論説報告

第29卷第2號　昭和18年2月

疊重の法則が許せないときの一様な斷面の棒の引張又は壓縮に就て

正會員　谷本勉之助*

要旨　本文は，一樣な斷面を有する棒狀態の引張又は壓縮の問題に於て，鑄鐵とかコンクリートとかに見られる樣に伸びと應力とが直線比例を示さないといふ實驗上の事實に對し，材料の"彈性常數"が内部の應力狀態に支配せられると考へて，近似的な數式解析を試みたものである。本文の結果によれば式の形の上からは伸びが過大に出ることの說明がつき，又鋼，鑄鐵，コンクリート等の應力歪曲線に對し，在來のものと異つた觀方から說明を與へらる。

目　次

1. 概　說

一樣な斷面をもつた棒の引張又は壓縮の問題に於て，彈性限界の中でも尙ほ實驗の結果と通常の計算値とが著しく一致しないことがある。鋼の樣な材料に於て可成り明瞭な直線比例が現れ，銅や鑄鐵に於て伸び應力直線が彎曲するのは，Ewing によれば材料を構成してゐる組織が前者では整然としてゐるのに對し，後者では不整の爲であると解する。

併し鋼でもピアノ線の樣な強度の極めて高い材料では，計算式による結果よりも，實際には相當に大きな伸びを生ずる。

細い針金の引張の問題に就て Gerstner が 1831 年（天保 2 年）に實驗的に求めた式は

$$p=A\varepsilon+B\varepsilon^2+C\varepsilon^3+D\varepsilon^4 \qquad (B<0,\ C\fallingdotseq D\fallingdotseq 0) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに p は內部應力，ε は伸びで，A, B, C, D は實驗によつて決められる常數である。而して C, D は實際問題として零とおいてよく，B は負の量であることを彼は指摘してゐる。其の後彼の外に Hodgkinson, Wertheim, Thompson 等がこの問題を研究した。

今式 (1) に於て $C=0,\ D=0$ と置き ε を逆に解けば

$$\varepsilon=\frac{1}{2B}\left(\sqrt{A^2+4Bp}-A\right)=ap+bp^2+cp^3+\cdots \qquad (a, b, c>0) \quad \cdots\cdots(2)$$

又比較的近年に到つて Seth が歪の第二次の項まで取つて，この問題を純數式的に取扱ひ Gerstner の實驗式と同じ格好の式を導いてゐる[1]。卽ち

---

* 工學士　臺北帝國大學囑託　臺灣電力株式會社囑託

1) B. R. Seth: "Finite strains in elastic problems," Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1935 年（昭和 10 年）124 卷 4 月號

$$p=\frac{E}{2}\left\{1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right\}=E\left(\varepsilon-\frac{3}{2}\varepsilon^2+\frac{4}{2}\varepsilon^3-\cdots\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

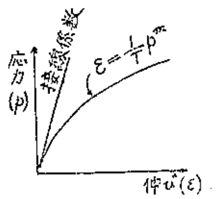
次に顯著な例は鑄物の金屬，コンクリート，石材等の場合である。これらの材料の壓縮試驗に於ては，荷重の初めから直線比例の樣相を示さず，圖-1 の樣に伸び應力曲線が顯著に彎曲する。この樣な場合を實驗に符合させる表現方法として，Bach-Schüle 式がある。卽ち

$$\varepsilon=\frac{1}{T}p^m \quad (m>1) \qquad \cdots\cdots(4)$$

表-1.　Bach-Schüle 式の m の値の例

材　　料	荷　　重	m
鑄　　鐵	引　　張	1.066
鑄　　鐵	壓　　縮	1.393
銅	引　　張	1.093

圖-1.



ここに T は接線係數，m は 1 より大きな數で表-1 の樣な實測値がある。

更にポアソン比は通常の考察に於ては，鋼其の他の延性に富む金屬類では，彈性領域で殆んど 1/3 に近い値を有し，鑄鐵，コンクリート，石材の樣な脆性の材料では遙かに小さく 1/5 以下であると考へられてゐるが，塑性領域に入れば總ての材料は，ポアソン比が 1/2 に近づくものと考へられてゐる。

以上の樣な事柄に對して，材料の荷重狀態に應じて刻々に彈性常數が變ると考へて一つの概括的な說明を與へようと試みたのが本文の目的である。

2.　問題の考へ方

棒の兩端に外力として軸方向の荷重 P が作用してゐるとき，この棒の內部に生ずべき應力に就ては，Hooke の法則（一般化された）及び疊重の法則を許せないとすれば，通常の簡單な計算が全く賴りにならぬ理である。荷重が零の狀態から順次に P まで增加する過程に於て，棒の正斷面積は次第に變化して行く。荷重 P を數多くの荷重 $\delta P_1, \delta P_2, \cdots, \delta P_n$ に分けたと考へたとき，同じ値の δP の載荷に對してでも，始めの荷重 $(0, \delta P_1)$ によつて生ずべき內部應力と，終りの荷重 $(\delta P_{n-1}, \delta P_n)$ によつて生ずべき內部應力とは相等しくない筈である。この際內部應力の成分は後に記す樣に荷重の方向の直應力 $\widehat{zz}$ だけであるが，P によつて生ずべき $\widehat{zz}$ は，正斷面積の初めの値 F_0 及び終りの値 F_n（F_n はここでは未知量）に對して，P/F_0 でもなければ亦 P/F_n でもない。この樣な事情は絲ゴムを引張つた場合の如く，大きな變形をなすまで破壞せずにゐる樣な材料に就て考へれば至極當然な事柄である。

又この樣な斷面積の變化に基く問題のみならず，任意の $(\delta P_{r-1}, \delta P_r)$ の間の載荷に於ける材料の彈性的特性が問題の對象となる。卽ち等方等質の固體の體系が靜的な釣合の狀態に於て保有しうる 2 個の“獨立な彈性常數”は，一般には $(\delta P_{r-1}, \delta P_r)$ の外部荷重に對する微小な內部應力 $(\delta\widehat{zz}_r, \cdots)$ と微小な內部歪 $(\delta l_{zzr}, \cdots)$ との間に於てのみ“獨立な常數”であると考ふべきであらう。而して荷重 P の增加に伴つてこの“常數”は漸次にその値を變へて行く。換言すれば，體系內の或る要素體積の“或る狀態に於ける彈性常數”は，$(\delta P_{r-1}, \delta P_r)$ なる外部荷重を適用する初めの應力狀態に支配せられる。$(\delta P_{r-1}, \delta P_r)$ なる要素荷重の側からみれば，これを適

