

論 說 報 告

第 29 卷 第 4 號 昭和 18 年 4 月

圓形填充物をもつた平板の 1 問題の
最小仕事原理に依る解法

正會員 谷 本 勉 之 助*

要 旨 圓形填充物をもつた平板の或る問題に於て、Airy の應力函數を使ひ、接觸部分の境界条件の一つに至エネルギー最小をとり入れて計算し、この様な場合の切線變位差の影響による應力成分を導いた。

目 次

- | | |
|----------------|-------------------------------|
| 1. 緒 言 | 6. 切線變位差 ∇ の計算 |
| 2. 應力と變位 | 7. 切線變位差 ∇ が應力分布に及ぼす影響 |
| 3. 境界条件 | 8. 結 び |
| 4. 条件方程式 | 附 記號 |
| 5. 至エネルギー最小の条件 | |

1. 緒 言

平板に圓形ボルトが填充せられたときの應力解析の問題は、古くから色々な人々に手がけられてゐる⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。その境界条件には 3 つのものがある。即ち (1) 平板の外側に於けるもの、(2) 填充物たる圓形ボルト又は圓形環の内側に於けるもの、(3) 平板と填充物との接觸部に於けるもの——がその 3 つである。

これらの中大きな平板を考へ、且つ適當な外力（一樣な引張り、曲げ、剪斷等）をとるならば、上の境界条件 (1)、(2) には餘り問題はない。接觸部附近の應力状態に大きな關係をもつ管の境界条件 (3) については、考慮すべき餘地が多分にあると考へられてゐる。これについて通例用ひられる条件は、(イ) 半徑方向の直應力 ($r\bar{r}$)、(ロ) 剪斷應力 ($r\bar{\theta}$)、(ハ) 半徑方向の變位、(ニ) 切線方向の變位の 4 つを、填充物と平板との接觸部に於て相等しいとおくものである。

妹澤解⁽²⁾は變位の一般式を始めて求め出されたのであるが、その例題として解かれた問題は矢張り上の条件に

* 工學士 臺北帝國大學囑託 臺灣電力株式會社囑託

1) 末廣恭二：“The distribution of stress in a tension strip having circular hole filled with a plug.” 機械學會誌 第 17 卷第 34 號 (大正 3 年)

2) 妹澤克惟、西村源六郎：“Stresses under tension in a plate with a heterogeneous insertion.” 航空研究所報告 第 68 號 (昭和 6 年 4 月)

妹澤克惟：“Stresses in a plate with a flanged circular hole.” 航空研究所報告 第 84 號 (昭和 7 年 9 月)

3) 拙 著：“捲立圓形隧道の應力分布” 土木學會誌 昭和 12 年 4 月

拙 著：“圓形填充物を有する板の引張り” 昭和 13 年 7 月、土木學會第 2 回年次學術講演會 (土木學會誌 昭和 14 年 6 月)

4) 最上武雄：“接觸應力の一問題 (引張られた平板中の圓形ボルトの問題) (第 1 報)” 土木學會誌 昭和 14 年 4 月

最上武雄：“接觸應力の一問題 (引張られた平板中の圓形ボルトの問題) (第 2 報)” 土木學會誌 昭和 14 年 12 月

よるものである。Airy の應力函數から出發しても勿論同じ種類の問題を解くことができる。

末廣解¹⁾は接觸面が完全に滑かだとして、剪斷應力を零とおいて解かれたものである。

これらに對して新しい試みがなされたのは、筆者の知る限りでは最上解²⁾があるだけである。それは圓形ボルトをもつた平板の引張りの問題に於て、接觸圓の或る區間は離れが起るといふ前提——この體系のより眞實的な描寫である筈である——の下に、體系全體の歪エネルギーを極小にする方法で出されたものである。

本文に取扱つた問題は、切縁變位差 (F) を一應不定としておいて、これを歪エネルギーが極小になる様に定められたものである。例に持ち出したのは内部の管に可成りな自重がある様な場合には、外力が適用される前の状態に於ては、底部で充分接觸してゐる代りに上部ではその接觸の程度が劣る筈であるから、その影響が圖-1 の様に表はされるとしたのである。

