$bs^5(2\xi^2l)^5=bs^5(\xi l)^5(2\xi)^5,\quad b's'^3l^5(1-\xi)^5=bs^3\cdot\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3(1-\xi)^2l^5$$

$$a_0'\{2l(1-\xi)^2\}^2=a_0'l^2(1-\xi)^2\{2(1-\xi)\}^2\quad a_1'\{2l(1-\xi)^2\}^3=a_1'l^3(1-\xi)^3\{2(-\xi)\}^3$$

$$b's'^3\{2l(1-\xi)^2\}^5=bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\frac{\xi^3}{(1-\xi)^3}\cdot l^5(1-\xi)^5\{2(1-\xi)\}^5$$

なる故 (111) 式は次の如くなる.

$$12\cdot sb\cdot\xi l(2\xi+1)-a_0s^2(\xi l)^2\left[\frac{1}{2}\{(2\xi)^2-1\}-\frac{u}{3\cdot4\cdot6}\{(2\xi)^6-1\}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\{(2\xi)^{10}-1\}\right.$$

$$\left.-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\{(2\xi)^{14}-1\}+\cdots\right]-a_1s^2(\xi l)^3\left[\frac{1}{3}\{(2\xi)^3+1\}-\frac{u}{4\cdot5\cdot7}\{(2\xi)^7+1\}\right.$$

$$\left.+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\{(2\xi)^{11}+1\}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\{(2\xi)^{15}+1\}+\cdots\right]$$

$$-bs^5\xi^5l^5\left[\frac{1}{5}\{(2\xi)^5+1\}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}\{(2\xi)^9+1\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\{(2\xi)^{13}+1\}\right.$$

$$\left.-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\{(2\xi)^{15}+1\}+\cdots\right]+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)a_0'l^2s^2\xi^2\left[\frac{1}{2}[1-\{2(1-\xi)\}^2]\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}[1-\{2(1-\xi)\}^6]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}[1-\{2(1-\xi)\}^{10}]-$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}[1-\{2(1-\xi)\}^{14}]+\cdots\right]-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)a_1's^2l^3\xi^2\left[\frac{1}{3}[1+\{2(1-\xi)\}^3]\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5\cdot7}[1+\{2(1-\xi)\}^7]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}[1+\{2(1-\xi)\}^{11}]$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3 \cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]+\cdots\Big]$$

$$-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3 b\cdot s^5\xi^5 l^5\Bigg[\frac{1}{5}[1+\{2(1-\xi)\}^5]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7\cdot9}[1+\{2(1-\xi\}^9]$$

$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot13}[1+\{2(1-\xi)\}^{13}]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]$$

$$+\cdots\cdots\Bigg]=0 \quad\cdots\cdots\cdots(112)$$

(93), (98), (101), (102), (112) 式に於て

$$1-\frac{u}{3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdot=A$$

$$1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdot=B$$

$$1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdot=C$$

$$1-\frac{(2\xi)^4 u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8 u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdot=A_1$$

$$1-\frac{(2\xi)^4 u}{4\cdot5}+\frac{(2\xi)^8 u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdot=B_1$$

$$1-\frac{(2\xi)^4 u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8 u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{(2\xi)^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdot=C_1$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdot=A_2$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^{23}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdot=B_2$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8 u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdot=C_2$$

$$-\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{(2\xi)^{11}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdot=D$$

$$1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdot=E$$

$$3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+:\cdots=F$$

$$\frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\{2(1-\xi)\}^2\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^6 u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{10}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]=D_1$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4 u}{4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot\{2(1-\xi)\}^8 u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdot=E_1$$

$$3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots=F_1$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-4\xi}\right)^2 u}{3\cdot4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots=A_3$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-4\xi}\right)^4 u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots=B_3$$

$$1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots=C_3$$

$$\frac{1}{2}\{(2\xi)^2-1\}-\frac{u}{3\cdot4\cdot6}\{(2\xi)^6-1\}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\{(2\xi)^{10}-1\}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\{(2\xi)^{14}-1\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots=G_1$$

$$\frac{1}{3}\{(2\xi)^3+1\}-\frac{u}{4\cdot5\cdot7}\{(2\xi)^7+1\}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\{(2\xi)^{11}+1\}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\{(2\xi)^{15}+1\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots=H_1$$

$$\frac{1}{5}\{(2\xi)^5+1\}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}\{(2\xi)^9+1\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\{2\xi)^{13}+1\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\{(2\xi)^{15}+1\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots=I_1$$

$$\frac{1}{2}[1-\{2(1-\xi)\}^2]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}[1-\{2(1-\xi)\}^6]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}[1-\{2(1-\xi)\}^{10}]$$
$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}[1-\{2(1-\xi)\}^{14}]+\cdots\cdots\cdots=G_2$$

$$\frac{1}{3}[1+\{2(1-\xi)\}^3]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2 u^2}{4\cdot5\cdot7}[1+\{2(1-\xi)\}^7]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}[1+\{2(1-\xi\}^{11}]-$$
$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]+\cdots\cdots\cdots=H_2$$

$$\frac{1}{5}[1+\{2,1-\xi)\}^5]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3\cdot u}{6\cdot7\cdot9}[1+\{2(1-\xi)\}^9]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot13}[1+\{2(1-\xi)\}^{13}]$$
$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]+\cdots\cdots\cdots=I_2$$

とすれば、(93) 式は、

$$a_0A-a_1\xi\cdot l\cdot B-bs^3\xi^3l^3\cdot C=0 \quad\cdots\cdots(114)$$

(101) 式は

$$a_0A_1+a_1(2\xi^2l)\cdot B_1+bs^3(2\xi^2l)^3\cdot C_1=a_0'A_2+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}B_2$$
$$+bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3\cdot C_2 \quad\cdots\cdots(115)$$

(102) 式は

$$a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}D+a_1(2\xi+1)\cdot E+bs^3(2\xi^2 l)^2(2\xi+1)\cdot F=-a_0'(3-2\xi)\cdot D_1-a_1'(3-2\xi)E_1$$

$$-bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3\cdot(2l)^2\cdot F_1 \quad\cdots\cdots(116)$$

(98) 式は

$$a_0'A_3-a_1'l(1-\xi)\cdot B_3-bs^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3 l^3\cdot C_3=0 \quad\cdots\cdots(117)$$

(112) 式は

$$12\cdot sb\xi l(2\xi+1)-a_0 s^2(\xi l)^2\cdot G_1-a_1 s^2(\xi l)^3\cdot H_1-bs^5\xi^5 l^5\cdot I_1$$

$$+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)a_0' l^2 s^2\xi^2\cdot G_2-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)a_1' s^2 l^3\xi^2\cdot H_2-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3\cdot b\cdot s^5\xi^5 l^5\cdot I_2=0 \quad\cdots\cdots(118)$$

以上の式に於て

$$\left.\begin{aligned}&12(2\xi+1)-s^4\xi^4 l^4 I_1-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3 I_2=X\\&\xi\cdot F+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)F_1=Y\\&\xi^3\cdot C_1-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2(1-\xi)^3\cdot C_2=Z\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(119)$$

