

論 說 報 告

第 28 卷 第 11 號 昭和 17 年 11 月

拱橋に於ける軸線の一解法に就て

正會員 工學博士 田 中 豊*

内容梗概 本文は Fourier の級數に依る解法を應用して石工拱橋に於ける拱軸線の解法を試み、解法の擴充並に拱軸線の修正に資せんとするものである。石工拱橋の軸曲線として死荷重に對する抵抗曲線の一形式を採用せんとするときは、一般に變垂曲線が合理的なものと認められて居るが、死荷重の換算荷重層の上面が波形をなす如き場合には、此の種の曲線は修正せらるべきである。本解法は、かゝる場合に對しても理論的に適用し得べき一般性を有することを一つの特徴とする。

1. 緒 言

變垂曲線を拱軸線とする對稱拱の理論並に計算に就ては、既に Strassner¹⁾ の詳論がある。同氏の解説に依りても明らかなる如く、變垂曲線が理論的に死荷重に對する抵抗曲線なる爲めには、死荷重の換算荷重層の上面が圖-1 に示す直線 $A_1C_1B_1$ と一致することを必要條件とする。従つて、同圖に示す曲線線 $A_1C_1B_1$ を以て與へらるる如き場合には、變垂曲線は、其目的に對して不合理となる。

かゝる場合の對策としては、軸線の解法を別に求めるか、又は變垂曲線の修正をなすか、又其差異が實用上特に修正を必要とせざる場合のあるべきことなどが考へられるが、少くとも（起拱點に於ける換算荷重 AA_1 ）と（拱頂に於ける換算荷重 CC_1 ）との比 (m) の一定値に對しても、死荷重の分布状態に依つて合理的拱軸線は無數に存在すべきことを認識すべきである。然も後述の理由に依り此の問題は數學上の問題としては、換算圖圖-2 に於て O を原點としたる場合には

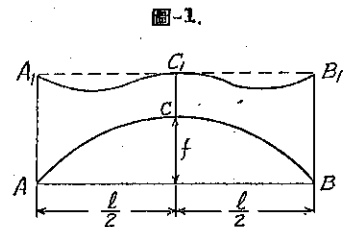


圖-1.

$$\frac{Hf}{(m-1)l^2g_s} \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta + 1 - f(\xi) \dots \dots \dots (1)$$

A を原點としたる場合には

$$\frac{Hf}{(m-1)l^2g_s} \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta - m + \phi(\xi) \dots \dots \dots (2)$$

なる微分方程式の解を求めることに歸着する。

上式に於て

- H : 死荷重水平反力, f : 拱矢
- l : 支間, g_s : 拱頂に於ける死荷重度
- $\bar{\eta}, \eta = \frac{1}{f} \times (\text{拱軸線縦距 } y)$
- $\bar{\xi}, \xi = \frac{1}{l} \times (\text{拱軸線横距 } x)$

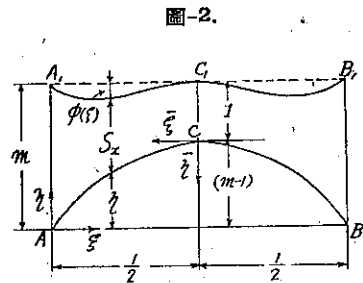


圖-2.

* 東京帝國大學教授

1) Strassner-Neuere Methoden, Bd. II 1927. Berlin 參照

$$m = \frac{\text{拱頂に於ける死荷重度 } (g_s)}{\text{起拱點に於ける死荷重度 } (g_k)}; \quad f(\xi) = (\text{原點 } C_1 \text{ による曲線 } C_1A_1 \text{ の縦距});$$

$$\phi(\xi) = (\text{原點 } A_1 \text{ に依る曲線 } A_1C_1 \text{ の縦距})$$

但し、拱は左右對稱たることを假定し、且つ (1) 式に於ける $f(\xi)$ の負號及 (2) 式に於ける $\phi(\xi)$ の正號は圖-2 に示す如く曲線 A_1C_1 が直線 A_1C_1 より下位にある場合に適應せしめたものである。

