

論 說 報 告

第 28 卷 第 11 號 昭和 17 年 11 月

砂 地 盤 の 支 持 力 に 就 て

正 會 員 水 野 高 明*

要 旨 本文は凝聚力なき砂地盤の表面に載荷する場合の支持力と滑り面の近似的形状とを、理論的に極座標に於ける應力函数を用ゐて求めたものである。

1. 従來の理論

砂地盤の支持力に關しては、古來多數の理論式が提唱されて居る。先づその主なるものを列擧する。

1. Rankine の理論⁽¹⁾

之は簡單なる爲に從來廣く用ゐられて居る方法である。

圖-1 に於て重量 P なる構造物の根入を h 、土砂の單位重量を γ 、その内部摩擦角を ρ とする。今構造物底面 AB 直下の微小部分に働く鉛直壓力を p 、水平壓力を q とすれば、Rankine の主動土壓理論により、

$$q = p \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \quad \text{となる。}$$

次に底面 AB 外に於て同じ高さの微小部分を考へ、之に働く水平壓力を q' とすれば、之に抵抗し得る鉛直土壓力 γh との關係は、Rankine の受働土壓理論により、

$$q' = \gamma h \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \quad \text{となる。}$$

依つて $q' = q$ と置く事によつて、最大支持力は

$$p = \gamma h \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2$$

なる式にて表はされる。

此理論は A 又は B なる點に於てのみ應力の接續を與へたものであつて、若し根入 h が零の場合には支持力は零となつて事實と一致しない。

2. Krey の理論⁽²⁾

Krey は實驗によれば、 P なる構造物が沈下する場合には、圖-2 (a) の如く片側又兩側へ、ある曲線滑り面を生じて、 EN 又は E_1N_1 の部分が上方へ押出される事實より、此滑り面の曲線部分を圓と假定して圖式的に支持力を求める方法を提案した。

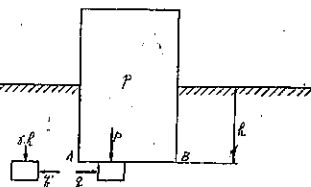
即ち AJL なる滑り面は底面 AB の延長上の或る點 C を中心とし、 AC を半径とする圓とし、 LN 部分は Rankine の受働土壓滑り面、即ち水平と $\pi/4 - \rho/2$ なる角を爲す直線とし、 L に於て兩滑り面は相切するものとして、一つの滑り面 $AJLN$ を畫く。土塊 $ABEFLJA$ に働く力は、構造物よりの荷重 P 、此土塊の自重 G, FL

* 九州帝國大學助教授

(1) Rankine: Civil Engineering.

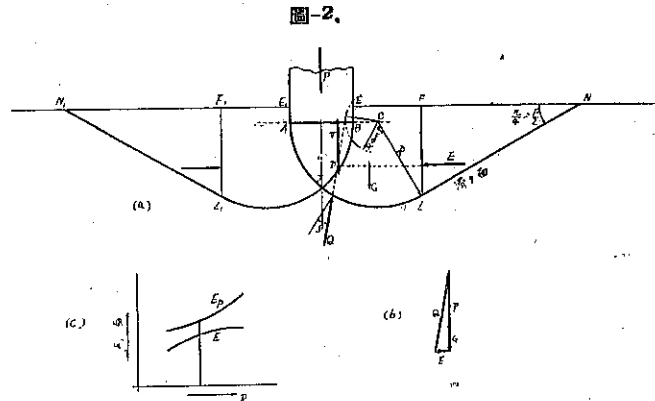
(2) Krey: Erddruck, Frd.widerstand.

圖-1.