とし，整頓すれば次の如し。

(114) 式は

$$a_0[A]+a_1[-\xi l\cdot B]+b\cdot[-s^3\xi^3 l^3\cdot C]=0 \quad\cdots\cdots(114)'$$

(115) 式は

$$a_0[A_1]+a_1[(2\xi^2 l)\cdot B]+a_0'[-A_2]+a_1'[-\{2l(1-\xi)^2\}B_2]+b[s^3(2l\xi)^3\cdot z]=0 \quad\cdots\cdots(115)'$$

(116) 式は

$$a_0\left[\left(\frac{2\xi+1}{\xi l}\right)D\right]+a_1[(2\xi+1)\cdot E]+a_0'[3-2\xi]\cdot D_1]+a_1'[(3-2\xi)\cdot E_1]$$

$$+b[s^3(2l)^2\xi^3(2\xi+1)\cdot Y]=0 \quad\cdots\cdots(116)'$$

(117) 式は

$$a_0'[A_3]+a_1'[-l(1-\xi)\cdot B_3]+b\left[-s^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3 l^3\cdot C_3\right]=0 \quad\cdots\cdots(117)'$$

(118) 式は

$$a_0[-s(\xi l)G_1]+a_1[-s(\xi l)^2 H_1]+a_0'\left[\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)l\cdot s\cdot\xi\cdot G_2\right]$$

$$+a_1'\left[-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)sl^2\xi\cdot H_2\right]+b[X]=0 \quad\cdots\cdots(118)'$$

そこで，今

①$=A$　③$=s^2(2l\xi)Z$　⑤$=-l(1-\xi)B_3$

②$=-\xi l\cdot B$　④$=\left(\frac{2\xi+1}{\xi l}\right)\cdot D$　⑥$=-s^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\xi^3 l^3\cdot C_3$

⑦$=-s^3\xi^3l^3C$　⑫$=(2\xi+1)E$　⑰$=-s(\xi l)G_1$

⑧$=A_1$　⑬$=(3-2\xi)D_1$　⑱$=-s(\xi l)^2\cdot H_1$

⑨$=(2\xi^2l)\cdot B_1$　⑭$=(3-2\xi)E_1$　⑲$=\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)s\cdot\xi lG_2$　……(120)

⑩$=-A_2$　⑮$=s^3(2l)^2\xi^3(2\xi+1)\cdot Y$　⑳$=-\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)s\xi l^2H_2$

⑪$=-\{2l(1-\xi)^2\}B_3$　⑯$=A_3$　㉑$=X$

とすれば，(114)', (115)', (116)', (117)', (118)' 式は夫々次の如くなる．

①a_0+②a_1+③$b=0$ ……(121)

④a_0+⑤a_1+⑥a_0'+⑦a_1'+⑧$b=0$ ……(122)

⑨a_0+⑩a_1+⑪a_0'+⑫a_1'+⑬$\cdot b=0$ ……(123)

⑭a_0'+⑮a_1'+⑯$\cdot b=0$ ……(124)

⑰a_0+⑱a_1+⑲a_0'+⑳a_1'+㉑$b=0$ ……(125)

(121), (122), (123), (125) 式より，a_0, a_1 を消去すれば，次の 2 式が得られる。

a_0'\{(⑥⑨−⑪④)(②④−⑤①)+⑥①(⑤⑨−⑩④)\}+a_1'\{(⑦⑨−⑫④)(②④−⑤①)
+⑦①(⑤⑨−⑩④)\}+\{(⑧⑨−⑬④)(②④−⑤①)
−(③④−⑧①)(⑤⑨−⑩④)\}$b=0$ ……(126)

a_0'\{(⑥⑨−⑪④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑪⑰−⑲⑨)(⑤⑨−⑩④)\}
+a_1'\{⑦⑨−⑫④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑫⑰−⑳⑨)(⑤⑨−⑩④)\}
+b\{(⑧⑨−⑬④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑬⑰−㉑⑨)(⑤⑨−⑩④)\}=0 ……(127)

そこで (126), (127), (124) 式に於て

α=(⑥⑨−⑪④)(②④−⑤①)+⑥①(⑤⑨−⑩④)=⑥⑨②④−⑪④②④
+⑪④⑤①−⑥①⑩④

β=(⑦⑨−⑫④)(②④−⑤①)+⑦①(⑤⑨−⑩④)=⑦⑨②④−⑫④②④
+⑫④⑤①−⑦①⑩④

γ=(⑧⑨−⑬④)(②④−⑤①)−(③④−⑧①)(⑤⑨−⑩④)=⑧⑨②④
−⑬④②④+⑬④⑤①−③④⑤⑨+③④⑩④−⑧①⑩④

α'=(⑥⑨−⑪④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑪⑰−⑲⑨)(⑤⑨−⑩④)=⑥⑨⑩⑰
−⑥⑨⑱⑨+⑪④⑱⑨−⑪⑰⑤⑨+⑲⑨⑤⑨−⑲⑨⑩④

β'=(⑦⑨−⑫④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑫⑰−⑳⑨)(⑤⑨−⑩④)=⑦⑨⑩⑰
−⑦⑨⑱⑥+⑫④⑱⑨−⑫⑰⑤⑨+⑳⑨⑤⑨−⑳⑨⑩④

γ'=(⑧⑨−⑬④)(⑩⑰−⑱⑨)−(⑬⑰−㉑⑨)⑤(⑨−⑩④)=⑧⑨⑩⑰
−⑧⑨⑱⑨+⑬④⑱⑨−⑬⑰⑤⑨+㉑⑨⑤⑨−㉑⑨⑩④

とすれば

(126) 式より

$a_0'\alpha+a_1'\beta+b\gamma=0$ ……(129)

(127) 式より

$$a_0'\alpha'+a_1'\beta'+b\gamma'=0 \qquad (130)$$

(124) 式

$$a_0'\textcircled{14}+a_1'\textcircled{15}+b\textcircled{16}=0$$

以上 (129), (130), (124)) の 3 式より，a_0', a_1', b を消去すれば，

$$\textcircled{14}(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+\textcircled{15}(\gamma'\alpha-\gamma\alpha')+\textcircled{16}(\alpha'\beta-\alpha\beta')=0 \qquad (131)$$