用する以前の應力は，一種の初應力と考ふべきものである。而して $(0, \delta P_1), (\delta P_1, \delta P_2), \cdots, (\delta P_{r-2}, \delta P_{r-1})$ なる要素荷重による內部應力の狀態は，夫々“嚴格に”單純引張である。從つてそれらの集積した“初應力”も亦單純引張である。依て棒の引張の方向の直應力成分を p とすれば，2 つの材料係數 E, σ（E はヤング率，σ はポアソン比と同じ意味のものであるが，必ずしも彈性復歸を必要としない）は孰れも p の函數と考へられる。即ち

$$E=f_1(p) \qquad \sigma=f_2(p)$$

ここに材料係數が 2 個でよいかどうかに就ては，この 2 個の係數を次の式 (5), (6) の形に得て，更に式 (12) を作り，それから體系の力學的擧動が完全に表現できるといふ結果から考へ，2 個の係數で必要且つ十分である。

これらが $p=0$ の附近で羃級數に展開することができるとすれば

$$E=E_0+a_1'p+a_2'p^2+\cdots+a_s'p^s+\cdots$$

$$\sigma=\sigma_0+b_1'p+b_2'p^2+\cdots+b_t'p^t+\cdots$$

と書くことができる。ここに E_0, σ_0 は $(0, \delta P_1)$ の外部荷重に對應する材料係數である。而して p はそれ自體所要の應力であつて，外部荷重 P，正斷面積 F，材料係數 E, σ の函數である筈であるが，問題を簡單にするため P/F_0（F_0 は初めの正斷面積）の影響が支配的であると考へ $p=f_3(P/F_0)$ として，これを上と同樣に羃級數に展開可能とし，その結果を上式に代入して整頓すれば，E, σ に對して次の形の羃級數が得られる。

即ち

$$E=E_0+a_1\frac{P}{F_0}+a_2\left(\frac{P}{F_0}\right)^2+\cdots+a_s\left(\frac{P}{F_0}\right)^s=E_0+\sum_{r=1}^{s}a_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r \cdots\cdots(5)$$

$$\sigma=\sigma_0+b_1\frac{P}{F_0}+b_2\left(\frac{P}{F_0}\right)^2+\cdots+b_t\left(\frac{P}{F_0}\right)^t=\sigma_0+\sum_{r=1}^{t}b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r \cdots\cdots(6)$$

ここに係數 a_r, b_r は實驗資料から求められる筈の常數で，E_0, σ_0 と共に材料に特有な量であると考へられる。而して種々の概念的な根據から通例

$$a_r<0, \qquad b_r>0 \text{ [2]} \cdots\cdots(7)$$

であると豫想せられる。後に數式の誘導を行つた結果について，式 (7) を假定して諸種の檢證を行ふであらう。

3. 要素諸量の間の關係

全外部荷重 P を計算の便宜のため，無限に數多くの相等しい間隔の荷重に分けて考へる。載荷の過程を

$$(0, \delta P),\ (\delta P, 2\delta P),\ \cdots,\ \{(r-1)\delta P, r\delta P\},\ \{r\delta P, (r+1)\delta P\},\ \cdots,\ \{(n-1)\delta P, n\delta P\} \quad (n\to\infty)$$

とし，夫々の載荷の過程に對應する諸種の量を次の表-2 の樣であるとする。

外部荷重 P が引張のときは，正斷面積 F は荷重につれて逐次減少するから，同一の δP に對して $\delta\widehat{zz}_r$ は逐次增大する筈である。即ち

$$\delta\widehat{zz}_r<\delta\widehat{zz}_{r+1} \qquad (r=1, 2, \cdots, n)$$

外部荷重 P が壓縮のときはこれの逆である。

而して $n\delta P=P$ なる最終の荷重をかけ終つたときの個々の要素直應力の和が，所要の直應力 $\widehat{zz}$ であると考へられるから

2) 通常材料力學で對象となる樣な種類の材料——金屬，コンクリート，石材等——では式 (7) が存在すると豫想せられるが，さうでない樣な材料も在るであらう。

表-2. 諸　量　の　表

順　序	(I),	(II),	......,	(R),	$(R+I)$,	....,	(N)
載荷の過程	$(0,\delta P)$,	$(\delta P, 2\delta P)$,	....,	$\{(r-1)\delta P, r\delta P\}$,	$\{r\delta P,(r+1)\delta P\}$,	....,	$\{(n-1)\delta P, n\delta P\}$
荷重の増分	δP,	δP,	......,	δP,	δP,	....,	δP
ヤング率 (E)	E_0,	E_1,	......,	E_{r-1},	E_r,	....,	E_{n-1}
ヤング率の増分	δE_1,	δE_2,	......,	δE_r,	δE_{r+1},	....,	δE_n
ポアソン比 (σ)	σ_0,	σ_1,	......,	σ_{r-1},	σ_r,	....,	σ_{n-1}
ポアソン比の増分	$\delta\sigma_1$,	$\delta\sigma_2$,	......,	$\delta\sigma_r$,	$\delta\sigma_{r+1}$,	....,	$\delta\sigma_n$
AB の變形前の長さ (R) (圖-2)	R_0,	R_1,	......,	R_{r-1},	R_r,	....,	R_{n-1}
正斷面積 (F)	F_0,	F_1,	......,	F_{r-1},	F_r,	....,	F_{n-1}
棒の變形前の全長	l_0,	l_1,	......,	l_{r-1},	l_r,	....,	l_{n-1}
荷重 δP による R の變化量	δR_1,	δR_2,	......,	δR_r,	δR_{r+1},	....,	δR_n
荷重 δP による直應力	$\delta\widehat{zz}_1$,	$\delta\widehat{zz}_2$,	......,	$\delta\widehat{zz}_r$,	$\delta\widehat{zz}_{r+1}$,	....,	$\delta\widehat{zz}_n$
荷重 δP による軸方向の歪	δl_{zz1},	δl_{zz2}	......,	δl_{zzr},	δl_{zzr+1},	....,	δl_{zzn}
荷重 δP による棒の全長の變化量	$\delta\Delta l_1$,	$\delta\Delta l_2$,	......,	$\delta\Delta l_r$,	$\delta\Delta l_{r+1}$,	....,	$\delta\Delta l_n$

$$\widehat{zz}=\delta\widehat{zz}_1+\delta\widehat{zz}_2+\cdots+\delta\widehat{zz}_n=\sum_{r=1}^{n}\delta\widehat{zz}_r \qquad (8)$$