圓環内面には静水壓が作用するとし、板の遠方では局部應力は消えるとした。

2. 應力と變位

Airy の應力函數には次のものを採る。

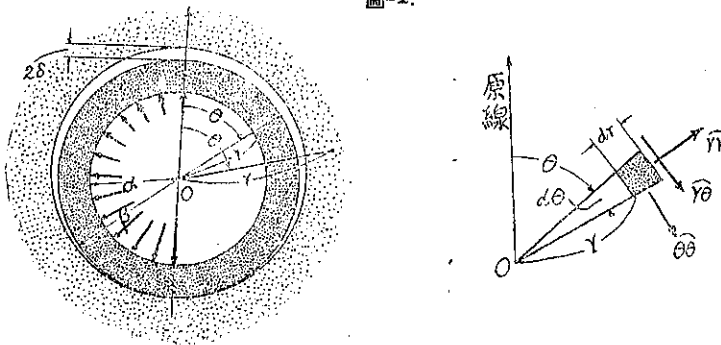
$$\chi(r, \theta) = \left(A \log r + \frac{B}{2} r^2 \right) + \left(\frac{C}{2} r^{-1} + Dr \log r + \frac{F}{2} r^3 \right) \cos \theta + \frac{G}{2} r \theta \sin \theta \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに A, B, C, D, F, G は未定係數で、座標系は圖-1 の様にえらぶ。同心圓環の自重を考慮に入れて

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r'r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \omega r \cos \theta \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \omega r \cos \theta \\ \widehat{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

により、應力成分は (圖-1)

圖-1.



$$\left. \begin{aligned} \widehat{r'r} &= (Ar^{-2} + B) + \{ -Cr^{-3} + \kappa Dr^{-1} + (F + \omega)r \} \cos \theta \\ \widehat{\theta\theta} &= (-Ar^{-2} + B) + \{ Cr^{-3} + Dr^{-1} + (3F + \omega)r \} \cos \theta \\ \widehat{r\theta} &= \{ -Cr^{-3} + Dr^{-1} + Fr \} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

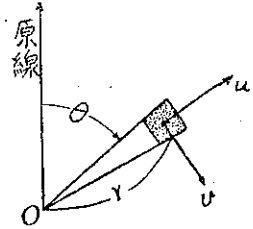
(但し $\kappa = \frac{3-2\sigma}{4(1-\sigma)}$)

この應力成分に對應する變位は (圖-2)

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1+\sigma}{E} \{-Ar^{-1} + B(1-2\sigma)r\} \\
 &+ \frac{1+\sigma}{E} \left[Cr^{-2} + D \frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)} \log r + \left\{ F(1-4\sigma) + (1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \right\} r^2 + X \right] \cos \theta \\
 v &= \frac{1+\sigma}{E} \left[Cr^{-2} - D \frac{1+(3-4\sigma)}{4(1-\sigma)} \log r + \left\{ F(5-4\sigma) + (1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \right\} r^2 - X \right] \sin \theta
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

こゝに u : 半径方向の變位, v : 切線方向の變位
 E : ヤング率, σ : ポアソン比,
 X : 剛體變位, ω : 環の單位容積當りの重量とする。

圖-2.



(2.3), (2.4) 式の形はこのまゝ環に適用しうるものとする。

次に圓繞體に就ては、これは無限遠方まで擴るものとし自重を捨て、次の形に置いてよいとする。即ち應力成分は

$$\begin{aligned}
 \widehat{rr}' &= A'r^{-2} + (-C'r^{-3} + \kappa'D'r^{-1}) \cos \theta \\
 \widehat{\theta\theta}' &= -A'r^{-2} + (C'r^{-3} + D'r^{-1}) \cos \theta \\
 \widehat{r\theta}' &= (-C'r^{-3} + D'r^{-1}) \sin \theta
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

(但し $\kappa' = \frac{3-2\sigma'}{4(1-\sigma')}$)

變位は

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{1+\sigma'}{E'} (-A'r^{-1}) + \frac{1+\sigma'}{E'} \left\{ C'r^{-2} + D' \frac{3-4\sigma'}{4(1-\sigma')} \log r \right\} \cos \theta \\
 v' &= \frac{1+\sigma'}{E'} \left\{ C'r^{-2} - D' \frac{1+(3-4\sigma')}{4(1-\sigma')} \log r \right\} \sin \theta
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

(2.5), (2.6) 式の中の各文字の意味は、上述の環の場合と同じである。

3. 境界條件

境界條件は以下の様であるとする。環の内面に於て高さに比例する静水壓が作用し、環の眞横で h 、眞上で $h - \alpha$ 、眞下で $h + \alpha$ であるとすれば、環の内面の境界條件は

$$\begin{aligned}
 (\widehat{rr}')_{r=\alpha} &= -(h - \alpha \cos \theta) \\
 (\widehat{r\theta}')_{r=\alpha} &= 0
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