然るに，

$$\alpha=\textcircled{6}\textcircled{9}\textcircled{2}\textcircled{4}-\textcircled{11}\textcircled{4}\textcircled{2}\textcircled{4}+\textcircled{11}\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{1}-\textcircled{6}\textcircled{1}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=(2\xi+1)A_1A_2(B\cdot D+A\cdot E)+(3-2\xi)\cdot\xi\cdot D_1'A_1(A_1B+2\xi A\cdot B_1)$$

$$\beta=\textcircled{7}\textcircled{9}\textcircled{2}\textcircled{4}-\textcircled{12}\textcircled{4}\textcircled{2}\textcircled{4}+\textcircled{12}\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{1}-\textcircled{7}\textcircled{1}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=2l(1-\xi)^2(2\xi+1)A_1B_2(B\cdot D+A\cdot E)+(3-2\xi)\xi lA_1E_1(A_1B+2\xi A\cdot B_1)$$

$$\gamma=\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{2}\textcircled{4}-\textcircled{13}\textcircled{4}\textcircled{2}\textcircled{4}+\textcircled{13}\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{1}-\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{9}+\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{10}\textcircled{4}-\textcircled{8}\textcircled{1}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=-s^3(2l\xi)^3(2\xi+1)A_1Z(B\cdot D+A\cdot E)+s^3(2)^2l^3\xi^4(2\xi+1)A_1Y(A_1B+2\xi AB_1)$$

$$+s^3\xi^3l^3(2\xi+1)A_1C(2\xi B_1D-A_1E)$$

$$\alpha'=\textcircled{6}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{17}-\textcircled{6}\textcircled{9}\textcircled{18}\textcircled{9}+\textcircled{11}\textcircled{4}\textcircled{18}\textcircled{9}-\textcircled{11}\textcircled{17}\textcircled{5}\textcircled{9}+\textcircled{19}\textcircled{9}\textcircled{5}\textcircled{9}-\textcircled{19}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=s(2\xi+1)^2A_2D(EG_1-DH_1)-s\xi(3-2\xi)(2\xi+1)DD_1'(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$+s\cdot\frac{(1+2\xi)^3}{3-2\xi}D\cdot G_2(2\xi B_1D-A_1E)$$

$$\beta'=\textcircled{7}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{17}-\textcircled{7}\textcircled{9}\textcircled{18}\textcircled{9}+\textcircled{12}\textcircled{4}\textcircled{18}\textcircled{9}-\textcircled{12}\textcircled{17}\textcircled{5}\textcircled{9}+\textcircled{20}\textcircled{9}\textcircled{5}\textcircled{9}-\textcircled{20}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=sl\cdot2(1-\xi)^2(2\xi+1)^2B_2D(EG_1+DH_1)-sl\xi(3-2\xi)(2\xi+1)DE_1(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$-sl\cdot(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^3}{(3-2\xi)}\cdot DH_2(2\xi B_1D-A_1E)$$

$$\gamma'=\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{17}-\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{18}\textcircled{9}+\textcircled{13}\textcircled{4}\textcircled{18}\textcircled{9}-\textcircled{13}\textcircled{17}\textcircled{5}\textcircled{9}+\textcircled{21}\textcircled{9}\textcircled{5}\textcircled{9}-\textcircled{21}\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{4}$$

$$=-s^4l^3(2\xi)^3(2\xi+1)^2D\cdot Z(EG_1-DH_1)-S^4l^3(2)^2\xi^4(2\xi+1)^2DY(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$+\frac{1}{\xi l}(2\xi+1)^2\cdot D\cdot X\cdot(2\xi B_1D-A_1E)$$

$\textcircled{14}=A_3$, $\textcircled{15}=-l(1-\xi)B_3$, $\textcircled{16}=-S^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\xi^3l^3\cdot C_3$ なるを以て，(131) 式は次の如くなる。

$$A_3\{-(2)^3\cdot Z\cdot(B\cdot D+AE)+(2)^2\xi Y(A_1B+2\xi AB_1)$$

$$+C\cdot(2\xi B_1D-A_1E)\}\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(EG_1+DH_1)-\xi(3-2\xi)E_1(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$-(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^3}{3-2\xi}H_2(2\xi B_1D-A_1E)\}-A_3\{-(2)^3Z(EG_1-DH_1)$$

$$-(2)^2\xi Y\cdot(A_1H_1-2\xi B_1G_1)+\frac{X}{u}(2\xi B_1D-A_1E)\}\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2\cdot(B\cdot D+A\cdot E)$$

$$+(3-2\xi)\xi E_1(A_1B+2\xi A\cdot B_1)\}-B_3\{-(2)^3Z(EG_1-DH_1)-(2)^2\xi Y\cdot(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$+\frac{X}{u}(2\xi B_1D-A_1E)\}\cdot\{(2\xi+1)A_2\cdot(B\cdot D+A\cdot E)+(3-2\xi)\xi D_1'(A_1B+2\xi A\cdot B_1\}$$

$$+(1-\xi)B_3\{-(2)^3Z(B\cdot D+A\cdot E)+(2)^2\xi Y(A_1B+2\xi AB_1)$$

$$+C(2\xi B_1D-A_1E)\}\cdot\Big\{(2\xi+1)A_2(EG_1-DH_1)-\xi(3-2\xi)D_1'(A_1H_1-2\xi B_1G_1)$$

$$+\frac{(1+2\xi)^2}{3-2\xi}G_2(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}-\frac{1+2\xi}{(3-2\xi)^2}\cdot C_3\Big\{(2\xi+1)A_2(EG_1-DH_1)$$

$$-\xi(3-2\xi)D_1'(A_1H_1-2\xi B_1G_1)+\frac{(1+2\xi)^2}{(3-2\xi)}G_2\cdot(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\ \{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(B\cdot D+A\cdot E)$$

$$+(3-2\xi)\xi E_1(A_1B+2\xi\cdot A\cdot B_1)\}+\frac{1+2\xi}{(3-2\xi)^2}C_3\{(2\xi+1)A_2(B\cdot D+A\cdot E)$$

$$+(3-2\xi)\cdot\xi D_1'(A_1B+2\xi A\cdot B_1)\}\cdot\Big\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(EG_1+DH_1)$$

$$-\xi(3-2\xi)E_1(A_1H_1-2\xi B_1G_1)-(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^2}{3-2\xi}H_2\cdot(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(132)$$

表-21.

ξ	2ξ	$(2\xi)^2$	$(2\xi)^3$	$(2\xi)^4$	$(2\xi)^5$	$(2\xi)^6$
0.01	0.020	0.0004	0.0000 08	0.0000 0016	3.2×10^{-9}	6.4×10^{-11}
0.05	0.100	0.010	0.0010	0.0001	0.0000 1	0.0000 01
0.10	0.200	0.040	0.008	0.0016	0.0003 2	0.0000 64
0.20	0.400	0.160	0.064	0.0256	0.0102 4	0.0040 96
0.30	0.600	0.360	0.216	0.1296	0.0777 6	0.0466 6
0.40	0.800	0.640	0.512	0.4096	0.3277	0.2621 6
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-22.

ξ	$(2\xi)^7$	$(2\xi)^8$	$(2\xi)^9$	$(2\xi)^{10}$	$(2\xi)^{11}$	$(2\xi)^{12}$
0.01	1.28×10^{-12}	2.56×10^{-14}	5.12×10^{-16}	1.024×10^{-17}	2.048×10^{-19}	4.096×10^{-21}
0.05	0.0000 001	0.0000 0001	1.0×10^{-9}	1.0×10^{-10}	1.0×10^{-11}	1.0×10^{-12}
0.10	0.0000 128	0.0000 0256	5.12×10^{-7}	1.024×10^{-7}	2.048×10^{-8}	4.096×10^{-9}
0.20	0.0016 38	0.0006 555	0.0002 621	0.0001 0484	0.0000 4195	0.0000 1678
0.30	0.0279 96	0.0168	0.0100 8	0.0060 48	0.0036 36	0.0021 82
0.40	0.2098	0.1678	0.1342 4	0.1073 92	0.0859 2	0.0687 2
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-23.

