

# 論 說 報 告

第 29 卷 第 5 號 昭和 18 年 5 月

## 管内亂流に於ける熱の移動とエネルギー 輸送との類似に就て

(昭和 17 年 10 月 11 日 土木學會第 4 同年次學術講演會に於て)

正會員 工學博士 石 原 藤 次 郎\*

准會員 青 松 健 一\*\*

要 旨 管内を流れる流體と管壁との間の熱傳達の問題に於ては、傳熱係數  $\alpha$  に就ての嚴密なる考究を必要とする。本文は  $\alpha$  の計算法に就て、熱傳達と運動量輸送との類似による Reynolds 及 Prandtl の方法を批判し、熱傳達とエネルギー輸送との類似による新方法を提唱したもので、最後に滑かな管の場合に對して導いた計算式を従來に於ける代表的實驗たる W. Pohl の實驗結果と比較して置いた。

### 目 次

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| 1. 緒 言            | 3. 熱の移動とエネルギー輸送との類似 |
| 2. 基本的諸關係         | 4. 傳熱係數 $\alpha$ の値 |
| (1) 壓力降下 (2) 流速分布 | 5. 實驗値との比較          |
| (3) 溫度變化          |                     |

### 1. 緒 言

管内を流れる流體と管壁との間の熱傳達の問題は工學上重要であり、特に機械工學及工業化學方面に於てよく研究されてゐる様である。土木工學方面に於ても、寒地に起る水道管の凍結、コンクリート堰堤築造の際に於ける堤體の人工的冷却並に下水處理に於ける汚泥消化槽の人工的加熱等の問題に關係する。

一般に固體の壁面に沿つて流體が流れる時、壁面と流體との間の熱傳達の關係は次の如く表される。

$$q_0 = \alpha(\theta_0 - \theta_w) \dots \dots \dots (1.1)$$

茲に  $q_0$  は壁面の單位面積を通して單位時間に傳達される熱量、 $\theta_0$  及  $\theta_w$  は夫々流體及固體壁の溫度を示し、 $\alpha$  は遷移率 (Emissivity) 又は傳熱係數 (Coefficient of heat transfer) と呼ばれる量である。(1.1) 式の關係は元來 Newton の冷却法則を表したもので、 $\alpha$  は熱傳導率に比すべき物質常數であると考へられたが、其の後の實驗的事實によつて、固體壁附近に於ける流れの状態により變化することが明らかにせられた。斯くして上の關係は其の本來の意味を失ふことになつたが、尙  $\alpha$  は流れ及溫度の或定常狀態に就ては常數と考へるのみならず、此の關係によつて壁面と流體との間の熱傳達の問題が  $\alpha$  を求めることに歸着されるので、問題の取扱上頗る便利である。

以上の意味に於て、傳熱係數  $\alpha$  を考究することが極めて大切であるが、之が理論的計算方法に熱の移動と運動量の輸送との間の類似に基礎を置くものがあり、其の要點は次の通りである。即ち一般に亂流に於ては、小さい渦が管軸と直角の方向に互に入交ることが知られてゐる。今管軸に平行な 1 つの面を考へると、此の面を通つて

\* 京都帝國大學教授

\*\* 京都帝國大學助手

互に入交る小さい渦によつて、其の両側の流體部分は互に其の運動量を交換し、其の結果此の面に見掛けの剪斷應力を生ずる。此の場合運動量と同時に熱も交換されるから、事實上此の面を通して熱が傳導により移動すると同じ結果即ち見掛けの熱傳導が起るわけである。斯くして熱及運動量が極めて類似した機構によつて移動することに着目し、之を基礎にして傳熱係數  $\alpha$  を計算する。此の方法を最初に提唱したのは Reynolds<sup>1)</sup> であるが、其の考察を嚴密に検討し傳熱係數を求める實用的計算式を與へたのは Prandtl<sup>2)</sup> であり、次の如く表される。

$$k_H = 0.03955 Re^{-1/4} / \left\{ 1 + 0.1988 a Re^{-1/8} \left( \frac{\mu_0}{k} - 1 \right) \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