但し α は環の内側の半径である。

環の外側に於ける應力の條件は、全周に互り空きができないとして

$$\begin{aligned}
 (\widehat{rr}')_{r=\beta} &= (\widehat{rr}')_{r=\beta} \\
 (\widehat{r\theta}')_{r=\beta} &= (\widehat{r\theta}')_{r=\beta}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

但し β は環の外側の半径である。

5) 變形前の座標に就て等置すべきであるから、嚴格には $(\widehat{rr}')_{r=\beta} = (\widehat{rr}')_{r=\beta+\delta(1+\cos\theta)}$ とすべきを (3.2) 式の様に許した。

環と圍繞體との接觸部に於ける變位の條件は、半徑方向には變形前に於て $U = \delta(1 + \cos \theta)^{\beta}$ の空きがあるとし、切線方向には未知量 $\Gamma \sin \theta$ の喰違ひがあるととして

$$\left. \begin{aligned} (u)_{r=\beta} &= (u')_{r=\beta} + \delta(1 + \cos \theta)^{\beta} \\ (v)_{r=\beta} &= (v')_{r=\beta} + \Gamma \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3)$$

(3.1), (3.2) 及び (3.3) 式が境の條件である。應力及び變位の式 (2.3), (2.4), (2.5) 及び (2.6) 式にこれらの條件を代入して係数 $A, B, C, D, F, X, A', C', D'$ を形式上きめることができる。但し孰れも未知量 Γ を一次式に含む。

こゝに接觸面に於ける切線變位の喰違ひは、一般に奇函數の Fourier 級數:

$$V_1 \sin \theta + V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 3\theta + \dots \quad (V_1, V_2, V_3, \dots \text{ は } \theta \text{ を含まず})$$

で與へられていゝが、これによつて生ずる歪エネルギーは、函數系の直交性の爲に、上の各項に對應して

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

となる。これの各項は夫々正であるから、歪エネルギー最小のためには第 2 項以下を捨てなければならない。よつて (3.3) 式の V は θ を含まぬ量である。

この V を決めるのは歪エネルギー最小の條件によることにする。

4. 條件方程式

上の第 2 節、第 3 節から次の様に條件方程式を得る。零次の項に就ては

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 & 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1-2\sigma & \frac{E}{E'} \frac{1+\sigma'}{1+\sigma} & -\frac{E\delta}{(1+\sigma)\beta} \end{vmatrix} \times \left(\frac{1}{\beta^2}, B, \frac{A'}{\beta^2}, 1\right) = 0 \dots \dots \dots (4.1)$$

これより係数 A, B, A' は

$$A = -\frac{C_1}{C_0} \beta^2 = -c_1 \beta^2, \quad B = \frac{C_2}{C_0} = c_2, \quad A' = -\frac{C_3}{C_0} \beta^2 = -c_3 \beta^2 \dots \dots \dots (4.2)$$

こゝに C_0 は (4.1) 式の行列の最後の縦列を除いた行列式で、各係數に共通な分母行列式。 C_1, C_2, C_3 は夫々第 1, 2, 3 番目の列を除いた行列式を表はすものとする。

6) $U = \delta(1 + \cos \theta)$ の檢證:

圖-3 に於て $\triangle OBO'$ に就き Lami の定理は

$$\frac{\beta + \delta}{\sin \theta} = \frac{\delta}{\sin \phi} = \frac{\beta + U}{\sin(\theta + \phi)}$$

上式より ϕ を消去して

$$U = \delta \cos \theta - \beta + (\beta + \delta) \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\beta + \delta}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

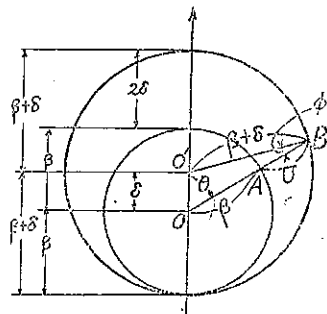
平方根の中を展開して

$$U = \delta \cos \theta - \beta + (\beta + \delta) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{(\beta + \delta)^2} \sin^2 \theta + (\delta^2 \text{ 以上の項}) \right\}$$

δ を小さい量として δ に比し δ^2 以上の項を無視すれば

$$U = \delta(1 + \cos \theta)$$

圖-3.