ξ	$(2\xi)^{13}$	$(2\xi)^{14}$	$(2\xi)^{15}$	$\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)$	$\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2$	$\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4$
0.01	8.192×10^{-23}	1.638×10^{-24}	3.276×10^{-26}	0.3422	0.1172	0.0137 2
0.05	1.0×10^{-13}	1.0×10^{-14}	1.0×10^{-15}	0.379	0.1436	0.0206 3
0.10	8.192×10^{-10}	1.6384×10^{-10}	3.277×10^{-11}	0.4285	0.1836	0.0337
0.20	0.0000 0671	0.0000 02685	0.0000 01074	0.5382	0.2900	0.0841
0.30	0.0013 09	0.0007 854	0.0004 71	0.6667	0.4450	0.1980
0.40	0.0550	0.0440	0.0352	0.818	0.6690	0.4475
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-24.

ξ	$\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6$	$2(1-\xi)$	$\{2(1-\xi)\}^2$	$\{2(1-\xi)\}^3$	$\{2(1-\xi)\}^4$	$2\{(1-\xi)\}^5$
0.01	0.0016 07	1.980	3.920	7.760	15.360	30.410
0.05	0.0029 60	1.900	3.610	6.840	13.030	24.770
0.10	0.0061 9	1.800	3.240	5.816	10.500	18.900
0.20	0.0244	1.600	3.560	4.097	6.550	10.480
0.30	0.0881	1.400	1.960	2.745	3.843	5.380
0.40	0.2995	1.200	1.440	1.728	2.074	2.490
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-25.

ξ	$\{2(1-\xi)\}^6$	$\{2(1-\xi)\}^7$	$\{2(1-\xi)\}^8$	$\{2(1-\xi)\}^9$	$\{2(1-\xi)\}^{10}$
0.01	60.250	119.250	235.900	467.00	925.00
0.05	47.100	89.500	169.900	323.00	613.50
0.10	34.030	61.300	112.500	202.50	357.30
0.20	16.780	26.850	42.900	68.650	110.00
0.30	7.530	10.540	14.760	20.660	28.950
0.40	2.990	3.590	4.300	5.160	6.200
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-26.

ξ	$\{2(1-\xi)\}^{11}$	$\{2(1-\xi)\}^{12}$	$\{2(1-\xi)\}^{13}$	$\{2(1-\xi)\}^{14}$	$\{2(1-\xi)\}^{15}$
0.01	1 832.00	3 625.00	7 176.00	14 220.00	28 150.00
0.05	1 166.00	2 215.00	4 210.00	8 010.00	15 220.00
0.10	643.00	1 182.00	2 125.00	3 757.00	6 760.00
0.20	176.00	281.00	449.50	721.00	1 154.00
0.30	40.53	56.70	79.40	111.20	155.50
0.40	7.440	8.920	10.71	12.88	15.46
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-27.

ξ	$A=1-\frac{u}{3.4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots$
全　値	$1-0.0833u+0.0014\,875u^2-0.0000\,1142\,5u^3+\cdots$

表-28.

ξ	$B=1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots$
全　値	$1-0.05u+0.0006\,943u^2-0.0000\,0444u^3+\cdots$

表-29.

ξ	$C=1-\dfrac{u}{6\cdot7}+\dfrac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\dfrac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots$
全　値	$1-0.0238\,u+0.0002\,164\,u^2-0.0000\,0103\,u^3+\cdots$

表-30.

ξ	$A_1=1-\dfrac{(2\xi)^4u}{3\cdot4}$	$+\dfrac{(2\xi)^8u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}$	$-\dfrac{(2\xi)^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}$	$+\cdots$
0.01	$1-0.0000\,0001\,333\,u$	$+0.381\times10^{-16}u^2$	$-4.68\times10^{-26}u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.0000\,0833\,u$	$+1.4875\times10^{-11}u^2$	$-1.1425\times10^{-17}u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.0001\,333\,u$	$+0.0000\,0000\,381\,u^2$	$-4.68\times10^{-14}u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.0021\,33\,u$	$+0.0000\,0097\,5\,u^2$	$-0.0000\,0000\,0191\,9\,u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.0108\,0\,u$	$+0.0000\,25\,u^2$	$-0.0000\,0002\,493\,u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.0341\,3\,u$	$+0.0002\,499\,u^2$	$-0.0000\,0078\,6\,u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.0833\,u$	$+0.0014\,875\,u^2$	$-0.0000\,1142\,5\,u^3$	$+\cdots$

表-31.

ξ	$B_1=1-\dfrac{(2\xi)^4u}{4\cdot5}$	$+\dfrac{(2\xi)^8u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}$	$-\dfrac{(2\xi)^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}$	$+\cdots$
0.01	$1-0.0000\,0000\,8\,u$	$+0.1777\,5\times10^{-16}u^2$	$-1.8225\times10^{-26}u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.0000\,05\,u$	$+0.6945\times10^{-11}u^2$	$-4.45\times10^{-18}u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.0000\,8\,u$	$+0.0000\,0000\,1777\,5\,u^2$	$-1.8225\times10^{-14}u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.0012\,8\,u$	$+0.0000\,0045\,53\,u^2$	$-7.470\times10^{-11}u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.0064\,8\,u$	$+0.0000\,1167\,u^2$	$-0.0000\,0000\,9718\,u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.0204\,8\,u$	$+0.0001\,166\,u^2$	$-0.0000\,0030\,58\,u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.050\,u$	$+0.0006\,943\,u^2$	$-0.0000\,0445\,1\,u^3$	$+\cdots$

表-32.

ξ	$C_1=1-\dfrac{(2\xi)^4u}{6\cdot7}$	$+\dfrac{(2\xi)^8u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}$	$-\dfrac{(2\xi)^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}$	$+\cdots$
0.01	$1-0.0000\,0000\,381\,u$	$+0.554\times10^{-17}u^2$	$-0.4219\times10^{-26}u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.0000\,0238\,u$	$+2.164\times10^{-12}u^2$	$-1.030\times10^{-18}u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.0000\,381\,u$	$+0.0000\,0000\,0554\,u^2$	$-0.4219\times10^{-11}u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.0006\,095\,u$	$+0.0000\,0014\,18\,u^2$	$-1.728\times10^{-11}u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.0030\,85\,u$	$+0.0000\,0363\,7\,u^2$	$-0.0000\,0000\,2248\,u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.0097\,5\,u$	$+0.0000\,3633\,u^2$	$-0.0000\,0007\,08\,u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.0238\,u$	$+0.0002\,164\,u^2$	$-0.0000\,0103\,u^3$	$+\cdots$

表-33.

ξ	$A_2=1-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{3\cdot4}+\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots$			
0.01	$1-0.15u$	$+0.0048\,15u^2$	$-0.0000\,665u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.156u$	$+0.0052\,15u^2$	$-0.0000\,749u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.1607u$	$+0.0056\,4u^2$	$-0.0000\,836u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.1582\,5u$	$+0.0053\,67u^2$	$-0.0000\,783u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.1425u$	$+0.0043\,5u^2$	$-0.0000\,571u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.1156u$	$+0.0028\,65u^2$	$-0.0000\,3053u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.0833u$	$+0.0014\,875u^2$	$-0.0000\,1142\,5u^3$	$+\cdots$

表-34.