茲に  $k_H = \alpha / (\rho c u_m)$ ,  $Re = du_m / \nu$ ,  $a = u_a / v_*$ ,  $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ ,  $\alpha =$  傳熱係數,  $\rho =$  流體の密度,  
 $c =$  流體の比熱,  $\mu =$  流體の粘性係數,  $\nu = \mu / \rho =$  流體の動粘性係數,  $k =$  流體の熱傳導率,  
 $d =$  管の直径,  $u_m =$  断面平均流速,  $u_a =$  層流部分と亂流部分との境界に於ける流速,  
 $\tau_0 =$  管壁に於ける剪斷應力。

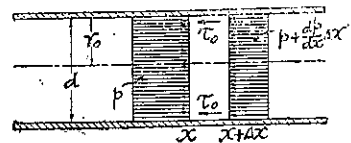
熱傳達と運動量輸送との類似による方法の結果は (1.2) 式によつて與へられるが、運動量は元來ベクトル量であり熱はスカラー量であるから、熱と比較されるのは運動量の 1 つの方向の成分である。而も Prandtl によれば、此の 2 つが全く類似の機構により傳達されるためには、此の運動量の成分の方向に於ける壓力勾配が零になることを必要とする。此の壓力勾配が零になることは、平板境界層に就ては成立するとされてゐるが<sup>3)</sup>、管内の流れに就ては明らかに成立しないのである。本文は此の様な難點を避けるために、熱の移動を同じくスカラー量であるエネルギーの輸送と比較し、其の類似に基いて滑かな管の場合の傳熱係數の計算式を導き、之を従來に於ける代表的實驗たる W. Pohl<sup>4)</sup> の實驗結果と比較したものである。

2. 基本的諸關係

(1) 壓力降下

圖-1. に於て互に  $dx$  隔てた 2 断面の間にある流體部分に就て考へるに、此の部分は流下に際し其の運動量を變化しないから、之に作用する外力は釣合状態になければならない。外力としては、夫々  $x$  及  $x+dx$  断面に於ける靜壓力  $p$  及  $p + \frac{dp}{dx} dx$  と管壁に於ける剪斷應力  $\tau_0$  とが考へられるから、管の半径を  $r_0$  とすれば、釣合の條件として、

圖-1. 圓管内の流れに於ける壓力と剪斷應力との關係



$$\pi r_0^2 \left\{ p - \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) \right\} = 2\pi r_0 \tau_0 dx$$

$$\therefore - \frac{dp}{dx} = \frac{2}{r_0} \tau_0 \dots\dots\dots (2.1)$$

他方壓力降下は一般に次の如く表される。

$$- \frac{dp}{dx} = \lambda \frac{1}{d} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

\* 亂流では靜壓力、速度等は時間と共に不規則に變動するが、充分長い時間に於ける夫等の平均値は夫々一定と見られる。此の様な平均値は一般に次節に於ける如く記號の上に一を附して示されるが、本節では混同の懼がないので簡單のために省略した。従つて本節の  $p, u$  等は夫々靜壓力、速度等の時間的平均値を表し、次節に於ける  $\bar{p}, \bar{u}$  等と同一のものである。

茲に、 $\lambda$  = 摩擦係数、 $d = 2r_0$  = 管の直径、 $\rho$  = 流體の密度、 $u_m$  = 断面平均流速。

之を (2.1) 式と比較することによつて、

$$\lambda \frac{1}{d} \frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{2}{r_0} \tau_0$$

$$\therefore u_m/v_* = \sqrt{8/\lambda} \quad \text{但し } v_* = \sqrt{\tau_0/\rho} \dots \dots \dots (2.2)$$