一次の項に就ては

C/β^2	D/β	$F\beta$	C'/β^2	D'/β	X/β	1
$-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$	$\kappa \frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	0	0	$\alpha(\omega-1)$
$-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	0	0	0
-1	κ	1	1	$-\kappa'$	0	$\omega\beta$
-1	1	1	1	-1	0	0
1	$\frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)} \log \beta$	$1-4\sigma$	$-\frac{E}{E'} \frac{(1+\sigma')}{(1+\sigma)}$	$-\frac{E(1+\sigma')}{E'(1+\sigma)} \frac{(3-4\sigma')}{4(1-\sigma')}$	$\log \beta$	$1, (1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \beta - \frac{E\delta}{(1+\sigma)\beta}$
1	$-\frac{1+(3-4\sigma) \log \beta}{4(1-\sigma)}$	$5-4\sigma$	$-\frac{E}{E'} \frac{(1+\sigma')}{(1+\sigma)}$	$\frac{E(1+\sigma')}{E'(1+\sigma)} \frac{1+(3-4\sigma') \log \beta}{4(1-\sigma')}$	$\log \beta$	$-1, (1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \beta - \frac{E}{(1+\sigma)\beta} V$

= 0(4.3)

但し $\kappa = \frac{3-2\sigma}{4(1-\sigma)}, \quad \kappa' = \frac{3-2\sigma'}{4(1-\sigma')}$

零次の項の場合と同様に行列式の形で (4.3) 式より次の解をうる。

$$X_i = \frac{(-1)^{i+1}}{D_0} D_i \quad (i=1, 2, \dots, 6; X_i=C/\beta^2, D/\beta, \dots, X/\beta) \dots\dots\dots(4.4)$$

(D_0 の展開形式は (4.11) 式)

こゝに D_0 は分母行列式で、 D_i は各未知数に所属する分子行列式である。(4.3) 式を計算の便宜のため行列要素の最後のものを 2 つにわけて次の 2 つの行列式群とする。

C/β^2	D/β	$F\beta$	C'/β^2	D'/β	X/β	1
/	/	/	/	/	/	$\alpha(\omega-1)$
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	$\omega\beta$
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	$(1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \beta - \frac{E\delta}{(1+\sigma)\beta}$
/	/	/	/	/	/	$(1-2\sigma) \frac{\omega}{2} \beta$

.....(4.5)

(斜線は (4.3) 式の対応する要素に同じ)。

C/β^2	D/β	$F\beta$	C'/β^2	D'/β	X/β	1
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	0
/	/	/	/	/	/	$-\frac{E}{(1+\sigma)\beta} V$

.....(4.6)

(斜線は (4.3) 式の對應する要素に同じ)。

よつて (4.4) 式を書き直して

$$X_i = \frac{(-1)^{i+1}}{D_0} (F_{i1} + F_{i2}V) = (-1)^{i+1} (f_{i1} + f_{i2}V) \quad (D_0 \text{ は (4.11) 式}) \dots\dots\dots (4.7)$$

とすることができる。こゝに F_{i1} は (4.5) 式から得られる分子行列式とし、 F_{i2} は (4.6) 式から得られる分子行列式とする。 f_{i1}, f_{i2} は計算の便宜上分母行列式 D_0 を含んだものを表はす。

f_{i1} は境界条件 (3.3) 式に於て切線變位の喰違ひが無いとした場合の解に對應し、 f_{i2} がこの喰違ひによつて生ずる修正項に對應する。 f_{i2} は夫々容易に展開することができるが、當分このまゝの形としておき、後に展開式を用ひることとする。但しこの中計算の結果

$$f_{32} = f_{52} = 0 \dots\dots\dots (4.8)$$

である。(4.7) 式を念入りに書けば

$$\left. \begin{aligned} C &= (f_{11} + f_{12}V)\beta^2, & C' &= -(f_{41} + f_{42}V)\beta^2, \\ D &= -f_{21}\beta, & D' &= f_{61}\beta, \\ F &= (f_{31} + f_{32}V)\frac{1}{\beta}, & X &= -(f_{61} + f_{62}V)\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

後の便宜のため (4.6) 式の分子行列式を展開計算すれば

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= -K, & E_{42} &= -K \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 - 1 \right\}, \\ F_{22} &= 0, & F_{62} &= 0 \\ F_{32} &= -K \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.10)$$

こゝに $K = (\kappa - 1)(\kappa' - 1) \frac{E}{(1 + \sigma)\beta}$, $f_{i2} = F_{i2}/D_0$ ($i = 1, 2, \dots, 5$).