ξ	$B_2=1-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{4\cdot5}+\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots$			
0.01	$1-0.090u$	$+0.0022\,45u^4$	$-0.0000\,257u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.0936u$	$+0.0024\,34u^2$	$-0.0000\,2933u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.0964u$	$+0.0026\,33u^2$	$-0.0000\,3255u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.095u$	$+0.0025\,05u^2$	$-0.0000\,3051u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.0855u$	$+0.0020\,3u^2$	$-0.0000\,2224u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.0694u$	$+0.0013\,37u^2$	$-0.0000\,1189u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.050u$	$+0.0006\,945u^2$	$-0.0000\,0445u^3$	$+\cdots$

表-35.

ξ	$C_2=1-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{6.7}+\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\dfrac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots$			
0.01	$1-0.0428\,2u$	$+0.0007\,007u^2$	$-0.0000\,0600u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.0445\,5u$	$+0.0007\,585u^2$	$-0.0000\,0675u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.0459u$	$+0.0008\,21u^2$	$-0.0000\,0753\,5u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.0452u$	$+0.0781u^2$	$-0.0000\,0706u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.0407u$	$+0.0006\,325u^2$	$-0.0000\,0514\,5u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.0330\,4u$	$+0.0004\,165u^2$	$-0.0000\,0275u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.0238u$	$+0.0002\,164u^2$	$-0.0000\,0102\,9u^3$	$+\cdots$

表-36.

ξ	$D=-\frac{(2\xi)^3 u}{3}$	$+\frac{(2\xi)^7 u^2}{3\cdot4\cdot7}$	$-\frac{(2\xi)^{11} u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}$	$+\cdots\cdots$
0.01	$-0.0000\,0266\,6\,u$	$+1.523\times10^{-14}u^2$	$-0.277\times10^{-22}u^2$	$+\cdots\cdots$
0.05	$-0.0003\,333\,u$	$+0.0000\,0000\,119\,u^3$	$-1.3525\times10^{-15}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.10	$-0.0026\,65\,u$	$+0.0000\,0015\,24\,u^2$	$-2.77\times10^{-12}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.20	$-0.0213\,2\,u$	$+0.0000\,1951\,u^2$	$-0.0000\,0000\,5677\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.30	$-0.072\,u$	$+0.0003\,33\,u^2$	$-0.0000\,0049\,2\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.40	$-0.1707\,u$	$+0.0024\,97\,u^2$	$-0.0000\,1162\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.50	$-0.333\,u$	$+0.0119\,u^2$	$-0.0001\,3525\,u^3$	$+\cdots\cdots$

表-37.

ξ	$E=1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}$	$+\frac{(2\xi)^8 u^2}{4\cdot5\cdot8}$	$-\frac{(2\xi)^{12} u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}$	$+\cdots\cdots$
0.01	$1-0.0000\,0004\,u$	$+1.60\times10^{-16}u^2$	$-2.369\times10^{-25}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.05	$1-0.0000\,25\,u$	$+6.25\times10^{-11}u^2$	$-5.785\times10^{-15}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.10	$1-0.0004\,u$	$+0.0000\,0001\,6\,u^2$	$-2.367\times10^{-13}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.20	$1-0.0064\,u$	$+0.0000\,041\,u^2$	$-0.0000\,0000\,0971\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.30	$1-0.0324\,u$	$+0.0001\,05\,u^2$	$-0.0000\,0012\,62\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.40	$1-0.1024\,u$	$+0.0010\,49\,u^2$	$-0.0000\,0397\,5\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.50	$1-0.250\,u$	$+0.0062\,5\,u^2$	$-0.0000\,5785\,u^3$	$+\cdots$

表-38.

ξ	$F=3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}$	$+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}$	$-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{9\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}$	$+\cdots\cdots$
0.01	$3-0.0000\,0002\,665\,u$	$+6.095\times10^{-17}u^2$	$-4.223\times10^{-27}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.05	$3-0.0000\,1666\,u$	$+2.38\times10^{-11}u^2$	$-1.03\times10^{-18}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.10	$3-0.0002\,665\,u$	$+0.0000\,0000\,6095\,u^2$	$-4.223\times10^{-15}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.20	$3-0.0042\,65\,u$	$+0.0000\,0156\,u^2$	$-1.730\times10^{-11}u^3$	$+\cdots\cdots$
0.30	$3-0.0216\,u$	$+0.0000\,4\,u^2$	$-0.0000\,0000\,225\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.40	$3-0.0682\,5\,u$	$+0.0003\,995\,u^2$	$-0.0000\,0007\,08\,u^3$	$+\cdots\cdots$
0.50	$3-0.1667\,u$	$+0.0023\,8\,u^2$	$-0.0000\,0103\,1\,u^3$	$+\cdots\cdots$

表-39.

ξ	$D_1=\frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^2u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^6u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{10}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\right]$			
0.01	$\frac{2}{l}\Big[-0.1532u$	$+0.0098\,4u^2$	$-0.0002\,010u^3$	$+\cdots\Big]$
0.05	$\frac{2}{l}\Big[-0.1727u$	$+0.0115\,7u^2$	$-0.0002\,457u^3$	$+\cdots\Big]$
0.10	$\frac{2}{l}\Big[-0.1983u$	$+0.0136\,5u^2$	$-0.0002\,991u^3$	$+\cdots\Big]$
0.20	$\frac{2}{l}\Big[-0.2475u$	$+0.0168\,1u^2$	$-0.0003\,63u^3$	$+\cdots\Big]$
0.30	$\frac{2}{l}\Big[-0.2918u$	$+0.0177\,5u^2$	$-0.0003\,456u^3$	$+\cdots\Big]$
0.40	$\frac{2}{l}\Big[-0.321u$	$+0.0159\,3u^2$	$-0.0002\,513u^3$	$+\cdots\Big]$
0.50	$\frac{2}{l}\Big[-0.333u$	$+0.0119\,1u^2$	$-0.0001\,353u^3$	$+\cdots\Big]$

表-40.

ξ	$E_1=1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots$			
0.01	$1-0.45u$	$+0.0202\,2u^2$	$-0.0003\,378u^3$	$+\cdots$
0.05	$1-0.468u$	$+0.0219\,1u^2$	$-0.0003\,792u^3$	$+\cdots$
0.10	$1-0.482u$	$+0.0236\,9u^2$	$-0.0004\,23u^3$	$+\cdots$
0.20	$1-0.475u$	$+0.0225\,5u^2$	$-0.0003\,965u^3$	$+\cdots$
0.30	$1-0.4273u$	$+0.0182\,7u^2$	$-0.0002\,89u^3$	$+\cdots$
0.40	$1-0.347u$	$+0.0120\,25u^2$	$-0.0001\,545u^3$	$+\cdots$
0.50	$1-0.25u$	$+0.0062\,5u^2$	$-0.0000\,5785u^3$	$+\cdots$

表-41.