又荷重 P の後に於ける棒の全體の伸び Δl は，個々の要素伸び $\delta\Delta l_r$ の和であると考へられる。即ち

$$\Delta l=\delta\Delta l_1+\delta\Delta l_2+\cdots+\delta\Delta l_n=\sum_{r=1}^{n}\delta\Delta l_r \qquad (9)$$

又は

$$\Delta l=l_n-l_0 \qquad (9')$$

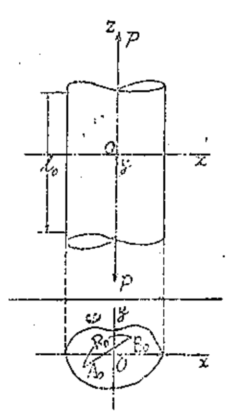
式(8), (9) では有限な大さの外部荷重 P を數式的な取扱をするため微小量に分けて考へるのであつて，“疊重の法則” を許してゐるのではない。後に取扱ふ式でも明かな様に，本文ではすべては有限な大さの量に就て疊重の法則が適用できないのである。

さて棒は載荷の前にその正斷面が一様であるとし，且つ載荷の過程に於ても常に一様な正斷面を保つとする。材料の擧動に就てこれ丈けの條件さへ附加せられるならば，其の他の事情はどの様でも差支へない。即ち棒に局部的なくびれやはらみ出しさへ起らない範圍であれば構はないのであつて，材料の彈性復歸は必ずしも要しない。初めの無負荷の狀態に於て正斷面内に任意の 2 つの固定點 A_0, B_0 を考へ，$A_0B_0=R_0$ とすれば，初めの正斷面積 F_0 は

$$F_0=\kappa R_0^2$$

ここに κ は荷重 P に關係のない常數である（例へば斷面が圓の場合には A_0 を圓の中心にとり B_0 を圓周上の一點にとれば $F_0=\pi R_0^2$, 又斷面が矩形の場合には A_0B_0 をその一邊にとり $A_0B_0=a_0$ とし他の一邊を $\kappa a_0=b_0$ とすれば $F_0=(a_0b_0)$。一般に R_0 は荷重 P の變化に伴つてその値を變へる。

圖-2.



$(0,\delta P)$ の載荷に對する應力と歪の狀態は次の様である。

$$\begin{pmatrix} \widehat{xx}, & \widehat{xy}, & \widehat{xz} \\ \widehat{yx}, & \widehat{yy}, & \widehat{yz} \\ \widehat{zx}, & \widehat{zy}, & \widehat{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \delta\widehat{zz}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l_{xx}, & l_{xy}, & l_{xz} \\ l_{yx}, & l_{yy}, & l_{hz} \\ l_{zx}, & l_{zy}, & l_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta l_{xx_1}, & 0, & 0 \\ 0, & \delta l_{yy_1}, & 0 \\ 0, & 0, & \delta l_{zz_1} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

而してこれらの量の間の關係は表-2 により

$$\delta l_{zz_1} = \frac{1}{E_0}\delta\widehat{zz}_1 \qquad \delta l_{xx_1} = \delta l_{yy_1} = \frac{\sigma_0}{E_0}\delta\widehat{zz}_1$$

要素直應力 $\delta\widehat{zz}_1$ は正斷面 F_0 內に一樣に分布するとして

$$\delta\widehat{zz}_1 = \frac{\delta P}{F_0}$$

棒の全長 l_0 の $(0, \delta P)$ による伸び $\delta\varDelta l_1$ は

$$\delta\varDelta l_1 = l_0\cdot\delta l_{zz_1} = \frac{l_0}{E_0F_0}\delta P$$

依て $(0, \delta P)$ を載荷した後の棒の全長 l_1 は

$$l_1 = l_0 + \delta\varDelta l_1 = l_0\left(1 + \frac{1}{E_0F_0}\delta P\right)$$

又 $(0, \delta P)$ 後に於ける $A_0B_0 = R_0$ の變化量 δR_1 は

$$\delta R_1 = R_0\cdot\delta l_{xx_1} = \frac{\sigma_0 R_0}{E_0F_0}\delta P$$

この δR_1 の變化を生じた後の正斷面積 F_1 は

$$F_1 = \kappa R_1^2 = \kappa(R_0 - \delta R_1)^2 = F_0\left(1 - \frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\right)^2 \qquad (\delta P>0 \text{ を引張の場合とする})$$

以上の關係は一般に任意の r 番目のものに就て成立つ。即ち

$$\left.\begin{aligned} &\delta\widehat{zz}_r = \frac{\delta P}{F_{r-1}}, \quad \delta R_r = \frac{\sigma_{r-1}R_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P, \quad R_r = R_{r-1}\left(1 - \frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right), \\ &F_r = \kappa R_r^2 = F_{r-1}\left(1 - \frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right)^2, \\ &\delta\varDelta l_r = \frac{l_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P, \quad l_r = l_{r-1}\left(1 + \frac{1}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right), \text{ 但し } r = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

上式中 E_{r-1}, σ_{r-1} は次の樣に書くことができる。

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E_0 + \delta E_1 = E_0 + a_1\frac{\delta P}{F_0} + a_2\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^2 + \cdots\cdots + a_s\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^s \\ E_{r-1} &= E_0 + \delta E_1 + \delta E_2 + \cdots\cdots + \delta E_{r-1} \\ &= E_0 + a_1(r-1)\frac{\delta P}{F_0} + a_2(r-1)^2\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^2 + \cdots\cdots + a_s(r-1)^s\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^s \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \delta\sigma_1 = \sigma_0 + b_1\frac{\delta P}{F_0} + b_2\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^2 + \cdots\cdots + b_t\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^t \\ \sigma_{r-1} &= \sigma_0 + \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2 + \cdots\cdots + \delta\sigma_{r-1} \\ &= \sigma_0 + b_1(r-1)\frac{\delta P}{F_0} + b_2(r-1)^2\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^2 + \cdots\cdots + b_t(r-1)^t\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^t \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

圖-3.