又分母行列式を展開して

$$D_0 = -2(\kappa - 1)(\kappa' - 1) \left[\frac{E(1 + \sigma')}{E'(1 + \sigma)} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 - 1 \right\} + (3 - 4\sigma) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 + 1 \right] \dots\dots\dots (4.11)$$

5. 歪エネルギー最小の條件

平面歪の弾性體系の歪エネルギーは、極座標によるとき體系の厚さの方向の單位長さ當りに

$$W = \iint_{(r)} \left[\frac{1}{2E} (r^2 + \theta^2 + z^2) - \frac{\sigma}{E} \{ r\theta + z(r + \theta) \} + \frac{1 + \sigma}{E} r\theta^2 \right] r dr d\theta \dots\dots\dots (5.1)$$

こゝに積分は體系の全面積に互り行ふ。而して

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \{ z^2 - \sigma(r\theta + \theta^2) \} = 0, \quad \therefore z^2 = \sigma(r\theta + \theta^2)$$

これを (5.1) 式に代入して整理し、環と圍繞體とに就て夫々の歪エネルギーの和を作れば

$$\begin{aligned} W = W_1 + W_2 &= \frac{1 + \sigma}{2E} \oint_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \{ (1 - \sigma)(r^2 + \theta^2) - 2\sigma r\theta + 2r\theta^2 \} r dr d\theta \\ &+ \frac{1 + \sigma'}{2E'} \oint_{\beta}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \{ (1 - \sigma')(r'^2 + \theta'^2) - 2\sigma' r'\theta' + 2r'\theta'^2 \} r' dr' d\theta' \dots\dots\dots (5.2) \end{aligned}$$

(5.2) の右邊の第 2 項には積分遂行の結果 $[\log r]_{\beta}^{\alpha}$ の項を生じ、 W は零次の無限大となるが、このことは V を定めるのに邪魔にはならぬ。

(4.7) 式により未定係数は V の一次式で、従つて (2.3), (2.5) 式により應力成分も V の一次式である。よつて歪エネルギー W は V の二次式である。(5.2) 式の W を最小にするには

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{\partial W_1}{\partial V} + \frac{\partial W_2}{\partial V} = 0 \dots\dots\dots(5.3)$$

でよい。これから V を

$$a + bV = 0 \dots\dots\dots(5.4)$$

の形にうることができるであらう。而して (5.3) 式の計算を行ふに際しては、第 3 節に示した通り V は r, θ に関係のない量であるから、(5.3) 式の右邊の被積分函数の中に $\partial/\partial V$ をとり込んで差支へない。

6. 切線變位差 V の計算

(5.2) 式を V に就て微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial V} = & \frac{1+\sigma}{E} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(1-\sigma) \left(\frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} \widehat{r r'} + \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} \widehat{\theta \theta'} \right) - \sigma \left(\frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} \widehat{\theta \theta'} + \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} \widehat{r r'} \right) + 2 \frac{\partial \widehat{r \theta'}}{\partial V} \widehat{r \theta'} \right] r dr d\theta \\ & + \frac{1+\sigma'}{E'} \int_{\beta}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \left[(1-\sigma') \left(\frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} \widehat{r r'} + \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} \widehat{\theta \theta'} \right) - \sigma' \left(\frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} \widehat{\theta \theta'} + \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} \widehat{r r'} \right) + 2 \frac{\partial \widehat{r \theta'}}{\partial V} \widehat{r \theta'} \right] r dr d\theta \dots\dots\dots(6.1) \end{aligned}$$