ξ	$F_1=3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots$			
0.01	$3-0.30u$	$+0.0077u^2$	$-0.0006\,060\,u^3$	$+\cdots$
0.05	$3-0.3118u$	$+0.0083\,25u^2$	$-0.0000\,0676u^3$	$+\cdots$
0.10	$3-0.3213u$	$+0.0090\,3u^2$	$-0.0000\,0754u^3$	$+\cdots$
0.20	$3-0.3165u$	$+0.0085\,9u^2$	$-0.0000\,0707u^3$	$+\cdots$
0.30	$3-0.285u$	$+0.0069\,6u^2$	$-0.0000\,0515\,5u^3$	$+\cdots$
0.40	$3-0.2312u$	$+0.0045\,8u^2$	$-0.0000\,0275\,4u^3$	$+\cdots$
0.50	$3-0.1667u$	$+0.0023\,80u^2$	$-0.0000\,0103\,1u^3$	$+\cdots$

表-42.

ξ	$A_3=1-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4}+\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots$
0.01	$1-0.0097\,6u\ +0.0000\,2041u^2-0.0000\,0001\,836u^3+\cdots$
0.05	$1-0.0119\,7u\ +0.0000\,307u^2\ -0.0000\,0003\,384u^3+\cdots$
0.10	$1-0.0153u\ +0.0000\,5018u^2-0.0000\,0007\,075u^3+\cdots$
0.20	$1-0.0241\,6u\ +0.0001\,252u^2\ -0.0000\,0027\,58u^3\ +\cdots$
0.30	$1-0.0370\,8u\ +0.0002\,945u^2\ -0.0000\,0100\,7u^3\ +\cdots$
0.40	$1-0.0557\,5u\ +0.0006\,66u^2\ -0.0000\,0342\,4u^3\ +\cdots$
0.50	$1-0.0833u\ +0.0014\,875u^2\ -0.0000\,1142\,5u^3\ +\cdots$

表-43.

ξ	$B_3=1-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2 u}{4\cdot5}+\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots$
0.01	$1-0.0058\,6u\ +0.0000\,0052\,5u^2-0.0000\,0000\,715u^3+\cdots$
0.05	$1-0.0071\,8u\ +0.0000\,1432u^2\ -0.0000\,0001\,317u^3+\cdots$
0.10	$1-0.0091\,8u\ +0.0000\,234u^2\ -0\,0000\,0002\,755u^3+\cdots$
0.20	$1-0.0145u\ +0.0000\,584u^2\ -0.0000\,0010\,86u^3\ +\cdots$
0.30	$1-0.0222\,5u\ +0.0001\,375u^2\ -0.0000\,0039\,2u^3\ +\cdots$
0.40	$1-0.0334\,5u\ +0.0003\,108u^2\ -0.0000\,0133\,25u^3\ +\cdots$
0.50	$1-0.050u\ +0.0006\,945u^2\ -0.0000\,0445u^3\ +\cdots$

表-44.

ξ	$C_3=1-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2 u}{6.7}+\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4 u^2}{6.7.10.11}-\dfrac{\left(\dfrac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6 u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots$
0.01	$1-0.0027\,88u\ +0.0000\,0296\,8u^2-0.0000\,0000\,1654u^3+\cdots$
0.05	$1-0.0034\,16u\ +0.0000\,0446\,5u^2-0.0000\,0000\,3047u^3+\cdots$
0.10	$1-0.0043\,7u\ +0.0000\,0729u^2\ -0.0000\,0000\,637u^3\ +\cdots$
0.20	$1-0.0069\,0u\ +0.0000\,182u^2\ -0.0000\,0002\,51u^3\ +\cdots$
0.30	$1-0.0105\,9u\ +0.0000\,4284u^2\ -0.0000\,0009\,07u^3\ +\cdots$
0.40	$1-0.0159\,25u\ +0.0000\,9682^2\ -0.0000\,0030\,85u^3\ +\cdots$
0.50	$1-0.0238u\ +0.0002\,163u^2\ -0.0000\,0102\,9u^3\ +\cdots$

表-45.

ξ	$G_1=\frac{1}{2}\{(2\xi)^2-1\}-\frac{\{(2\xi)^6-1\}\cdot u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{\{(2\xi)^{10}-1\}u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{\{(2\xi)^{14}-1\}u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots$
0.01	$-0.4995 \quad +0.0138\,8u \quad -0.0001\,488u^2 \quad +0.0000\,0080\,5u^3 \quad -\cdots$
0.05	$-0.495 \quad +0.0138\,8u \quad -0.0001\,488u^2 \quad +0.0000\,0080\,5u^3 \quad -\cdots$
0.10	$-0.480 \quad +0.0138\,8u \quad -0.0001\,488u^2 \quad +0.0000\,0080\,5u^3 \quad -\cdots$
0.20	$-0.420 \quad +0.0138\,25u \quad -0.0001\,487u^2 \quad +0.0000\,0080\,5u^3 \quad -\cdots$
0.30	$-0.320 \quad +0.0132\,4u \quad -0.0001\,478u^2 \quad +0.0000\,0080\,5u^3 \quad -\cdots$
0.40	$-0.180 \quad +0.0102\,4u \quad -0.0001\,3275u^2 \quad +0.0000\,0077u^3 \quad -\cdots$
0.50	0

表-46.

ξ	$H_1=\frac{1}{3}\{(2\xi)^3+1\}-\frac{\{(2\xi)^7+1\}u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{\{(2\xi)^{11}+1\}u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{\{(2\xi)^{15}+1\}u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots$
0.01	$0.3333-0.0071\,42u \quad +0.0000\,631u^2 \quad -0.0000\,0029\,67u^3+\cdots$
0.05	$0.3335-0.0071\,42u \quad +0.0000\,631u^2 \quad -0.0000\,0029\,67u^3+\cdots$
0.10	$0.336 \quad -0.0071\,45u \quad +0.0000\,631u^2 \quad -0.0000\,0029\,67u^3+\cdots$
0.20	$0.3547-0.0071\,5u \quad +0.0000\,631u^2 \quad -0.0000\,0029\,67u^3+\cdots$
0.30	$0.4053-0.0073\,45u \quad +0.0000\,6335u^2 \quad -0.0000\,0029\,67u^3+\cdots$
0.40	$0.5035-0.0086\,4u \quad +0.0000\,6855u^2 \quad -0.0000\,0030\,75u^3+\cdots$
0.50	$0.666 \quad -0.0142\,84u \quad +0.0001\,262u^2 \quad -0.0000\,0059\,36u^3+\cdots$

表-47.

ξ	$I_1=\frac{1}{5}\{(2\xi)^5+1\}-\frac{\{(2\xi)^9+1\}u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{\{(2\xi)^{13}+1\}u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{\{(2\xi)^{15}+1\}u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots$
0.01	$0.20 \quad -0.0026\,45u \quad +0.0000\,1665u^2 \quad -0.0000\,0006\,06u^3 \quad +\cdots$
0.05	$0.20 \quad -0.0026\,45u \quad +0.0000\,1665u^2 \quad -0.0000\,0006\,06u^3 \quad +\cdots$
0.10	$0.20 \quad -0.0026\,45u \quad +0.0000\,1665u^2 \quad -0.0000\,0006\,06u^3 \quad +\cdots$
0.20	$0.202 \quad -0.0026\,45u \quad +0.0000\,1665u^2 \quad -0.0000\,0006\,06u^3 \quad +\cdots$
0.30	$0.2157-0.0026\,71u \quad +0.0000\,1667u^2 \quad -0.0000\,0006\,06u^3 \quad +\cdots$
0.40	$0.2658-0.0030\,u \quad +0.0000\,1757u^2 \quad -0.0000\,0006\,27u^3 \quad +\cdots$
0.50	$0.40 \quad -0.0052\,90u \quad +0.0000\,3328u^2 \quad -0.0000\,0012\,12u^3 \quad +\cdots$

表-48.