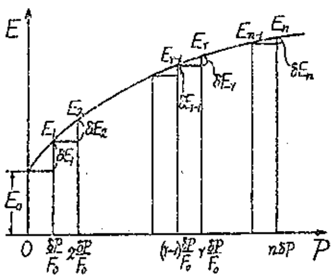
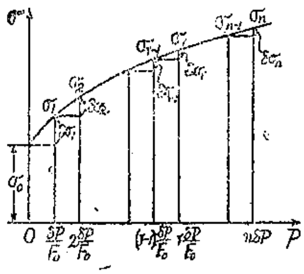


圖-4.



式 (13), (14) を圖示すれば圖-3, 4 の樣である。

4. 數式の計算

式 (12) を基本にして，以下の樣に逐次計算を遂行する。但し以下に於ては計算の簡單のため $1/E_0$ の高次の項を省略することにする。

式 (12) の F_r は漸化式に書きかへて

$$F_r=F_{r-1}\left(1-\frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right)^2=F_{r-2}\left(1-\frac{\sigma_{r-2}}{E_{r-2}F_{r-2}}\delta P\right)^2\cdot\left(1-\frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right)^2$$

$$=F_0\left(1-\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\right)^2\left(1-\frac{\sigma_1}{E_1F_1}\delta P\right)^2\cdots\left(1-\frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right)^2$$

$$=F_0\left(1-2\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\right)\left(1-2\frac{\sigma_1}{E_1F_1}\delta P\right)\cdots\left(1-\frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\delta P\right)$$

$$=F_0\left\{1-2\delta P\left(\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\frac{\sigma_1}{E_1F_1}+\cdots+\frac{\sigma_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

然るに上式の括弧（　） の中の一般項は，$1/E_0$ の高次の項を無視すれば

$$\frac{\sigma_u}{E_uF_u}=\frac{\sigma_u}{F_0F_0}\left(\frac{E_u}{E_0}\right)^{-1}\left(\frac{F_u}{F_0}\right)^{-1}=\frac{\sigma_u}{E_0F_0}\left\{1-\frac{1}{E_0}\left[a_1u\frac{\delta P}{F_0}a_2u^2\left(\frac{\delta P}{F_0}\right)^2+\cdots\right]\right\}\left\{1+2\delta P\left(\frac{\sigma_0}{E_0F_0}+\frac{\sigma_1}{E_1F_1}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{\sigma_u}{E_0F_0}$$

故に式 (15) の F_r は

$$F_r=F_0\left\{1-2\frac{\delta P}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{r-1})\right\}=F_0\left\{1-\frac{2}{E_0F_0}\int_0^{(r-1)\delta P}\sigma dP\right\}$$

$$=F_0\left[1-\frac{2}{E_0F_0}\left\{\sigma_0(r-1)\delta P+b_1\frac{1}{2F_0}(r-1)^2(\delta P)^2+b_2\frac{1}{3F_0^2}(r-1)^3(\delta P)^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+b_t\frac{1}{(t+1)F_0^t}(r-1)^{t+1}(\delta P)^{t+1}\right\}\right]\quad 但し\quad r=1,2,\cdots,(n-1)\cdots\cdots(16)$$

式 (16) により式 (12) の要素應力 $\delta\widehat{zz}_r$ は

$$\delta\widehat{zz}_r=\frac{\delta P}{F_{r-1}}=\delta P\cdot F_0\left[1+\frac{2}{E_0F_0}\left\{\sigma_0(r-2)\delta P+b_1\frac{1}{2F_0}(r-2)^2(\delta P)^2+b_2\frac{1}{3F_0^2}(r-2)^3(\delta P)^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+b_t\frac{1}{(t+1)F_0^t}(r-2)^{t+1}(\delta P)^{t+1}\right\}\right]\quad 但し\quad r=3,4,\cdots,n\cdots\cdots(17)$$

$r=1,2$ のときは

$$\delta\widehat{zz}_1=\frac{\delta P}{F_0},\qquad \delta\widehat{zz}_2=\frac{\delta P}{F_0}\left(1+2\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\right)\quad\cdots\cdots(18)$$

所要の直應力 $\widehat{zz}$ は式 (8) によつて式 (17), (18) の和を作り

$$\widehat{zz}=\sum_{r=1}^{n}\delta\widehat{zz}_r=\frac{\delta P}{F_0}+\frac{\delta P}{F_0}\left(1+2\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\right)$$

$$+\sum_{r=3}^{n}\delta P\cdot F_0\Big[1+\frac{2}{E_0F_0}\Big\{\sigma_0(r-2)\delta P+b_1\frac{1}{2F_0}(r-2)^2(\delta P)^2+b_2\frac{1}{3F_0^2}(r-2)^2(\delta P)^3$$

$$+\cdots\cdots+b_t\frac{1}{(t+1)F_0^t}(r-2)^{t+1}(\delta P)^{t+1}\Big\}\Big]$$

この和を求めるに，$n\to\infty$ とし $n\delta P=P$ で置きかへれば

$$\widehat{zz}=\frac{P}{F_0}+\frac{1}{E_0}\left\{\sigma_0\left(\frac{P}{F_0}\right)^2+\frac{b_1}{3}\left(\frac{P}{F_0}\right)^3+\frac{b_2}{6}\left(\frac{P}{F_0}\right)^4+\cdots\cdots+\frac{2b_t}{(t+1)(t+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{t+2}\right\}$$

$$=\frac{P}{F_0}\left[1+\frac{\sigma_0P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_{r=1}^{t}\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]\quad\cdots\cdots(19)$$

これが所要の應力であつて，括弧 [ ] の第 2 項以下を無視したものが通常の算式である。

次に全體の伸び $\varDelta l$ を求める。そのためには先づ式 (12) の要素伸び $\delta\varDelta l_r$ を求めよう。式 (12) から l_r について次の形の漸化式をうる。

$$l_r=l_{r-1}\cdot\left(1+\frac{\delta P}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)=l_{r-2}\left(1+\frac{\delta P}{E_{r-2}F_{r-2}}\right)\cdot\left(1+\frac{\delta P}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)=\cdots$$

$$=l_0\left(1+\frac{\delta P}{E_0F_0}\right)\left(1+\frac{\delta P}{E_1F_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta P}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)$$