(4.2), (4.9) 式の係数の値を應力成分 (2.3), (2.5) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r'} &= \left\{ -c_1 \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + c_2 \right\} + \left\{ -(f_{11} + f_{12}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 - \kappa f_{21} \left(\frac{\beta}{r} \right) + (f_{31} + f_{32}V) \left(\frac{r}{\beta} \right) + \omega r \right\} \cos \theta, \\ \widehat{\theta \theta'} &= \left\{ c_1 \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + c_2 \right\} + \left\{ (f_{11} + f_{12}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 - f_{21} \left(\frac{\beta}{r} \right) + 3(f_{31} + f_{32}V) \left(\frac{r}{\beta} \right) + \omega r \right\} \cos \theta, \\ \widehat{r \theta'} &= \left\{ -(f_{11} + f_{12}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 - f_{21} \left(\frac{\beta}{r} \right) + (f_{31} + f_{32}V) \left(\frac{r}{\beta} \right) \right\} \sin \theta, \\ \widehat{r r'} &= -c_3 \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + \left\{ (f_{41} + f_{42}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + \kappa' f_{51} \left(\frac{\beta}{r} \right) \right\} \cos \theta, \\ \widehat{\theta \theta'} &= c_3 \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + \left\{ -(f_{41} + f_{42}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + f_{51} \left(\frac{\beta}{r} \right) \right\} \cos \theta, \\ \widehat{r \theta'} &= \left\{ (f_{41} + f_{42}V) \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + f_{51} \left(\frac{\beta}{r} \right) \right\} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2)$$

(6.2) 式を V に就て微分し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} &= \left\{ -f_{12} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + f_{32} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right\} \cos \theta, & \frac{\partial \widehat{r r'}}{\partial V} &= f_{42} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 \cos \theta, \\ \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} &= \left\{ f_{12} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + 3f_{32} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right\} \cos \theta, & \frac{\partial \widehat{\theta \theta'}}{\partial V} &= -f_{42} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 \cos \theta, \\ \frac{\partial \widehat{r \theta'}}{\partial V} &= \left\{ -f_{12} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 + f_{32} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right\} \sin \theta, & \frac{\partial \widehat{r \theta'}}{\partial V} &= f_{42} \left(\frac{\beta}{r} \right)^2 \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.3)$$

よつて (6.2), (6.3) 式を (6.1) 式に代入して整頓すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial IV}{\partial r} = & \frac{(1+\sigma)\pi}{E} \int_{\alpha}^{\beta} \left[4f_{12}(f_{11}+f_{12}V) \left(\frac{\beta}{r}\right)^0 + (\kappa+1)f_{12}f_{21} \left(\frac{\beta}{r}\right)^4 + (4\kappa\sigma - \kappa + 4\sigma - 5)f_{21}f_{32} \right. \\ & + 4(3-4\sigma)f_{32}(f_{31}+f_{32}V) \left(\frac{r}{\beta}\right)^2 + 4(1-2\sigma)f_{32} \left(\frac{r}{\beta}\right) \omega r \left. \right] r dr \\ & + \frac{(1+\sigma')\pi}{E'} \int_{\beta}^{\infty} \left[4f_{42}(f_{41}+f_{42}V) \left(\frac{\beta}{r}\right)^0 + (\kappa'+1)f_{42}f_{51} \left(\frac{\beta}{r}\right)^4 \right] r dr = 0 \dots\dots\dots(6.4) \end{aligned}$$

この右邊の積分を遂行し、且つ(4.7),(4.10)式の分子行列式を代入して整頓すれば、(5.4)式の形： $a+bV=0$ を得る。但し a, b は夫々次の様である。

$$\begin{aligned} a = & \left[2F_{11} + (\kappa+1)F_{21} \right] / \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 1 \right\} + (4\kappa\sigma - \kappa + 4\sigma - 5)F_{21} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 / \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 1 \right\} \\ & + 2(3-4\sigma)F_{31} + 2(1-2\sigma)\omega\beta \left. \right] + \frac{E(1+\sigma')}{E'(1+\sigma)} [2F_{41} + (\kappa'+1)F_{51}] \dots\dots\dots(6.5) \end{aligned}$$

$$b = -2K \left[1 + (3-4\sigma) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 + \frac{E(1+\sigma')}{E'(1+\sigma)} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 - 1 \right\} \right] \dots\dots\dots(6.6)$$

ここに F_{11}, \dots, F_{51} は(4.5)式から得られる分子行列式。

$$K = (\kappa-1)(\kappa'-1) \frac{E}{(1+\sigma)\beta} = \frac{(1-2\sigma)(1-2\sigma')E}{16(1-\sigma)(1-\sigma')(1+\sigma)\beta}, \quad \kappa = \frac{3-2\sigma}{4(1-\sigma)}, \quad \kappa' = \frac{3-2\sigma'}{4(1-\sigma')} \dots\dots(6.7)$$