所が Reynolds 數  $Re = du_m/\nu$  が  $10^6$  以下なる場合、滑かな管に對して次の Blasius の公式がよく成立することが確められてゐる<sup>5)</sup>。

$$\lambda = 0.3164 Re^{-1/4}, \quad \text{但し } Re < 10^6, \quad (\text{滑かな管})$$

従つて之を (2.2) 式に代入することにより、

$$v_*/u_m = 0.1988 Re^{-1/8} \dots \dots \dots (2.3)$$

(2) 流速分布

壓力降下に關する Blasius 公式の適用範圍たる  $Re < 10^6$  に於ては、同じく滑かな管に對して次の流速分布の  $1/7$ -乗則がよく成立するとされてゐる<sup>5)</sup>。

$$u = \varepsilon s^{1/7}, \quad \text{但し } u = \text{壁面より } s \text{ の距離に於ける流速, } \varepsilon = \text{或る常數。}$$

今  $u$  及  $T = \frac{1}{2} \rho u^2$  を夫々管軸に直角な断面 (A) 上の微小面積  $dA$  に於ける流體の速度及エネルギーとし、断面に關する平均エネルギーを次の如く定義しよう。

$$T_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 u_m} \int_{(A)} u T dA \dots \dots \dots (2.4)$$

上の流速分布の  $1/7$ -乗則を用ひると、

$$u_m = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_{(A)} u dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \varepsilon s^{1/7} 2\pi(r_0 - s) ds = \frac{49}{60} \varepsilon r_0^{1/7}$$

$$\therefore \frac{u}{u_m} = \frac{60}{49} \left( \frac{s}{r_0} \right)^{1/7}$$

此の結果を用ひて後の計算に必要な  $T_0/\frac{\rho u_m^2}{2}$  の値を求めると、

$$T_0/\frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_{(A)} \left( \frac{u}{u_m} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{60}{49} \left( \frac{s}{r_0} \right)^{1/7} \right\}^3 2\pi(r_0 - s) ds$$

$$\therefore T_0/\frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{43}{40} \frac{200}{817} \dots \dots \dots (2.5)$$

(3) 温度變化

圖-1 に於て、 $x$  及  $x + \Delta x$  の 2 断面の間に狭まれた部分の熱の出入りを考へよう。今  $c$  を流體の比熱、 $u$  及  $\theta$  を夫々断面 (A) 上の微小面積  $dA$  に於ける流速及温度とすれば、 $x$ -断面より對流により入る熱量は  $\int_{(A)} \rho c \theta u dA$ 、又  $x + \Delta x$  断面より出る熱量は  $\int_{(A)} \rho c \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta x \right) u dA$  にて表される。従つて此の 2 断面の間に残るべき熱量は  $-\left[ \int_{(A)} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial x} u dA \right] \Delta x$  となる。所が温度の定常状態では、此の熱量は管壁に於ける傳熱量に等しくなる管であるから、

$$-\int_{(A)} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial x} u dA = 2\pi r_0 q_0 \dots \dots \dots (2.6)$$

茲に  $q_0$  は單位時間に管壁單位面積を通して流體と管壁との間に授受される熱量であつて、(1.1) 式によつて  $q_0 =$

$\alpha(\theta_0 - \theta_w)$  の如く表される。茲に流體の溫度  $\theta_0$  としては、圓管の場合次の値が用ひられる。

$$\theta_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 u_m} \int_{(A)} \theta u dA$$

此の  $\theta_0$  を用ひて (2.6) 式の左邊を變形すると、

$$\begin{aligned} - \int_{(A)} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial x} u dA &= - \rho c \int_{(A)} \frac{\partial(\theta u)}{\partial x} dA = - \rho c \frac{d}{dx} \left[ \int_{(A)} \theta u dA \right] \\ &= - \rho c \frac{d}{dx} [\pi r_0^2 u_m \theta_0] = - \rho c \pi r_0^2 u_m \frac{d\theta_0}{dx} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\theta_0}{dx} = \frac{2}{r_0} \frac{q_0}{\rho c u_m} \dots \dots \dots (2.7)$$

之に (1.1) 式を代入すると、

$$\frac{d\theta_0}{dx} + k_H \frac{4}{d} (\theta_0 - \theta_w) = 0, \quad \text{但し } k_H = \alpha / (\rho c u_m) \dots \dots \dots (2.8)$$