前と同樣に $1/E_0$ の高次の項を省略して

$$l_r=l_0\left\{1+\delta P\left(\frac{1}{E_0F_0}+\frac{1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)\right\}\qquad \text{但し } r=1,2,\cdots,n\quad\cdots\cdots(20)$$

然るにこの括弧 ( ) の中を變化すれば

$$\left(\frac{1}{E_0F_0}+\frac{1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{r-1}F_{r-1}}\right)=\frac{1}{E_0F_0}\Big[r-\frac{1}{E_0}\{(r-1)\delta E_1+(r-2)\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{r-1}\}$$

$$+\frac{2\delta P}{E_0F_0}\{(r-1)\sigma_0+(r-2)\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-2}\}\Big]\quad\cdots\cdots(21)$$

式 (12) の $\delta\varDelta l_r$ は

$$\delta\varDelta l_r=\frac{l_{r-1}}{E_{r-1}F_{r-1}}\cdot\delta P=l_0\left\{1+\delta P\left(\frac{1}{E_0F_0}+\frac{1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{r-2}F_{r-2}}\right)\right\}\cdot$$

$$\frac{1}{E_0}\left\{1-\frac{1}{E_0}(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{r-1})\right\}\frac{1}{F_0}\left\{1+2\frac{\delta P}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-2})\right\}\cdot\delta P$$

$$=\frac{l_0}{E_0F_0}\delta P\Big[1+\delta P\left(\frac{1}{E_0F_0}+\frac{1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{r-2}F_{r-2}}\right)-\frac{1}{E_0}(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{r-1})$$

$$+2\frac{\delta P}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-2})\Big]\quad\cdots\cdots(22)$$

式 (22) の括弧 [ ] の中を見較べて，式 (21) の括弧 [ ] の中の第 2 項，第 3 項は高次の項として省略することができる。よつて式 (22) は

$$\delta\Delta l_r=\frac{l_0}{E_0F_0}\delta P\Big[1+\frac{1}{E_0F_0}(r-1)-\frac{1}{E_0}(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{r-1})$$
$$+2\frac{\delta P}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-2})\Big],\qquad 但し\quad r=2,3,\cdots,n\cdots\cdots(23)$$

$r=1$ のときは

$$\delta\Delta l_1=\frac{l_0}{E_0F_0}\delta P\cdots\cdots(24)$$

所要の全體の伸び Δl は式 (9) により式 (23),(24) の和で與へられるから

$$\Delta l=\sum_{r=1}^{n}\delta\Delta l_r=\frac{l_0}{E_0F_0}\delta P+\sum_{r=2}^{n}\frac{l_0}{E_0F_0}\delta P\Big[1+\frac{(r-1)}{E_0F_0}-\frac{1}{E_0}(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{r-1})$$
$$+\frac{2\delta P}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-2})\Big]$$

この和を求めるには $n\to\infty$ として逐次 $n\delta P=P$ で置きかへればよい。

$$\Delta l=\frac{l_0}{E_0F_0}\Big[n\delta P+\frac{1}{2}\frac{P^2}{E_0F_0}-\frac{1}{E_0}\Big\{a_1\frac{P^2}{2F_0}+a_2\frac{P^3}{3F_0}+\cdots\cdots+a_s\frac{P^{s+1}}{(s+1)F_0{}^s}\Big\}$$
$$+\frac{2}{E_0F_0}(\delta P)^2\{(n-1)\sigma_0+(n-2)\sigma_1+\cdots\cdots+2\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}\}\Big]$$

この式の括弧 [ ] の最後の項の和を求める計算は $n\to\infty$ の場合に限り稍容易に遂行することが出來て，上式は結局次の樣になる[3]。

3) Δl を求める別の途は式 (9′) から出發すればよい。この場合には式 (20) の代りに

$$l_n=l_0\Big[1+\delta P\Big(\frac{1}{E_0F_0}+\frac{1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{n-1}F_{n-1}}\Big)+(\delta P)^2\Big\{\frac{1}{E_0F_0}\Big(\frac{1}{E_1F_1}+\frac{1}{E_2F_2}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{n-1}F_{n-1}}\Big)+\frac{1}{E_1F_1}\Big(\frac{1}{E_2F_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{n-1}F_{n-1}}\Big)+\cdots\cdots+\frac{1}{E_{n-2}F_{n-2}}\cdot\frac{1}{E_{n-1}F_{n-1}}\Big\}\Big]$$

括弧 [ ] の中の第 2 項 $\delta P(\ )$ の一般項は

$$\frac{1}{E_rF_r}=\frac{1}{\{E_0+(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_r)\}\cdot\Big\{F_0-2\dfrac{\delta P}{E_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-1})\Big\}}$$
$$=\frac{1}{E_0F_0}\Big[1-\frac{1}{E_0}(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_r)+\frac{2}{E_0F_0}\delta P(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{r-1})\Big]$$

又 $(\delta P)^2$ の項は簡單に

$$(\delta P)^2\{\ \}=(\delta P)^2\cdot\Big\{\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2(n-1)+\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2(n-2)+\cdots\cdots+\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2\Big\}=\frac{1}{2}n(n-1)(\delta P)^2\cdot\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2$$

故に

$$l_n=l_0\Big[1+\delta P\cdot\frac{1}{E_0F_0}\Big\{n-\frac{1}{E_0}[n(\delta E_1+\delta E_2+\cdots\cdots+\delta E_{n-1})-(1\cdot\delta E_1+2\cdot\delta E_2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\delta E_{n-1})]$$
$$+\frac{2}{E_0F_0}[n(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{n-2})-(1\cdot\sigma_0+2\cdot\sigma_1\cdots\cdots+(n-1)\cdot\sigma_{n-2})]\delta P\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}n(n-1)(\delta P)^2\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2\Big]$$

この計算を遂行するためには，式 (13),(14) を代入し，n についての支配羃を考慮して

$$l_n=l_0\Big[1+\frac{P}{E_0F_0}\Big\{1-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\Big[\sigma_0\frac{P}{F_0}+\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\Big\}+\frac{P^2}{2}\Big(\frac{1}{E_0F_0}\Big)^2\Big]$$

故に

$$\Delta l=l_n-l_0=\frac{Pl_0}{E_0F_0}\Big[1+\frac{1+2\sigma_0}{2E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]=[式\ (25)]\cdots(25')$$