従つて (1) 式又は (2) 式の解法が問題の主體となるのであるが、拱の形狀が所謂アーチ形をなして居る一般性から考へても、此の場合 Fourier 級數に依る解法を適用し得べきことは之を想像するに難くない。前掲の函數 $f(\xi)$ 及び $\phi(\xi)$ が特殊な函數であれば Fourier 級數に依るのが却つて不利の場合もあり、又拱が非對稱の場合に就ても、更に考慮すべき問題があるが、此の場合には、上記の理由に依り、對稱拱に對する Fourier 級數を應用したる解法並に其の應用數値計算例を示さんとするものである。

2. 基礎方程式の誘導並に解法

前掲基礎方程式の解法を述ぶるに先き立ち、之が誘導並に問題の取扱に便する爲め圖-1 と其の換算圖圖-2 との關係に就て一言する。之が爲め、圖-3 及び圖-4 を畫き圖-2 と比較對照して見る。

圖-3.

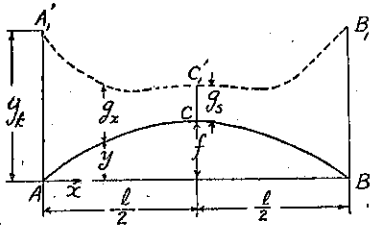
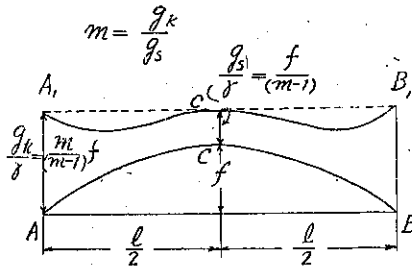


圖-4.



即ち圖によりて明なる如く、圖-4 は圖-3 の荷重度曲線の兩端 (A_1, C_1) を水平線上に在る如く換算して畫いたもの。之がための條件としては

$$\frac{g_k}{\gamma} = \frac{g_s}{\gamma} + f \quad \therefore \gamma = \frac{g_k - g_s}{f} = \frac{(m-1)g_s}{f}$$

故に圖-4 に示す如く g_k 及 g_s を γ にて除すればよい。

又圖-4 の横距を l にて除し、縦距を $\frac{f}{(m-1)}$ にて除すれば圖-2 が得られる。結局圖-2 は圖-3 の横距を $\frac{1}{l}$ 倍し、拱軸線の縦距を $\frac{(m-1)}{f}$ 倍し、死荷重線の縦距を g_s にて除したものである。

故に圖-3 に依る拱軸線を基本式

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -g_x \dots \dots \dots (3)^2$$

は圖-2 に對して

$$y = \frac{f}{(m-1)} \eta, \quad x = l\xi, \quad g_x = g_s \xi_x = g_s \{m - \eta - \phi(\xi)\} \dots \dots \dots (4)$$

たるべきであるから

2) 鉛直荷重のみによる拱の抵抗曲線は、荷重による曲げモーメント (M) が $\frac{d^2M}{dx^2} = -g_x$ であつて、 $M = Hy$ と置き得ることから、容易に本式の關係が理解せらるることゝは周知の如くである。

(4) を (3) 式に代入して

$$\frac{Hf}{(m-1)l^2g_s} \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta - m + \phi(\xi) \quad \dots\dots\dots (5)$$

本式は即ち前掲の (2) 式である。

次に座標原点を A より O に變位して、圖に示す如く $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ に依れば

$$\bar{\eta} = (m-1) - \eta, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{2} - \xi, \quad d\eta = d\bar{\eta}, \quad d\xi = -d\bar{\xi} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なるべきであるから (5) 式は

$$\frac{Hf}{(m-1)l^2g_s} \cdot \frac{d^2\bar{\eta}}{d\bar{\xi}^2} = \bar{\eta} + 1 - f(\bar{\xi}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり前掲 (1) 式が得られる。