今  $\alpha$  従つて  $k_H$  を管軸方向即ち  $x$  と共に變化しないものと考え、管壁の溫度  $\theta_w$  を管の全長にわたり一定に保つ場合は、(2.8) 式を積分して  $x=0$  の時  $\theta_0 = \theta_1$  なる境界条件を用ひると、

$$(\theta_0 - \theta_w) / (\theta_1 - \theta_w) = \exp\left(-4k_H \frac{x}{d}\right) \dots \dots \dots (2.9)$$

又此の兩邊の對數をとり、 $x=L$  の時  $\theta_0 = \theta_2$  とすると、

$$k_H = 0.5756 \frac{d}{L} \log_{10} \{ (\theta_1 - \theta_w) / (\theta_2 - \theta_w) \} \dots \dots \dots (2.10)$$

尙區間  $0 \leq x \leq L$  に於ける流體の溫度  $\theta_0$  の平均値  $\theta_m$  は、(2.9) 式を用ひることによつて、

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{1}{L} \int_0^L \theta_0 dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ \theta_w - (\theta_w - \theta_1) \exp\left(-4k_H \frac{x}{d}\right) \right\} dx \\ &= \theta_w - (\theta_w - \theta_1) \left\{ 1 - \exp\left(-4k_H \frac{L}{d}\right) \right\} / \left(4k_H \frac{L}{d}\right) \end{aligned}$$

之に (2.10) 式の關係を代入して、

$$\left. \begin{aligned} \theta_m &= \theta_w - (\theta_2 - \theta_1) / \log_e \{ (\theta_w - \theta_1) / (\theta_w - \theta_2) \} \\ &= \theta_w - 0.4343 (\theta_2 - \theta_1) / \log_{10} \{ (\theta_w - \theta_1) / (\theta_w - \theta_2) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.11)$$

工學上は平均傳熱量  $q_m$  を

$$q_m = \frac{1}{2\pi r_0 L} \int_0^L q_0 2\pi r_0 dx = \alpha_m (\theta_m - \theta_w) \dots \dots \dots (2.12)$$

の如く表すが、此の式によつて定義される  $\alpha_m$  を平均傳熱係數 (Mean coefficient of heat transfer) と云ふ。

$\alpha_m$  は工學上重要な意義を有するものであり、(1.1) 式と比較すると、 $\theta_w$  が一定の時には  $\theta_m = \frac{1}{L} \int_0^L \theta_0 dx$  なることから直に次の關係が導かれる。

$$\alpha = \alpha_m \dots \dots \dots (2.13)$$

### 3. 熱の移動とエネルギー輸送との類似

一般に亂れが充分發達した場合の流體運動では、平均運動に對する粘性の影響を無視することが出来る。今直角座標系  $(x, y, z)$  を選び、 $(u, v, w)$  を夫々  $x, y, z$  軸の方向の速度成分とし、 $p$  を壓力エネルギー、 $T = \frac{1}{2} \rho(u^2 +$

$v^2+w^2$  を運動エネルギーとすれば

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (u^2+v^2+w^2) = \rho u \frac{Du}{Dt} + \rho v \frac{Dv}{Dt} + \rho w \frac{Dw}{Dt}$$

此の關係式に於て、容積力の影響を考慮の外に置いた Euler の運動方程式を適用すると、

$$\frac{DT}{Dt} = - \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

従つてエネルギーの關係は次の如く表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial(p+T)}{\partial x} + v \frac{\partial(p+T)}{\partial y} + w \frac{\partial(p+T)}{\partial z} = 0$$

所が亂流の特質として、一般に流体内の或 1 點に於ける速度等は、之を時間的平均値とそれを中心とする變動値とに分けて考へることが出来る。従つて前者に  $-$  を、後者に  $'$  を附して例へば  $p = \bar{p} + p'$ ,  $u = \bar{u} + u'$  等とし、之等を上式に代入し其の兩邊の時間的平均をとると、