これは上欄の式 (25) と同じである。

$$\Delta l=\frac{Pl_0}{E_0F_0}\Big[1+\frac{1+2\sigma_0}{2E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\Big\{\frac{a_1}{2}\frac{P}{F_0}+\frac{a_2}{3}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^2+\cdots\cdots+\frac{a_s}{s+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^s\Big\}$$

$$+\frac{2}{E_0}\Big\{\frac{b_1}{2\cdot 3}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^2+\frac{b_2}{3\cdot 4}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^3+\cdots\cdots+\frac{b_t}{(t+1)(t+3)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{t+1}\Big\}\Big]$$

$$=\frac{Pl_0}{E_0F_0}\Big[1+\frac{1+2\sigma_0}{2EF_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_{r=1}^{s}\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_r}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\sum_{r=1}^{t}\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

式 (25) が所要の伸びである。括弧 [ ] の中の第 2 項以下を無視すれば通常の算式となる。

5. 彈性常數の逆の誘導

次に上に求めた量を規準にして逆に彈性常數を算出しよう。先づ式 (25) を P の變數として l_{zz} の微分を作れば

$$\delta l_{zz}=\frac{\delta\Delta l}{l_0}=\frac{1}{l_0}\frac{\partial\Delta l}{\partial P}\delta P=\frac{\delta P}{E_0F_0}\Big[1+\frac{1+2\sigma_0}{E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\ \cdots\cdots(26)$$

ここに $\partial/\partial P$ は P に就ての偏微分をあらはす。

又式 (19) より $\widehat{zz}$ の微分を作れば

$$\delta\widehat{zz}=\frac{\partial\widehat{zz}}{\partial P}\delta P=\frac{\delta P}{F_0}\Big[1+\frac{2\sigma_0}{E_0F_0}P+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

式 (27) と式 (26) との比を作つて

$$\frac{\delta\widehat{zz}}{\delta l_{zz}}=\frac{\delta P}{F_0}\Big[1+\frac{2\sigma_0}{E_0F_0}P+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\cdot\frac{E_0F_0}{\delta P}\Big[1-(1+2\sigma_0)\frac{P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]$$

$$=E_0\Big[1+\frac{2\sigma_0}{F_0F_0}P+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}-(1+2\sigma_0)\frac{P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]$$

$$=E_0+\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{P}{F_0}$$

$$=[\text{式 (5) の } E]-\frac{P}{F_0}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

即ち始めに假定したヤング率式 (5) と較べて，P/F_0 だけの差がある。

次に同樣の計算をポアソン比に就て實行する。先づ正斷面內の線分 R_0 の變化を求めるに，式 (12) から R_0 の漸化式を作つて R_n を求めれば

$$R_n=R_0\Big(1-\frac{\sigma_0}{E_0F_0}\delta P\Big)\Big(1-\frac{\sigma_1}{E_1F_1}\delta P\Big)\cdots\cdots\Big(1-\frac{\sigma_{n-1}}{E_{n-1}F_{n-1}}\partial P\Big)$$

$$=R_0\Big[1-\delta P\Big(\frac{\sigma_0}{E_0F_0}+\frac{\sigma_1}{E_1F_1}+\cdots\cdots+\frac{\sigma_{n-1}}{E_{n-1}F_{n-1}}\Big)\Big]=R_0\Big[1-\frac{1}{E_0F_0}(\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_{n-1})\delta P\Big]$$

$$=R_0\Big[1-\frac{\sigma_0}{E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

式 (29) より l_{xx} を求めれば

$$l_{xx}=\frac{R_0-R_n}{R_0}=\frac{\sigma_0P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

これの微分を作れば

$$\delta l_{xx}=\frac{\partial l_{xx}}{\partial P}\delta P=\frac{\delta P}{E_0F_0}\Big[\sigma_0+\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r\Big] \quad\cdots\cdots(31)$$

よつて式 (31) と式 (25) との比を作り

$$\frac{\delta l_{xx}}{\delta l_{zz}}=\frac{\delta P}{E_0F_0}\Big[\sigma_0+\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r\Big]\cdot\frac{E_0F_0}{\delta P}\Big[1-(1+2\sigma_0)\frac{P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]$$

$$=\sigma_0+\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\sigma_0(1+2\sigma_0)\frac{P}{E_0F_0}+\frac{\sigma_0}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{\sigma_0}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}$$

$$-\frac{1+2\sigma_0}{E_0}\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r\cdot\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{E_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\cdot\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r \quad\cdots\cdots(32)$$

この式の第 3 項以下は $a_r<0,\ b_r>0$ とすればすべて負の値を寄與する。而して孰れも分母に E_0 を有するから，第一近似値としては初めの 2 項に對して省略することができる。この場合には次の簡單な式になる。卽ち

$$\frac{\delta l_{xx}}{\delta l_{zz}}=\sigma_0+\sum_1^t b_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r=[\text{式 (6) の }\sigma] \quad\cdots\cdots(33)$$

これは始めに假定したポアソン比であつて，$(P,\ P+\delta P)$ に於けるポアソン比が，第一近似の範圍で所定の値をとることを檢算し得たのである。

6. 見掛けの彈性常數

以下に於て “見掛けのヤング率” 及び “見掛けのポアソン比” を誘導して，これらを眞實らしき値と比較しよう。

通常の方法に於て，直接測定の場合のヤング率を求める爲の手がかりは，外部荷重 P，正斷面積 F_0，全長 l_0 これに對する伸び $\varDelta l$ の 4 個の量である。これから求められるヤング率をここでは “見掛けのヤング率” と稱することゝし，これを $(E)_\varDelta$ で表はせば

$$(E)_\varDelta=\frac{P/F_0}{\varDelta l/l_0}=\frac{Pl_0}{F_0}(\varDelta l)^{-1} \quad\cdots\cdots(34)$$

この式に伸びの計算値，式 (25) を代入すれば

$$(E)_\varDelta=E_0+\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}-(1+2\sigma_0)\frac{P}{2F_0} \quad\cdots\cdots(35)$$

これを眞實らしきヤング率，式 (5) と比較すれば

$$\frac{(E)_\varDelta}{E}=E_0\Big[1-\frac{1+2\sigma_0}{2E_0F_0}P+\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\cdot\frac{1}{E_0}\Big[1-\frac{1}{E_0}\sum_1^s a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r\Big]$$

$$=1-\frac{1+2\sigma_0}{2E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{r}{r+1}a_r\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1} \quad\cdots\cdots(36)$$