ξ	$G_2=\frac{1}{2}[1-\{2(1-\xi)\}^2]$ $-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3[1-\{2(1-\xi)\}^6]u}{3\cdot4\cdot6}$	$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4[1-\{2(1-\xi)\}^{10}]u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}$	$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6[1-\{2(1-\xi)\}^{14}]u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}$	$+\cdots$
0.01	$-1.46\ +0.0964u$	$-0.0018\,86u^2$	$+0.0000\,184u^3$	$-\cdots$
0.05	$-1.305+0.0920u$	$-0.0018\,80u^2$	$+0.0000\,191u^3$	$-\cdots$
0.10	$-1.120+0.0842\,5u$	$-0.0017\,87u_2$	$+0.0000\,1875u^3$	$-\cdots$
0.20	$-0.780+0.0636u$	$-0.0013\,64u^2$	$+0.0000\,1415u^3$	$-\cdots$
0.30	$-0.480+0.0403\,5u$	$-0.0008\,24u^2$	$+0.0000\,0782u^3$	$-\cdots$
0.40	$-0.220+0.0184\,9u$	$-0.0003\,465u^2$	$+0.0000\,0286\,7u^3$	$-\cdots$
0.50		0		

表-49.

ξ	$H_2=\frac{1}{3}[1+\{2\,1-\xi)\}^3]$ $-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2[1+\{2(1-\xi)\}^7]u}{4\cdot5\cdot7}$	$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4[1+\{2(1-\xi)\}^{11}]u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}$	$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}$	$+\cdots$
0.01	$2.920\ -0.0100\,7u$	$+0.0000\,0158\,8u^2$	$-0.0000\,1342\,5u^3$	$+\cdots$
0.05	$2.613\ -0.0928u$	$+0.0015\,20u^2$	$-0.0000\,1337\ u^3$	$+\cdots$
0.10	$2.272\ -0.0817u$	$+0.0013\,7u^2$	$-0.0000\,1243\ u^3$	$+\cdots$
0.20	$1.699\ -0.0577u$	$+0.0009\,4u^2$	$-0.0000\,0836\,5u^3$	$+\cdots$
0.30	$1.248\ -0.0366\,7u$	$+0.0005\,19u^2$	$-0.0000\,0409\ u^3$	$+\cdots$
0.40	$0.909\ -0.0219\,3u$	$+0.0002\,385u^2$	$-0.0000\,0146\,3u^3$	$+\cdots$
0.50	$0.6667-0.0142\,8u$	$+0.0001\,2625u^2$	$-0.0000\,0059\,35u^3$	$+\cdots$

表-50.

ξ	$I_2=\frac{1}{5}[1+\{2(1-\xi)\}^5]$ $-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2[1+\{2(1-\xi)\}^9]u}{6\cdot7\cdot9}$	$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4[1+\{2(1-\xi)\}^{13}]u^2}{6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot13}$	$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6[1+\{2(1-\xi)\}^{15}]u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}$	$+\cdots$
0.01	$6.28\ -0.1451u$	$+0.0012\,74u^2$	$-0.0000\,0274\,3u^3$	$+\cdots$
0.05	$5.155-0.1231u$	$+0.0011\,25u^2$	$-0.0000\,0273\,1u^3$	$+\cdots$
0.10	$3.980-0.0989u$	$+0.0009\,27u^2$	$-0.0000\,0254\,0u^3$	$+\cdots$
0.20	$2.297-0.0534\,5u$	$+0.0004\,91u^2$	$-0.0000\,0170\,8u^3$	$+\cdots$
0.30	$1.276-0.0255u$	$+0.0002\,061u^3$	$-0.0000\,0083\,6u^3$	$+\cdots$
0.40	$0.698-0.0109\,1u$	$+0.0000\,6785u^3$	$-0.0000\,0029\,9u^3$	$+\cdots$
0.50	$0.400-0.0052\,9u$	$+0.0000\,259u^3$	$-0.0000\,0012\,13u^3$	$+\cdots$

そこで、(132) 式を滿足する ξ の各値に對する u の最小値を求むれば **表-51** の如し。

表-51.

ξ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
u	7.813	7.058	5.922	4.152	2.928	2.084	1.536

故に $Q=\dfrac{\sqrt{u}(1+2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$ の値を ξ の各値に對して計算すれば**表-52, 53** の如し。

表-52.

ξ	ξ^2	$1-\xi$	$(1-\xi)^2$	$\xi^2(1-\xi)^2$	2ξ	$1+2\xi$	$\dfrac{1+2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}$
0.01	0.0001	0.990	0 9801	0.0000 9801	0.02	1.02	10 410.00
0.05	0.0025	0.950	0.9025	0.0022 56	0.10	1.10	487.40
0.10	0.010	0.900	0.810	0 0081 0	0.20	1.20	148.10
0.20	0.040	0.800	0.640	0.0256	0.40	1.40	54.70
0.30	0.090	0.700	0 490	0.0441	0.60	1.60	36.29
0.40	0.160	0.600	0.360	0.0576	0.80	1.80	31.25
0.50	0.250	0.500	0.250	0.0625	1.00	2.00	32.00

表-53.

ξ	u	$\sqrt{u}$	$\dfrac{1+2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}$	$Q=\dfrac{\sqrt{u}(1+2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.01	7.813	2.795	10 410.00	29 100 $\dfrac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	7.058	2.656	487.40	1 295 〃
0.10	5.922	2.433	148.10	360.4 〃
0.20	4.152	2.038	54.70	111.5 〃
0.30	2.928	1.711	36.29	62.1 〃
0.40	2.084	1.444	31.25	45.13 〃
0.50	1.536	1.239	32.00	39.65 〃

以上の結果より挫屈荷重曲線を畫けば **圖-17** の如し。

7. 結　　言

以上四つの場合に就いて，挫屈荷重曲線を比較檢討して見る。片持梁の場合には，圖-5 の示す如く挫屈荷重係數は固定端に近づくに從ひ增加する。而して $\xi=0$（即ち先端）より $\xi=0.8l$ 附近までの間は，その影響も小さく極く僅かの荷重にて挫屈すると云ふ事になる。然し $\xi=0.8l$ 附近より $\xi=l$（即ち固定端）までの間に於て，挫屈荷重係數は急激な增加を示して居る。即ち固定端附近に於ては，非常に大なる荷重に依つても挫屈を生じ難い。兩端單純支持梁，兩端挾持梁，兩端固定梁の挫屈荷重曲線を比較圖示すれば，**圖-18** の如し。この三者の場合は，何れも梁の中央より末端に行くに從ひ挫屈荷重係數は增加する。而して，中央 $0.6l$〜$0.8l$ 附近は，その影響も小

圖-17.