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial(\bar{p}+\bar{T})}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(\bar{p}+\bar{T})}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial(\bar{p}+\bar{T})}{\partial z} \\ & = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'(p'+T')} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'(p'+T')} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'(p'+T')} \right\} \dots\dots\dots(3.1) \end{aligned}$$

上式に於ては、平均運動が定常なる場合を考へることとして、 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = 0$  としたのである。

次に亂流に於ては、亂れによる見掛けの熱傳導に比べて、通常の意味の傳導による熱の移動量は少いと考へられるから、之を無視することとし、時間的平均値が定常なる場合の熱の移動の關係を示すと<sup>6)</sup>、

$$\rho c \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) = - \rho c \left( \frac{\partial \overline{\theta' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\theta' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\theta' w'}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(3.2)$$

今圓管内の亂流を考へて  $x$  軸を管軸に一致させると、

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

となり、又上の (3.1) 及 (3.2) 式に於て右邊の  $\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'(p'+T')}$  及  $\rho c \frac{\partial \overline{\theta' u'}}{\partial x}$  は夫々左邊の  $\bar{u} \frac{\partial(\bar{p}+\bar{T})}{\partial x}$  及  $\rho c \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$  に比べて省略し得るから、結局之等の 2 式は次の如く表される。

$$\bar{u} \frac{\partial(\bar{p}+\bar{T})}{\partial x} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'(p'+T')} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'(p'+T')} \right\} \dots\dots\dots(3.1)'$$

$$\rho c \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = - \rho c \left( \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' \theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' \theta'} \right) \dots\dots\dots(3.2)'$$

此の兩式を比較するに、明かに類似の型であることが認められるから、此の類似性に基き  $x$  の或函數  $\kappa(x)$  及  $\beta(x)$  を用ひて次の關係が導かれる。

$$\rho c \theta = \kappa(x)(p+T) + \beta(x) \dots\dots\dots(3.3)$$

この式に  $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ ,  $T = \bar{T} + T'$  を代入し、兩邊の時間的平均をとると、

$$\rho c \bar{\theta} = \kappa(x)(\bar{p} + \bar{T}) + \beta(x) \dots\dots\dots(3.3)'$$

之と (3.3) 式との差をとると

$$\rho c \theta' = \kappa(x)(p' + T') \dots\dots\dots(3.3)''$$

となり、

(3.3)' 及 (3.3)'' の 2 つの關係を (3.2)' 式に代入して\*

$$\kappa(x) \left\{ \bar{u} \frac{\partial(\bar{p} + \bar{T})}{\partial x} \right\} + \bar{u}(\bar{p} + \bar{T})\kappa'(x) + \bar{u}\beta'(x) = -\kappa(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} w'(\bar{p}' + \bar{T}') + \frac{\partial}{\partial z} w'(\bar{p}' + \bar{T}') \right\}$$

之に (3.1)' 式の關係を適用すると、

$$(\bar{p} + \bar{T})\kappa'(x) + \beta'(x) = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

今 (3.3)' 式を  $x$  に就て微分すると、 $d\bar{T}/dx = 0$  なることを考慮して、

$$\rho c \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \kappa(x) \frac{d\bar{p}}{dx} + (\bar{p} + \bar{T})\kappa'(x) + \beta'(x)$$

となり、更に (3.4) 式の關係を代入して、

$$\rho c \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \kappa(x) \frac{d\bar{p}}{dx}$$

$$\therefore \rho c \int_{(A)} \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} dA = \kappa(x) \int_{(A)} \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx} dA \dots\dots\dots(3.5)$$

所が 2 に述べた基本的關係から

$$\int \bar{u} dA = u_m \pi r_0^2, \quad \int \bar{u} \bar{\theta} dA = u_m \theta_0 \pi r_0^2$$