(7) 式に於て $f(\bar{\xi}) = 0$ なるときは

$$\frac{Hf}{(m-1)l^2g_s} \cdot \frac{d^2\bar{\eta}}{d\bar{\xi}^2} = \bar{\eta} + 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を得べく此の場合に對する本式の解としては次式が得られる。

$$\eta = \cosh k\bar{\xi} - 1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

但し $k = \sqrt{\frac{(m-1)l^2g_s}{Hf}}$

而して、 $\bar{\xi} = \frac{1}{2}$ なるとき $\bar{\eta} = (m-1)$ なるべきに依り

$$k = 2 \operatorname{arc} \cosh m \quad \dots\dots\dots (10)$$

なる關係式の得られることも周知の如くである。

尙 A を座標原点とせる場合には $\bar{\eta} = (m-1) - \eta$, $\bar{\xi} = \frac{1}{2} - \xi$ なるべきに依り

$$\eta = m - \cosh k \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

然るに $\bar{\xi} = 0$ なるとき $\eta = 0$ なるべきに依り

$$k = 2 \operatorname{arc} \cosh m$$

なることは同前である。此の關係に依り (11) 式は次の如く書換へることも出来る。

$$\eta = m - m \cosh k\xi + \sqrt{m^2 - 1} \sinh k\xi \quad \dots\dots\dots (12)$$

今基礎方程式として (2) 即ち (5) 式を選び求むべき函數 η 及び試算上既知函數 $\phi(\xi)$ をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sum A_n \sin n\pi\xi \\ \phi(\xi) &= \sum C_n \sin n\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

但し $n = 1, 3, 5, \dots$

と置き更に

$$m = \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin n\pi\xi \quad \dots\dots\dots (14)$$

但し $n = 1, 3, 5, \dots$

として、これ等を (5) 式に代入すれば

$$-\frac{1}{k^2} \sum A_n (n\pi)^2 \sin n\pi\xi = \sum A_n \sin n\pi\xi - \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin n\pi\xi + \sum C_n \sin n\pi\xi \dots \dots \dots (15)$$

但し $\frac{1}{k} = \frac{Hf}{(m-1)l^2 g_s}$, $n=1, 3, 5, \dots$

故に $\sin n\pi\xi$ 項の係数を比較して

$$A_n = \frac{4m}{\pi n} \cdot \frac{1 - \frac{\pi n}{4m} C_n}{\left(\frac{n\pi}{k^2}\right)^2 + 1} \dots \dots \dots (16)$$

故に η は次の如く與へられる。

$$\eta = \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1 - \frac{\pi n}{4m} C_n}{n \left\{ \left(\frac{n\pi}{k^2}\right)^2 + 1 \right\}} \sin n\pi\xi \left| \dots \dots \dots (17) \right. \\ \left. n=1, 3, 5, \dots \dots \dots \right.$$

但し $\eta = \frac{m-1}{f} y$, $\xi = \frac{x}{l}$, $m = (\text{起拱點と拱頂に於ける死荷重量の比})$

(17) 式に於て $C_n=0$ 即ち $\phi(\xi)=0$ なるときは

$$\eta = \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1}{n \left\{ \frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1 \right\}} \sin n\pi\xi \left| \dots \dots \dots (18) \right. \\ \left. n=1, 3, 5, \dots \dots \dots \right.$$

となりて、本式は前掲 (11) 式

$$\eta = m - \cosh k \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \dots \dots \dots (19)$$

と一致すべきものである。然し前述の如く (19) 式即ち變垂曲線にありては

$$k^2 = (2 \operatorname{arc} \cosh m)^2 \dots \dots \dots (20)$$

と置くことが出来るから (18) 式は次の如く書き換へることも出来る。

$$\eta = \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1}{n \left\{ \frac{(n\pi)^2}{4(\operatorname{arc} \cosh m)^2} + 1 \right\}} \sin n\pi\xi \left| \dots \dots \dots (21) \right. \\ \left. n=1, 2, 3, \dots \dots \dots \right.$$