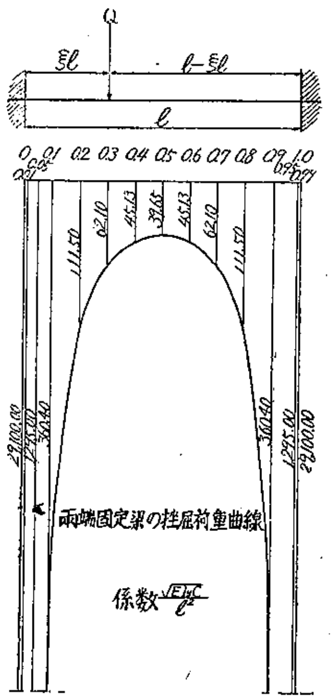
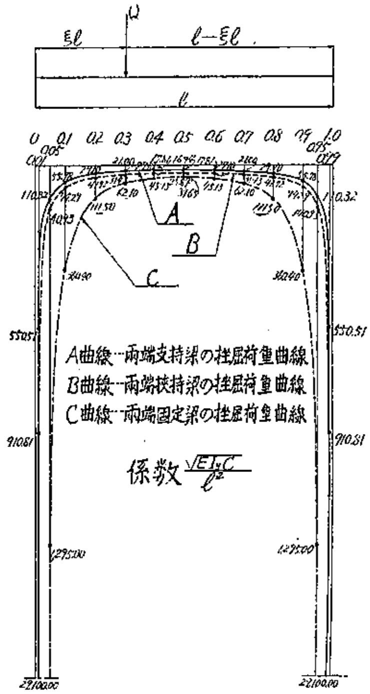


圖-18.



さいがそれより末端に近づくに從ひ，急激に増加して居る。更にこの三者を詳細に調べて見ると，兩端單純支持梁と兩端挾持梁の曲線の形は良く類似して居り，何れも急激なる増加は $\xi=0.20\,l$ 附近及び $\xi=0.80\,l$ 附近より兩端に向つて始まつて居る。これに對し，兩端固定梁の曲線は前兩者よりも稍々尖形を示し $\xi=0.40\,l$ 附近及び $\xi=0.60\,l$ 附近より兩端に向つて急激なる増加が始まつて居る。兩端單純支持梁と兩端挾持梁を比較すると兩者の挫屈荷重係數は，次の如き餘り變化なき比を保ちつゝ兩端挾持梁の方が ξ の各値に對して大なる値を示して居る。即ち ξ の各値に對し後者の方が前者よりも稍々挫屈し難い事になる。兩端單純支持梁と兩端挾持梁の挫屈荷重係數の比を n にて表せば次の如し。

$\xi=0.50\,l$ ……………… $n=1.530$

$\xi=0.40\,l$ 又は $0.60\,l$ …… $n=1.522$

$\xi=0.30\,l$ 又は $0.70\,l$ …… $n=1.500$

$\xi=0.20\,l$ 又は $0.80\,l$ …… $n=1.430$

$\xi=0.10\,l$ 又は $0.90\,l$ …… $n=1.332$

$\xi=0.05\,l$ 又は $0.95\,l$ …… $n=1.278$

$\xi=0.01\,l$ 又は $0.99\,l$ …… $n=1.655$

上記の値の示すところに依ると $\xi=0.05\,l$ 又は $0.95\,l$ の場合に挫屈荷重係數の比 n は最小となる。兩端固定梁の場合は前二者よりもその挫屈荷重係數は更に大であり，挫屈は三者中最も生じ難い。その三者の挫屈荷重係數の比を次ぎに示す。但し，兩端單純支持梁の挫屈荷重係數を 1，その場合の兩端單純支持梁と兩端挾持梁の挫屈荷重係數の比を n，兩端單純支持梁と兩端固定梁の挫屈荷重係數の比を n'，兩端挾持梁と兩端固定梁の挫屈荷重係數の

比を n'' とすれば各々の比は **表-54** の如し。

表-54.

ξ	兩端單純支持梁	$n=\frac{\text{兩端挾持梁}}{\text{兩端單純支持梁}}$	$n'=\frac{\text{兩端固定梁}}{\text{兩端單純支持梁}}$	$n''=\frac{\text{兩端固定梁}}{\text{兩端挾持梁}}$
0.50 l	1	1.530	2.340	1.530
0.40 l 又は 0.60 l	1	1.522	2.530	1.665
0.30 l 又は 0.70 l	1	1.500	2.960	1.975
0.20 l 又は 0.80 l	1	1.430	3.840	2.680
0.10 l 又は 0.90 l	1	1.332	6.460	4.860
0.05 l 又は 0.95 l	1	1.278	11.750	9.200
0.01 l 又は 0.99 l	1	1.655	52.800	32.000

上記の値の示す通り 3 者共中央 1/3 附近に於ては，その挫屈荷重係數の比は變化少きも，兩端に近づくに從ひ兩端固定梁の挫屈荷重係數のみが，前 2 者のそれと著しく遠ざかつて行く事が分る。以上より明かなる如く，兩端固定梁は中央附近に於ては，前 2 者より多少挫屈し難いのであるが，末端に於ては更に著しく前2者よりも挫屈し難いと云ふ結論になる。兩端單純支持梁の場合に就いて A. Koroboff 氏がその挫屈荷重を計算して居る。その結果は筆者の計算結果と略々一致する。兩端挾持梁の中央に荷重ある場合，片持梁の先端に荷重のある場合に就いて，先人の計算した結果もあるが，これ等の値も筆者の計算結果と略々一致して居る。筆者は本文に於て，單に數種の基本形梁の挫屈荷重を理論的に導いたに過ぎぬが，稍々可なりと御參考にならば幸ひである。尙更に擴張せる場合の應用研究は後日に讓る事とする。近代の如く構造設計上に於て，各方面に研究を要する事柄の多い中で，この深い梁に對する研究もまた，未だその餘地が多分にあると信ずる。深い梁の理論は，航空，造船，橋梁，機械構造，土木建築構造に於て，鋼構造物は勿論，鐵筋コンクリート構造物に於ても，應用範圍が非常に廣い。然るに現今鋼構造物に於ては深い梁の理論は，隨分應用されつゝあるも，鐵筋コンクリート構造物に於ては未だその見るべきものがない。諸賢の御研究を待望する次第である。最後に拙文を多謝す。

參考文獻

Prescott: Applied Elasticity
Timoshenko: Theory of Elasticity
Timoshenko: Strength of Materials
Timoshenko and Lessels: Applied Elasticity
Timoshenko: Theory of Elastic Stability
Timoshenko: Rahmenformeln
野口尙一: 應用彈性學
鷹部屋福平: 高級桁梁論
鷹部屋福平: 架構應力研究
瀨戸政章: ラーメンの解法
湯淺龜一; 材料力學
杉本禮三: 應用力學問題集
佐々木達治郞: 彈性學
ブライヒ: 鐵骨構造
福田武雄: 鐵筋混凝土理論
福田武雄: ラーメン
池田芳郞: 微分方程式論
池田芳郞: 應用數學
林桂一: 數値計算

(昭. 18. 9. 21. 受付)