この比は P/F_0 が小さい間は殆んど 1 に等しく $(E)_\varDelta\fallingdotseq E$ である。又 $|a_r|\gg|b_r|$ と考へてよければ，P/F_0 が大になつたとき，右邊の第 3 項の利きが大きくなるであらう。卽ち荷重の增加に伴つて見掛けのヤング率の値は，眞實らしき値に較べて次第に過大となるであらう。

同樣の考察をポアソン比について行ふ。式 (33) で x, z 軸方向の歪の微小量を取扱つた代りに，有限量の比を作る。l_{xx} は式 (30) によればよく，l_{zz} は式 (25) から $l_{zz}=\varDelta l/l_0$ であるから，見掛けのポアソン比 $(\sigma)_\varDelta$ は

$$(\sigma)_\varDelta=\frac{l_{xx}}{l_{zz}}$$

$$=\frac{P}{E_0F_0}\left[\sigma_0+\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\right]\cdot\frac{E_0F_0}{P}\left[1-(1+2\sigma_0)\frac{P}{2E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]$$

$$=\sigma_0+\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\sigma_0(1+2\sigma_0)\frac{P}{2E_0F_0}+\frac{\sigma_0}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{\sigma_0}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{E_0}\right)^{r+1}$$

$$-\frac{1+2\sigma_0}{2E_0}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\cdot\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\cdot\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\quad\cdots\cdots(37)$$

この式の右邊の第 3 項以下は $a_r<0$, $b_r>0$ のときすべて負である。而して孰れも分母に E_0 を有するから，第一近似としては，これらは初めの 2 項に較べて省略することができる。このときには式 (37) は次の簡單な式になる。

$$(\sigma)_A=\sigma_0+\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\quad\cdots\cdots(38)$$

これが見掛けのポアソン比であつて，實驗資料から得られる通常の計算値を與へるのは式 (38) であらう[4]。

これを眞實らしきポアソン比，式 (6) と比較すれば

$$\frac{(\sigma)_A}{\sigma}=\left[\sigma_0+\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\right]\cdot\frac{1}{\sigma_0}\left[1-\frac{1}{\sigma_0}\sum_1^t b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\right]$$

$$=1+\frac{1}{\sigma_0}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{1}{\sigma_0}\sum_1^t b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\cdot\sum_1^t b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r$$

$$=1-\frac{1}{\sigma_0}\sum_1^t\frac{r}{r+1}b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r-\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_1^t\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\cdot\sum_1^t b_r\left(\frac{P}{F_0}\right)^r\quad\cdots\cdots(39)$$

この式の値は P/F_0 が大となる程顯著に小となる。即ち見掛けのポアソン比は，眞實らしきポアソン比よりも次第に小となる。

以上の様子を圖について考へれば，圖-5, 6 の通りである。即ち圖-5 に於て眞實らしきヤング率 (E) は圖-5 の切線 PT の正切であり，見掛けのヤング率 $[(E)_A]$ は割線 OP の正切である。よつて夫々が水平軸 $(0, l_{zz})$ となす角を θ_1, θ_2 とすれば

圖-5.

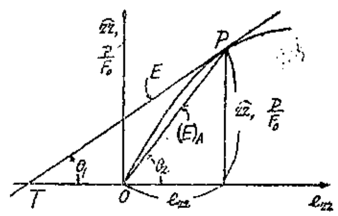
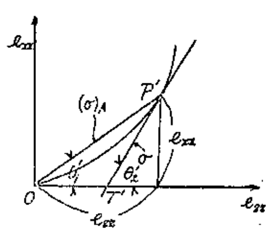


圖-6.



$$E=\tan\theta_1,\qquad (E)_A=\tan\theta_2$$

又ポアソン比に就ても全く同樣で，圖-6 に於て眞實らしきポアソン比 (σ) は切線 P′T′ の正切であり，見掛けのポアソン比 $((\sigma)_A)$ は割線 OP′ の正切である。即ち

$$\sigma=\tan\theta_1',\qquad (\sigma)_A=\tan\theta_2'$$

圖-5 に於て P 點が特に原點に在るときは，切線 PT の正切は E_0 で與へられるが，これは圖-1 と見較べれば

4) ポアソン比は然し通常間接測定から得られるから，ポアソン比の詳細な變化の考究には更に研究の餘地があると思はれる。

Bach-Schüle の接線係數 T と同じものである。即ち

$$E_0=T \qquad \text{[Bach-Schüle 式 (4) の接線係數]}$$

更にヤング率に就てはもう一つ別の意味のものを定義することができる。それは，見掛けのヤング率を式 (34) で定義した際の分子に P/F_0 の代りに眞實らしき應力，式 (19) の $\widehat{zz}$ を用ひたものである。これを"平均のヤング率"と呼ぶことゝし E_m で表はせば

$$\begin{aligned}E_m&=\frac{\widehat{zz}}{l_{zz}}=\frac{\widehat{zz}}{\Delta l/l_0}\\&=\frac{P}{F_0}\Big[1+\frac{\sigma_0P}{E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\cdot\frac{E_0F_0}{P}\Big[1-(1+2\sigma_0)\frac{P}{2E_0F_0}+\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r\\&\quad-\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]\\&=E_0+\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r-\frac{1}{2}\frac{P}{F_0}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(40)$$

これは，見掛けのヤング率 $(E)_\Delta$ [式 (35)] と較べるに，式 (35) に於て $\sigma_0=0$, $b_r=0$ とすれば式 (40) になる。即ち平均のヤング率 E_m は，見掛けのヤング率に於て正斷面積の變化を無視した場合の値に合致する。一般にポアソン比による影響が大きくない場合は，脆い材料に就て具現せられると考へられるが，この様な場合には

$$(E)_\Delta\fallingdotseq E_m \qquad (\sigma_0\fallingdotseq 0,\ b_r\fallingdotseq 0 \text{ のとき})$$

である。

ポアソン比の方では上の様な種類の量を考へ得ない。それは，ポアソン比の場合には分子，分母が共に測定値を基準にして定義する以外に途がないからであらう。ヤング率の方は，內部應力と外部荷重とが本質的に相違するものである爲，上の様に 2 種の量 $(E)_\Delta$, E_m が定義せられ得るのだと考へられる。**圖-5** に於ては記述の簡單の爲，便宜混用した。