上の a, b に對して、所要の切線變位差 V は

$$V = -\frac{a}{b} \dots\dots\dots(6.8)$$

7. 切線變位差 V が應力分布に及ぼす影響

第4節に述べた様に、切線變位差 V を零と見做した解は(4.5)式の行列式から得られる。即ち(3.3)式をみれば $V=0$ のときには $(v)_{r=\beta} = (v')_{r=\beta}$ である。更に又 $\delta=0$ とすれば $(u)_{r=\beta} = (u')_{r=\beta}$ となり通常假定せられる境界條件になる。 $V=0$ の場合の通常解の係数の値を夫々

$$C_0, D_0, F_0, C_0', D_0'$$

とすれば、本文の場合の係数は、切線變位差 V による修正項を入れて

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 - K\beta^3 V, & C' &= C_0' + K \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 - 1 \right\} \beta^3 V, \\ D &= D_0, & D' &= D_0' \\ F &= F_0 - K \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 \frac{1}{\beta} V, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.1)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= f_{11}\beta^3, D_0 = -f_{21}\beta, F_0 = f_{31}/\beta, C_0' = -f_{41}\beta^3, D_0' = f_{51}\beta \\ f_{i1} & \text{は(4.5)式から得られる行列式の商} \text{---(4.7)式} \\ K & \text{は(6.7)式で定めた量} \\ V & \text{は(6.5),(6.6)及び(6.8)式で求めた量} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.2)$$

である。

よつて $V=0$ とした場合の應力成分を

$$\widehat{rr}_0, \widehat{\theta\theta}_0, \widehat{r\theta}_0, \widehat{rr}'_0, \widehat{\theta\theta}'_0, \widehat{r\theta}'_0$$

であらはし、切線變位差 V による修正項を

$$\widehat{rr}_V, \widehat{\theta\theta}_V, \widehat{r\theta}_V, \widehat{rr}'_V, \widehat{\theta\theta}'_V, \widehat{r\theta}'_V$$

であらはずならば、本文の場合の應力成分は夫々

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \widehat{rr}_0 + \widehat{rr}_V, & \widehat{rr}' &= \widehat{rr}'_0 + \widehat{rr}'_V, \\ \widehat{\theta\theta} &= \widehat{\theta\theta}_0 + \widehat{\theta\theta}_V, & \widehat{\theta\theta}' &= \widehat{\theta\theta}'_0 + \widehat{\theta\theta}'_V, \\ \widehat{r\theta} &= \widehat{r\theta}_0 + \widehat{r\theta}_V, & \widehat{r\theta}' &= \widehat{r\theta}'_0 + \widehat{r\theta}'_V \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.3)$$

である。こゝに修正項 $\widehat{rr}_V, \dots, \widehat{r\theta}'_V$ の値は (7.1) 式と (2.3), (2.5) 式とによつて次の様になる。即ち

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr}_V &= -KV \left\{ -\left(\frac{\beta}{r}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 \frac{r}{\beta} \right\} \cos \theta, & \widehat{rr}'_V &= -KV \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 - 1 \right\} \left(\frac{\beta}{r}\right)^3 \cos \theta, \\ \widehat{\theta\theta}_V &= -KV \left\{ \left(\frac{\beta}{r}\right)^3 + 3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 \frac{r}{\beta} \right\} \cos \theta, & \widehat{\theta\theta}'_V &= +KV \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 - 1 \right\} \left(\frac{\beta}{r}\right)^3 \cos \theta, \\ \widehat{r\theta}_V &= -KV \left\{ -\left(\frac{\beta}{r}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 \frac{r}{\beta} \right\} \sin \theta, & \widehat{r\theta}'_V &= -KV \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 - 1 \right\} \left(\frac{\beta}{r}\right)^3 \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.4)$$

これら修正項の式の體裁は比較的まとまりのある單純な形である。この單純な形をしてゐることは、修正項の應力分布に及ぼす影響を式の上で概念的な吟味する助けになるであらう。

ポアソン比の考へうる範圍 (0, 1/2) に対しては (6.7) 式より $K > 0$ 、従つて (6.6) 式より $b < 0$ である。よつて $a > 0$ 、 $a < 0$ に應じて $V > 0$ 、 $V < 0$ である。又 (7.4) 式の括弧 { } の中は孰れも { } ≥ 0 である。

(7.4) 式は環の内側及び外側で

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{rr}_V)_{r=\alpha} &= 0, & (\widehat{rr}_V)_{r=\beta} &= (\widehat{rr}'_V)_{r=\beta}, \\ (\widehat{r\theta}_V)_{r=\alpha} &= 0, & (\widehat{r\theta}_V)_{r=\beta} &= (\widehat{r\theta}'_V)_{r=\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.5)$$