となり、而も断面内にて  $d\bar{p}/dx = \text{一定}$ 、 $\partial \bar{u}/\partial x = 0$  となるから、(3.5) 式を書き改めると、

$$\rho c \frac{d\theta_0}{dx} = \kappa(x) \frac{d\bar{p}}{dx} \dots\dots\dots(3.5)'$$

之に (2.1) 及 (2.7) 式の關係を代入して、

$$q_0/\tau_0 = \kappa(x) u_m \dots\dots\dots(3.6)$$

他方管壁に密接して存在すべき層流部分の端に於て、 $\bar{\theta} = \theta_a$ 、 $\bar{T} = T_a$  とすると、(3.3)' 式から

$$\rho c(\bar{\theta} - \theta_a) = \kappa(x)(\bar{T} - T_a)$$

此の兩邊に  $\bar{u}$  をかけて断面  $A$  に就て積分すると、前と同様にして、

$$\rho c(\theta_0 - \theta_a) = \kappa(x)(T_0 - T_a), \quad \text{但し } T_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 u_m} \int \bar{u} \bar{T} dA \dots\dots\dots(3.7)$$

(3.6) 及 (3.7) 式から  $\kappa(x)$  を消去すると、

$$q_0/\{\rho c u_m(\theta_0 - \theta_a)\} = \tau_0/(T_0 - T_a) \dots\dots\dots(3.8)$$

#### 4. 傳熱係數 $\alpha$ の値

(3.8) 式を應用して滑かな管の場合の傳熱係數  $\alpha$  を求めよう。先づ Prandtl の學說に従つて管内の流れが管壁に密接して存在する厚さの非常に薄い層流部分とそれより内側の亂流部分との 2 つに鋭く分けられるものとし層流部分の厚さを  $\delta$  とする。此の層流部分に於ける流速及溫度が直線的變化をなすものとすれば<sup>7)</sup>、此の部分にては見掛けの剪斷應力や見掛けの熱傳導は起らない筈であるから、

$$\tau_0 = \mu u_a/\delta, \quad q_0 = k(\theta_a - \theta_w)/\delta$$

茲に  $u_a$  は層流部分の端に於ける流速を表すが、此の兩式から  $\delta$  を消去すると、

$$q_0/\tau_0 = k(\theta_a - \theta_w)/(\mu u_a)$$

之と (3.8) 式とから  $\theta_a$  を消去して、

\* 以下の式に於ける  $\kappa'(x)$  及  $\beta'(x)$  は夫々  $\kappa(x)$  及  $\beta(x)$  を  $x$  に就て微分したものを表す。

$$q_0/\tau_0 = (\theta_0 - \theta_w) / \{ \mu u a / k + (T_0 - T_w) / (\rho c u m) \}$$

此の式を用ひて  $k_H$  を計算すると、(1.1) 及 (2.2) 式を代入して、

$$k_H = \alpha / (\rho c u m) = q_0 / \{ \rho c u m (\theta_0 - \theta_w) \}$$

$$= \frac{(v_* / u_m)^2}{\left\{ (u a / u_m) \mu c / k + \frac{1}{2} (T_0 - T_w) / (\rho u m^2 / 2) \right\}} \dots \dots \dots (4.1)$$

今  $u a / v_* = a$  と置けば、(2.3) 式から

$$u a / u_m = (u a / v_*) (v_* / u_m) = a \times 0.1988 R_e^{-1/3}$$

$$\therefore (u a / u_m)^2 = 0.03955 a^2 R_e^{-2/3}$$

之等と (2.5) 式の關係を (4.1) 式に代入すれば、所要の  $k_H$  として次式が得られ、之から傳熱係數  $\alpha$  が計算される。

$$k_H = 0.03955 R_e^{-1/3} \{ 0.5292 + 0.1988 a P_r R_e^{-1/3} - 0.01978 a^2 R_e^{-1/3} \} \dots \dots \dots (4.2)$$