本式は (17) 式と比較する場合に便利である。

(17) 式は本問題の基本式の解であるが、其の右邊が k の函数となつて居るから k が與へられなければ η の計算が出来ない。之が爲め第一に考へられることは (17) 式は $\xi = \frac{1}{2}$ なるとき $\eta = (m-1)$ 、(圖-2 参照) なるべきであるから

$$(m-1) = \frac{4m}{\pi} \sum \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\pi n}{4m} C_n}{n \left\{ \frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1 \right\}} \left| \dots \dots \dots (22) \right. \\ \left. n=1, 3, 5, \dots \dots \dots \right.$$

なる條件式を満足する如き k を求むる必要がある。

然し此の試算計算は次の數値計算例に依つて示す如く比較的簡單に出来る。尙數値計算に便する爲め (17) 式の k を次の如く置くのが便利である。

拱の死荷重水平反力 H は一般に

$$H = \mu \frac{l^2}{f} g_s \quad \text{但し } \mu = \text{常數}$$

と示すことが出来る(但し此の場合抵抗曲線々拱に就て考へて居るのであるから、拱軸の壓縮に依る變化は考へない。即ち等分に死荷重を受くる、對稱拋物線拱にありては $\mu = \frac{1}{8}$ となすが如きは其の一例である)。

従つて
$$\mu = \frac{Hf}{l^2 g_s} \quad \text{と置けば}$$

$$k^2 = \frac{(m-1)l^2 g_s}{Hf} = \frac{(m-1)}{\mu} \dots\dots\dots (23)$$

となり、(20) 及 (21) 式は次の如く置くことが出来る。

$$\eta = \frac{4m}{\pi} \sum \frac{1 - \frac{\pi n C_n}{4m}}{n \left\{ \frac{\mu \pi^2}{(m-1)} n^2 + 1 \right\}} \sin n\pi\xi \quad \left| \dots\dots\dots (24) \right. \\ n=1, 3, 5 \dots$$

$$(m-1) = \frac{4m}{\pi} \sum \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1 - \frac{\pi n C_n}{4m}}{n \left\{ \frac{\mu \pi^2}{(m-1)} n^2 + 1 \right\}} \quad \left| \dots\dots\dots (25) \right. \\ n=1, 3, 5 \dots$$

但し
$$\mu = \frac{Hf}{l^2 g_s}$$

即ち上記 (17) 及 (22) 式又は (24) 式及 (25) 式に依りて、問題を解くことが出来るのであるが、更に次の如き解式を採用するが便利な場合もある。

前述の如く (17) 又は (24) 式に於て $C_n = 0$ なる場合には (19) 式の如く、 $\eta = m - \cosh k(1/2 - \xi)$ であるから $C_n \neq 0$ 、即ち $\phi(\xi) \neq 0$ なるときの (5) 式の一般解は容易に次の如く求められる。

$$\eta = m - A \cosh k(B - \xi) - \sum \frac{C_n}{\left(\frac{\mu \pi^2}{(m-1)} n^2 + 1 \right)} \sin n\pi\xi \quad \left| \dots\dots\dots (26) \right. \\ n=1, 3, 5 \dots$$

但し
$$k = \sqrt{\frac{(m-1)l^2 g_s}{Hf}}, \quad \mu = \frac{(m-1)}{k^2}, \quad \sum C_n \sin n\pi\xi = \phi(\xi)$$

$A, B =$ (境界條件に依りて定まるべき常數)

又は

$$\eta = m - A \cosh k(B - \xi) - \sum \frac{C_n}{\left(\frac{\pi}{k} \right)^2 n^2 + 1} \sin n\pi\xi \quad \left| \dots\dots\dots (27) \right. \\ n=1, 3, 5 \dots$$