を満足しなければならないことが、境の條件 (3.1), (3.2) 式を参照して、要求せられる。實際上式 (7.4) 式に就て (7.5) 式を容易に檢證することができる。

8. 結 び

圓形填充物をもつた平板の應力分布の問題に於て、填充物と平板との接觸部に於ける境界條件として先験的な拘束を與へずに、切線變位だけを自由に殘しておいて、これを歪エネルギー最小の條件から定めてみたのであるが、その結果は、先験的な拘束を加へたとした場合の應力成分に比べて、(7.3), (7.4) 式で與へた通りの相違を生じた。

この相違が數値的にどの位の影響をもつか、更に又最もありふれた場合、例へば圓形ボルトを有つた平板の引張り^{2),3)}の場合にはどんなになるか等の調べは今後の研究に致したい。

又圖-1 の様な問題で、極く微小な天端の空き (28) に對し、天端の環引張應力 (hoop tension) が仰拱のそれに比べてどの位大きくなるかといふことも數値の上で調べてみるべきである。捲立のある壓力隧道とか埋設した水壓鐵管路等の構造物に對し應力解析上多少の示唆を與へるかも知れない。

最後に此の種の問題の究極のねらひとしては、半徑變位差と切線變位差との兩方に合理的な自由度をもたせた解を得ることが望ましいと考へられる。而してこの方向の努力に對して一番大きな障害となるのは、筆者のつま

らぬ能力の範圍に關する限り、例へば Airy の重調和函數を出發點に假定するとすれば、明かに 函數形の數が境界條件方程式の數よりも少くなるといふ越え難い障壁に直面する。恐らく繁雜な變分法等の様な異なる方面から攻撃しなければ、この問題の解決の途は拓けないであらうと思はれる。

附 記 號

本文に使用した記號は、始めて出てきたところに説明してあるが、便宜上以下に主要なものだけを一括する。

- A, B, C, D, F, G : 同心圓環に使ふ函數の未定係數
 A', C', D' : 圓繞體に使ふ函數の未定係數
 D_0, D_i : 聯立方程式 (4.3) 式の分母行列式及び分子行列式
 a, b : 切線變位差 V を定める量 —— (6.5), (6.6) 式
 c_1, c_2, c_3 : 係數 A, B, A' を定める行列式の商 —— (4.2) 式
 E, E' : 環及び圓繞體のヤング率
 F_{i1}, E_{i2} : 行列式群 —— (4.5), (4.6) 式
 f_{i1}, f_{i2} : 行列式の商; $f_{i1} = F_{i1}/D_0$, $f_{i2} = E_{i2}/D_0$ —— (4.5), (4.6), (4.7) 式
 h : 環の内側に作用する基準水壓 ($\alpha \cos \theta$ の變化を考ふ) —— (3.1) 式
 K : 常數の組合せを略記 —— (4.10), (6.7) 式
 V : 環と圓繞體との接觸部の切線變位差 —— (3.3), (6.8) 式
 u, v : 環の半徑方面の變位及び切線方向の變位 —— (2.4) 式, 圖-2
 u', v' : 圓繞體の半徑方向の變位及び切線方向の變位 —— (2.6) 式
 W : 體系全體の歪エネルギー —— (5.2) 式
 X : 環の剛體變位
 α : 環の内側の半徑
 β : 環の外側の半徑
 δ : 環と圓繞體との天端の僅かな空き —— 圖-1, 3
 r, θ : 極座標系 —— 圖-1
 $\widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{r\theta}$: 環の應力成分
 $\widehat{r' r'}, \widehat{\theta' \theta'}, \widehat{r' \theta'}$: 圓繞體の應力成分
- これに接尾字 0 を附けたものは切線變位差 $V=0$ としたときの値、
接尾字 V を附けたものは切線變位差 V だけによる値
- κ, κ' : 常數の組合せを略記 —— (2.3), (2.5) 式
 σ, σ' : 環及び圓繞體のポアソン比
 ω : 環の單位容積當りの重量

謝意: 本文をまとめるについて何時もながら 東大土木教室最上武雄先生の御指導を頂いた。又先生の勞作^りの御厄介にもなつた。直接間接の先生の御啓示に厚く御禮申し上げる。 (昭. 17. 12. 20 受付)