茲に  $k_H = \alpha / (\rho c u m)$ ,  $P_r = \mu c / k$ ,  $R_e = d u_m / \nu$

### 5. 實驗値との比較

上に求めた著者等の式 (4.2) 又は Prandtl の式 (1.2) の何れによつて  $k_H$  を計算するにしても、先づ  $a = u a / v_*$  の値を知らねばならない。然るに管内の亂流に於ては、管壁に接した層流部分から漸次變化して亂流部分に移るのであるから、兩者の境界を明確に求めることは不可能である。従つて流れのみに關する實驗から  $a$  の値を定めることは困難であつて、Prandtl は熱傳達の實驗から定めるべきものとした。斯くして Prandtl は (1.2) 式に於て、

$$0.1988 a = 1.0 \text{ 又は } 1.1$$

とすれば、(1.2) 式の計算結果が從來の諸實驗の結果とよく一致するとしてゐる。今從來に於ける代表的な實驗の 1 つである W. Pohl<sup>4)</sup> の實驗結果と (4.2) 及 (1.2) 式とを比較すれば次の通りである。

Pohl は滑かな 眞鍮管及鋼管並に其の他の種々の材料の粗い管に就て、他の條件をすべて一定とし、流速のみを變化せしめて管壁と水流との間の熱傳達の實驗を行つたが、茲では滑かな管の場合のみに就て述べよう。此の實驗に於ては、管徑  $d = 40$  mm、管壁の溫度  $\theta_w = 31^\circ\text{C}$ 、(2.11) 式の與へる  $\theta_m = 11.5^\circ\text{C}$  として傳熱係數  $\alpha$  を求めたのであるが、其の結果は圖-2 の通りであつて、次の實驗式によつて極めてよく表される。

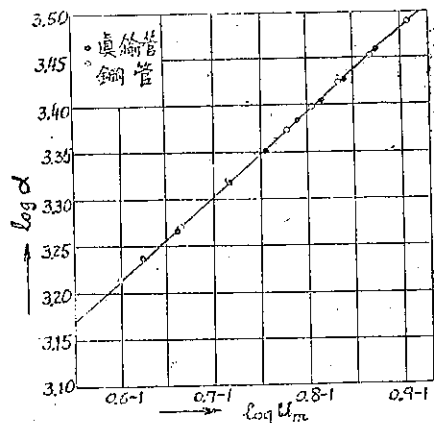
$$\alpha = 3740 u_m^{0.80} \dots \dots \dots (5.1)$$

茲に  $[\alpha] = [\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{C}]$ , 流速  $[u_m] = [\text{m}/\text{sec}]$

今理論式と比較し得る様にするため、 $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 1 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 3.51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{hr}$  ( $\frac{1}{2} (31 + 11.5) = 21.3^\circ\text{C}$  に於ける値)<sup>8)</sup> 及  $d = 0.04 \text{ m}$  を用ひて (5.1) 式を變形すると、

$$k_H = 0.00302 R_e^{-0.1}, \text{ 或は } k_H^{-1} = 331 R_e^{0.1} \dots \dots \dots (5.1)'$$

圖-2. W. Pohl の實驗による  $\alpha$  と  $u_m$  との關係



一方著者等の導いた理論式 (4.2) に於て  $\frac{1}{2}(31+11.5)=21.3^{\circ}\text{C}$  に於ける値  $\mu=9.74\cdot 10^{-3}\text{ g/cm}\cdot\text{sec}^{(8)}$ ,  $k=1.41\cdot 10^{-3}\text{ cal/cm}\cdot\text{sec}\cdot^{\circ}\text{C}^{(9)}$  及  $c=1\text{ cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$  を用ひて計算すれば,

$$k_H^{-1}=1.34 Re^{1/4}+34.7 a Re^{1/6}-a^2/2$$

此の式によつて  $k_H$  を求めるには  $a$  の値を知る必要があるが, 上の (5.1)' 式と最もよく一致せしめるためには  $a=7.5$  とする必要がある, 此の値を用ひて上式を書改めると,