この解の正しいことは、本式を (5) 式に代入して見れば明である。而して、 $\xi = 0$ なるとき $\eta = 0$ であり且つ η は $\xi = 1/2$ なる點に對して對稱であるべきであるから

$$B = \frac{1}{2}, \quad A = \frac{m}{\cosh \frac{k}{2}} \dots\dots\dots (28)$$

又 $\xi = 1/2$ なるとき $\eta = (m-1)$ なるべきに依り

$$A = 1 - \sum \sin \frac{n\pi}{2} \frac{C_n}{\left(\frac{\pi}{k} \right)^2 n^2 + 1} \quad \left| \dots\dots\dots (29) \right. \\ n=1, 3, 5 \dots$$

結局
$$\eta = m - A \cosh k \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \sum_{n=1,3,5 \dots} \frac{C_n}{\left(\frac{\pi}{k} \right)^2 n^2 + 1} \sin n\pi\xi \quad \dots\dots\dots(30)$$

但し k は次式を満足すべきことを条件とする。

$$\frac{m}{\cosh \frac{k}{2}} = 1 - \sum_{n=1,3,5 \dots} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{C_n}{\left(\frac{\pi}{k} \right)^2 n^2 + 1} \quad \dots\dots\dots(31)$$

此の解式は $\phi(\xi)$ が有限級数で與へられた場合に便利である。(31) 式を満足する k を求むるには計算又は圖解に依る挿圖法を適用することが出来る。又解法の性質上變垂曲線との相違も算式上比較的明瞭となる。前記の解法の適用を例示するため次節に二、三の數値計算例を示すことにする。

3. 數値計算例

例題 1. Fourier 級数で示した變垂曲線の精度を求めて見る。但し $m=3.5$ とす。

解 前掲 (18) 式に於て $m=3.5$, $\xi=1/2$ として拱の中心に於ける η を求むれば

$$\eta \Big|_{\xi=1/2} = \frac{4 \times 3.5}{\pi} \sum_{n=1,3,5 \dots} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \frac{1}{n \left\{ \frac{\mu\pi^2}{2.5} n^2 + 1 \right\}}$$

但し $\mu = \frac{Hf}{l^2 g_s}$ 又は (20) 式に依れば $\mu = \frac{(m-1)}{k^2} = \frac{(m-1)}{4(\text{arc cosh } m)^2}$ であり

$$\eta \Big|_{\xi=1/2} = (m-1) = 2.5$$

でなければならぬから、此の計算に依つて精度の一斑を知ることが出来る。

此の場合 $(m-1)=2.5$, $\text{arc cosh } m = \text{arc cosh } 3.5 = 1.9248$, $k = 2 \text{ arc cosh } 3.5 = 3.8496\%$

故に
$$\mu = \frac{2.5}{4 \times (1.9248)^2} = 0.1687 \quad \text{従つて} \quad \frac{\mu\pi^2}{(m-1)} = \frac{0.1687}{2.5} \pi^2 = 0.6660$$

之を上式に代入して

$$\eta \Big|_{\xi=1/2} = \frac{14}{\pi} \left\{ \frac{1}{0.6660+1} - \frac{1}{3(0.6660 \times 9+1)} + \frac{1}{5(0.6660 \times 25+1)} - \frac{1}{7(0.6660 \times 49+1)} + \frac{1}{9(0.6660 \times 81+1)} - \frac{1}{11(0.6660 \times 121+1)} + \dots\dots \right\}$$

$$= 4.457 \{ 0.6002 - 0.0477 + 0.0113 - 0.0042 + 0.0020 - 0.0011 + \dots\dots \}$$

上式の第 2 項乃至第 6 項迄採りたる場合の數値を求め 2.5 との差 Δ を求めて見ると表-1 の如くである。

表-1.