7. Bach-Schüle 式に就て

Bach-Schüle 式 (4) に於ける伸び ε と應力 p との意味を，本文の記號で書けば

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0},\qquad p=\frac{P}{F_0}$$

である。この式の Δl に式 (25) の値を代入すれば，Bach-Schüle 式は次の様に書き直される。

$$\frac{P}{E_0F_0}\Big[1+\frac{1+2\sigma_0}{2E_0F_0}P-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}\Big]=\frac{1}{T}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^m$$

この式に於て $m=1+\theta$ とおき，$T=E_0$ とすれば

$$1+\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{P}{E_0F_0}-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^r+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^{r+1}=\Big(\frac{P}{F_0}\Big)^\theta \qquad (\theta>0)\cdots\cdots(41)$$

式 (41) の右邊は荷重 P に對して既知量となる。この既知の曲線に，必要の限度に於て，左邊の未知曲線を合致させることは可能である。

8. Gerstner の伸びの實驗式に就て

針金の伸びが過大に出ることに就ての Gerstner の實驗式 (1) を考へてみる。本文の記號を使へば式 (1) の p,

ε は前と同樣に

$$p=\frac{P}{F_0},\qquad \varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$$

である。よつて式 (25) を使つて式 (1) を書き直せば

$$\begin{aligned}1=&A\frac{1}{E_0}\left[1+\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{P}{E_0F_0}-\frac{1}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r+\frac{1}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]\\&+B\frac{P}{E_0^2F_0}\left[1+2\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{P}{E_0F_0}-\frac{2}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r+\frac{2}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]\\&+C\frac{P^2}{E_0^3F_0^2}\left[1+3\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{P}{E_0F_0}-\frac{3}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r+\frac{3}{E_0}\sum_1^t\frac{2q_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]\\&+D\frac{P^3}{E_0^4F_0^3}\left[1+4\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{P}{E_0F_0}-\frac{4}{E_0}\sum_1^s\frac{a_r}{r+1}\left(\frac{P}{F_0}\right)^r+\frac{4}{E_0}\sum_1^t\frac{2b_r}{(r+1)(r+2)}\left(\frac{P}{F_0}\right)^{r+1}\right]+\cdots\end{aligned}\quad\cdots\cdots(42)$$

この式は恒等式であるから，常數項，P/F_0, $(P/F_0)^2$, $(P/F_0)^3$, $\cdots\cdots$ の係數は孰れも夫々零でなければならぬ。

常數項に就ては　$1=A/E_0$

從つて　$A=E_0$

卽ち Gerstner 式の係數は，本文に於けるヤング率の初めの値 E_0 と同じである。從つて亦 Bach-Schüle 式の接線係數とも同じものである。

次に式 (42) から P/F_0 の項を拾ひ出せば

$$\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{1}{E_0}-\frac{1}{E_0}\frac{a_1}{2}+B\frac{1}{E_0^2}=0$$

從つて
$$B=-\frac{1}{2}E_0(1+2\sigma_0-a_1)\cdots\cdots(43)$$

$a_1<1$ とすれば式 (43) の右邊は負の量であつて，Gerstner が實驗の結果 B の負であることを指摘してゐるのに符合する。

式 (42) から $(P/F_0)^2$ の項を拾ひ出せば

$$\left(-\frac{1}{E_0}\frac{a_2}{3}+\frac{1}{E_0}\frac{b_1}{3}\right)+B\frac{1}{E_0^2}\left(2\frac{1+2\sigma_0}{2}\frac{1}{E_0}-\frac{2}{E_0}\frac{a_1}{2}\right)+C\frac{1}{E_0^3}=0$$

これに式 (43) の B の値を代入して C を求めれば

$$C=-\frac{1}{3}E_0^2(-a_2+b_1)+\frac{1}{2}E_0(1+2\sigma_0-a_1)^2\cdots\cdots(44)$$

同樣にして D を求めれば

$$D=-\frac{1}{12}E_0^3(-3a_3+2b_2)+\frac{5}{6}E_0^2(-a_2+b_1)(1+2\sigma_0-a_1)-\frac{3}{4}E_0(1+2\sigma_0-a_1)^3\cdots\cdots(45)$$

以上が Gerstner 式の係數 A, B, C, D を本文に於て定義した量で表はしたものである。ところで Gerstner は $C\fallingdotseq D\fallingdotseq 0$ であると述べてゐる[5]が，彼の行つた實驗の材料及び實驗の範圍ではさうであつたかも知れないとしても，一般には式 (44), (45) の樣にこれらは零とおいてよい程度の量であるとは速斷し難い樣に思はれる。

但し本來式 (1) に於て本來 ε は餘り大きくない量であるのが通常だから，式 (44), (45) の樣な適當な有限値

5) 前掲 Seth の論文中の記述による。

C, D に對して，$C\varepsilon^3$, $D\varepsilon^4$ が無視し得ないかも知れぬことは充分推察しうるところである。

この様な場合に式 (1) を逆に解いたところの式 (2) に就て考へるに，式 (25) を參照するならば，容易に次の關係が得られる。即ち

$$a=\frac{1}{E_0},\qquad b=\frac{1}{2E_0{}^2}(1+2\sigma_0-a_1),\qquad C=\frac{1}{3E_0{}^2}(-a_2+b_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

これらが式 (2) と本文で定義した量との關係であつて，式 (7) の假定によればこれらは孰れも正の量であることが見られる。

9. 結　　び

以上に彈性常數が荷重につれて刻々に變るとして棒の伸び（又は縮り）と應力とを求めた。

軸方向の直應力 [式 (19) の $\widehat{22}$] は荷重の增加につれて，ポアソン比の初期値及びその變化が利いて通例の算式よりも大となるが，その程度は荷重が大きくない範圍では餘り顯著でないと思はれる。而して本計算の樣に第一近似（$1/E_0$ についての）に關する限りでは，この直應力はヤング率の變化には無關係である。

伸び [式 (25) の Δl] はヤング率にもポアソン比にも關係してゐる。

式 (25) 及び式 (29) によれば，一つの引張試驗又は壓縮試驗で，ヤング率ポアソン比の兩方の値及びその變化を見出し得る可能性がある。

附記：本文を認めようとした動機は，東京帝大土木教室田中　豐先生の御示唆に基くものである。又中途で同最上武雄先生に大層御高庇を頂いた。兩先生に厚く御禮申上げる次第である。