$$k_H^{-1}=1.34 Re^{1/4}+260 Re^{1/6}-28 \dots\dots\dots(5.2)$$

之に對し Pohl は Prandtl の式 (1.2) に於て  $0.1988 a=1.0$  と置いた次の式が實驗とよく一致するとしてゐる。

$$k_H^{-1}=25.3 Re^{1/4}+149 Re^{1/6} \dots\dots\dots(5.3)$$

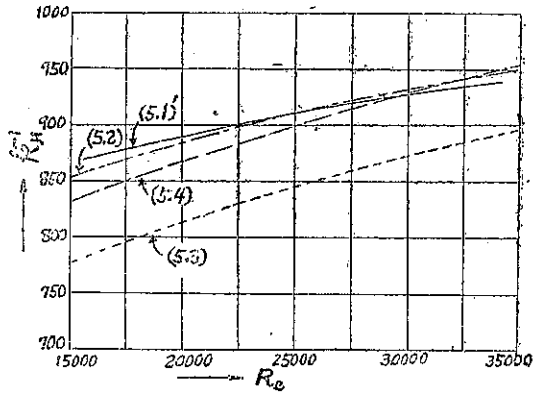
所が著者等の計算によれば圖-3 に示す如く之と少しく異なるのであつて,  $0.1988 a=1.1$  とした次の式の方が更によく一致する様である。

$$k_H^{-1}=25.3 Re^{1/4}+164 Re^{1/6} \dots\dots\dots(5.4)$$

以上各計算式による結果は圖-3 に表した通りであるが, 理論式 (5.2) 及 (5.4) は實驗式 (5.1)' と可成りよく一致してゐる。而して此の一致はエネルギー輸送との類似による著者等の式 (5.2) の方が運動量輸送との類似による Prandtl の式 (5.4) に比べて少し優れてゐる様であるが, 大體は同程度のものであつて, 以上の結果のみからは何れとも優劣を判定し難い。之は亂流部分に於ける温度差  $\theta_a-\theta_b$  が層流部分に於ける温度差  $\theta_a-\theta_w$  に比して一般に小さいので熱傳達に及ぼす亂流部分の影響少く, 従つて其の影響を上の 2 つの理論の何れによつて評價

しても, 大差を生じないことに基くものと考へられる。斯くして滑かな管に於ける傳熱係數  $\alpha$  に對しては, 管中央の亂流部分よりも管壁に密接した部分の流れの状態が重要であることがわかるわけである。尙著者等の理論式と Prandtl の理論式との優劣に就ては, 各々の結果が明確に相違すべき場合の實驗結果を得て, 改めて検討を加へたいと思ふ。

圖-3. 各計算式による結果の比較



参 考 文 獻

- 1) O. Reynolds; "On the Extent and Action of the Heating Surface of Steamboilers." Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc., Vol. 14, 1874, p. 9.
- 2) L. Prandtl; "Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit." Phys. Zeitschrift, Bd. 11, 1910, S. 1072.  
L. Prandtl; Phys. Zeitschrift, Bd. 29, 1928, S. 487.
- 3) H. Blasius; "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung." Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 56, 1908, S. 1.
- 4) W. Pohl; "Einfluss der Wandrauhigkeit auf den Wärmeübergang an Wasser." Forsch. a. d. Geb. d. Ing.-Wes., Bd. 4, 1933, S. 230; Zeitschr. des V. D. I., Bd. 78, 1934, S. 95.



5) H. Blasius; "Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten." Forschungsheft des V.D.I., Nr. 131, 1913.

J. Nikurodse; "Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren." Forschungsheft des V.D.I., Nr. 356, 1932.

6) W.F. Durand; "Aerodynamic Theory." Vol. VI, 1936, p. 240.

7) 上記 2) 参照

8) S. Goldstein; "Modern Developments in Fluid Dynamics." Vol. I, 1938, p. 5.

9) 眞島正市, 芝 龜吉, 岡島慶三郎; "熱現象 (岩波講座, 物理學, VII A)." 昭和 15 年, 頁 100.

附 記 本研究は文部省科學研究費の援助によること多きを記して謝意を表する次第である。

(昭. 18. 2. 2. 受付)