項 數	2	3	4	5	6
η	2.462	2.512	2.494	2.503	2.498
Δ	-0.038	+0.012	-0.006	+0.003	-0.002

これに依りて級數式に依る精度の一斑を知るに足るべく又級數式に依る漸近計算をなす場合の參考となるべきものである。

例題 2. 前節の解式に於て $\phi(\xi) = 0.2(\sin \pi \xi + \sin 3\pi \xi)$ なる場合の η を算定すべき A 及 k を求む。但し $m = 3.5$ とす。

解 (28) 式に於て $m = 3.5$, 及 $C_1 = C_3 = 0.2$ と置き (29), (28) 式を満足する如き k を求むればよい。試算として $(\pi/k)^2 = 0.600$ と置き (29) 式に依りて A を求むれば

$$A = 1 - 0.20 \left\{ \frac{1}{1.6} - \frac{1}{5.4+1} \right\} = 0.906$$

又 $(\pi/k)^2 = 0.600$ より $k/2 = 2.028$ を得。故に (28) 式に依り

$$A = \frac{3.5}{\cosh 2.028} = \frac{3.5}{3.865} = 0.906$$

即ち $(\pi/k)^2 = 0.600$ は偶然所要条件を満足して居る。故に $k = 4.056$ が得られる。又 (28) 式に依り

$$\mu = \frac{(m-1)}{k^2} = \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cdot \frac{(m-1)}{\pi^2} = \frac{0.600}{\pi^2} \times 2.5 = 0.153$$

なるを知る。これによりて A 及 k が求められたから (30) 式によりて η を計算することが出来る。

例題 3. 例題 2 に於て $\phi(\xi) = -0.2(\sin \pi \xi + \sin 3\pi \xi)$ なる場合の η を算定すべき A 及 k を求む。但し $m = 3.5$ とす。

解 試算として $(\pi/k)^2 = 0.700$ 及 $(\pi/k)^2 = 0.750$ の場合を計算して見る。

$(\pi/k)^2 = 0.750$ の場合 ($k = 3.627$ の場合)

$$(29) \text{ 式に依り } A = 1 + 0.20 \left\{ \frac{1}{1.75} - \frac{1}{7.75+1} \right\} = 1.0885$$

$$(28) \text{ 式に依り } A = \frac{3.5}{\cosh 1.814} = \frac{3.5}{3.149} = 1.112$$

$(\pi/k)^2 = 0.700$ の場合 ($k = 3.754$ の場合)

$$(29) \text{ 式に依り } A = 1 + 0.20 \left\{ \frac{1}{1.7} - \frac{1}{6.3+1} \right\} = 1.0902$$

$$(28) \text{ 式に依り } A = \frac{3.5}{\cosh 1.877} = \frac{3.5}{3.343} = 1.047$$

故に圖式挿入法によりて $(\pi/k)^2 = 0.732$ 即ち $k = 3.671$ とすれば (29), (28) 兩式に依る A の値が一致することを
知る。

即ち $\frac{k}{2} = 1.8355$ にして (28) 式より

$$A = \frac{3.5}{\cosh 1.8355} = 1.089$$

又 $\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 = \frac{\pi^2}{(3.671)^2} = 0.732$ により (29) 式より

$$A = 1 + 0.20 \left\{ \frac{1}{1.732} - \frac{1}{0.732 \times 9 + 1} \right\} = 1.0891$$

即ち $(\pi/k)^2 = 0.732$, $k = 3.671$ 及 $A = 1.089$ は所要の常數である。

従つて $\mu = \frac{0.732}{\pi^2} \times 2.5 = 0.185$ なるを知る。

以上例示した 3 種の場合を比較して見ると假定の如く $m = 3.5$ の一定値に對して, A, k 及 μ は表-2 の如く

變化して居る。

表-2.

	A	ΔA	k	Δk	μ	$\Delta \mu$
(1) の場合 ($\phi(\xi)=0$ 即ち變垂曲線の場合)	1	—	3.850	—	0.169	—
(2) の場合 ($\phi(\xi)=-0.2(\sin \pi \xi+\sin \eta \pi \xi)$ の場合)	0.906	-0.094	4.056	+0.206	0.152	-0.017
(3) の場合 ($\phi(\xi)=+0.2(\sin \pi \xi+\sin \eta \pi \xi)$ の場合)	1.089	+0.089	3.627	-0.223	0.185	+0.016

又 $\xi=1/4$ 即ち端より支間の $1/4$ 點の η を求めれば次の如くである。

$$(1) \text{ の場合 } \eta = m - \cosh \frac{k}{4} = 3.5 - \cosh 0.962 = 2.00$$

$$(2) \text{ の場合 } \eta = m - 0.906 \cosh \frac{k}{4} - \frac{0.20}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{0.6+1} + \frac{1}{5.4+1} \right\} = 3.5 - 0.906 \times \cosh 1.014 - 0.110 = 1.977$$

$$(3) \text{ の場合 } \eta = m - 1.089 \cosh \frac{k}{4} + \frac{0.20}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{0.732+1} + \frac{1}{6.588+1} \right\} = 3.5 - 1.089 \times \cosh 0.904 + 0.100 = 2.032$$

即ち (2) の場合は約 -1.1% , (3) の場合は約 $+1.6\%$ の差異を生ず。これによりて拱軸の修正値は比較的小であるが、死荷重に依る水平反力は此の場合 μ に比例するものと考えべきであるから約 $\mp 10\%$ の差異を生ずること、及びこれに依つて拱頂に於ける軸線の曲率半徑も約 $\mp 10\%$ の差異あることを知る。

尙筆者の試算の結果によれば Fourier の無限級數解式に依るものに比して、前例の如く (29) 及 (30) 式の如き解式に依る方が精度を高めることが容易であるから、なるべく此の方法に依ることを推奨したい。

例題 4. $\phi(\xi)=1.0(\sin \pi \xi+\sin 3\pi \xi)$, $m=6.536$ なる場合の A 及 k を求め支間の $1/4$ 點の η を算出し變垂曲線の場合の η と比較せよ。

解 試算として $k=6.480$ と置けば (28) 式に依りて

$$A_1 = \frac{m}{\cosh \frac{k}{2}} = \frac{6.536}{12.89} = 0.5110$$

又 $\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 = 0.2356$ なるを以て (29) 式に依り

$$A = 1 - \left(\frac{1}{0.236+1} - \frac{1}{0.2356 \times 9+1} \right) = 1 - (0.8091 - 0.3205) = 0.5114$$

故に $A=0.5112$ 及 $k=6.480$ として大過なかるべきを知る。故に之を (30) 式に代入して $\xi=1/4$ と置けば

$$\eta \Big|_{\xi=1/4} = 6.356 - 0.5112 \cosh \left(\frac{6.480}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (0.809 + 0.3205) = 6.356 - 1.340 - 0.799 = 4.397$$

然るに $\eta|_{\xi=1/4} = (m-1) = 5.536$ 故に $\xi=1/4$ 點の η は $\xi=1/2$ 點の η の約 79.5% である。然るに變垂曲線に在りては $m=6.536$ の場合 83% である (Strassner 出掲著書 p. 102 参照), 故に約 4% の減少を見る。尙 $\mu = \frac{(m-1)}{k^2} = \frac{5.536}{(6.480)^2} = 0.1318$ なるに對して垂直曲線に在りては $\mu=0.2104$ (同上参照) であるから、拱頂に於ける軸線の曲率半徑は變垂曲線の約 63% であることを知る。

3. 結 語

本文は石工拱橋に於ける換算死荷重層の上面が水平ならざる場合の死荷重に對する抵抗曲線の解法を求め、拱軸線の一解法を示した。これによつて、拱頂に於ける死荷重度と起拱點に於ける死荷重度との比 (m) が一定なる場合に在りても、荷重の分布状態に適應せる拱軸線を理論的に求むることが出来るし、又これに適應すべく變垂曲線を修正することも出来る。

例題に示した數値計算の結果に依り相當顯著な分布荷重の變化に對し、拱軸線の縦距の變化は比較的僅少であるが、拱頂に於ける拱軸線の曲率半徑の變化は相當に大であることを知ることが出来る。

尙本解法を應用して、換算死荷重層が支間の全長に互つて傾斜して居る場合、即ち勾配路線に架する如き拱橋に對し非對稱拱軸線の解を求めることも可能であると考へる。