面に働く水平土壓力 E 及び滑り面 AJL に働く反力 Q である。滑りが正に起らんとする所謂限界釣合の状態では滑り面の各點に於ける反力は滑り面の法線と内部摩擦角 ρ なる角を爲すべきで、

従つて各點の反力は O を中心とせる $R \sin \rho$ なる圓に切すべきである。反力の合力 Q は必ずしも此圓に切しないが近似的に Q も此圓に切するものと假定する。 E は FL の 2/3 の深さに働くものとし、 P 及び G の合力 V と E との交點を D とする。 D を通り $R \sin \rho$ なる圓への切線を引けば Q の位置方向が求まり、圖-2 (b) の力の三角形より Q



及び E の大きさを求める事が出来る。FL に於ける土砂の最大抵抗力は Rankine の受働土壓力 E_p であるから、圖-2 (c) の如く種々の R に対する E 及び E_p を示す曲線を求め、常に E が E_p よりも小なれば安全となす。兩側へ滑り出す場合も同様の方法を用ゐて居る。

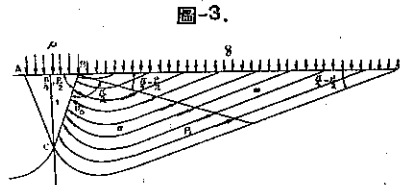
以上の Krey の方法に於て滑り面を圓となすは、全く任意的の假定に過ぎないのである。然も合力のみについて釣合を論じ、各點の應力については言及して居ないから合理的の理論とは云へない。

尙此外 Krey の方法に類似した圓形滑り面による圖式的略算法が色々使用されて居る⁽³⁾。

3. Reissner の理論⁽⁴⁾

Reissner は滑り面の一般式を理論的に求め、その應用として、土砂の重量即ち體力を無視せる場合について、本問題に於ける滑り面及び支持力を見出す事に成功した。

彼は圖-3 の如く荷重の直下 I の區域には楔形の Rankine 主動土壓滑り面、III の區域には同じく受働土壓滑り面を生ずるものとし、此の中間の II の區域に生ずる曲線滑り面を求めた。此の場合の應力の關係並びに支持力は次の如くなる。



$$q = p_1 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right), \quad p_1 = ce^{2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)\tan\rho}$$

$$p_0 = ce^{2\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2}\right)\tan\rho}, \quad p = p_0 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$\therefore p = q \frac{1 + \sin\rho}{1 - \sin\rho} e^{\pi \tan\rho}$$

但し c : 自然對數の底

例へば $\rho = 30^\circ$ の場合には $p = 18.4q$ である。

Reissner の曲線滑り面は各點に於て、 B を通る放射線と $\frac{\pi}{2} - \rho$ なる角をなす對數螺旋曲線となる。此滑り面

(3) 例へば、山口 昇：土質力學 (岩波全書)

(4) Reissner: Zum Erddruckproblem. Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics.

は Kurdjumoff の實驗結果とよく一致すると云つて居る。

併し、此理論は體力を無視して居るから、 $q=0$ の時は $p=0$ となり、地表面の支持力は零と云ふ事になる。故に此理論の適用範圍は、Reissner 自身も云つて居る如く、構造物基礎面の幅が基礎の根入に比して非常に小さい場合、即ち滑り面内部の土砂の重量が無視し得られる場合にのみ制限されるのである。

4. 地盤内部の壓力分布に関する理論

土砂の質量に働く重力即ち體力を無視せる場合に於ける地盤内部の壓力分布に關しては、有名なる Boussinesq の理論及び其の應用があり、又 Ohde⁽⁵⁾ は土砂の Verdichtungsahl は一定ではなく、深さに依つて變化するものとして Boussinesq の理論を擴張した。

5. 總括

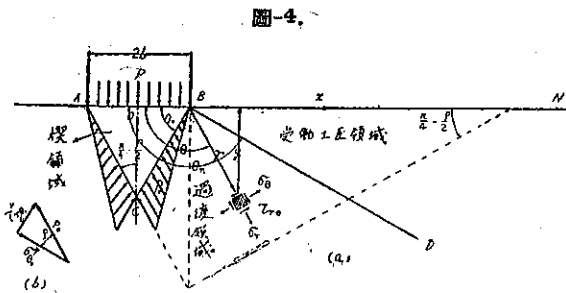
以上の如く、本問題に關する従來の理論は、1, 2 の如き略算法か、又は 3, 4 の如く體力を無視せる理論で自らその適用範圍も制限される。事實地盤は表面に於ても相當の支持力を有する。此場合荷重の押出しに抵抗するのは土砂の重量以外の何物でもない。依つて土砂の體力を無視する事は妥當でない。根入深き場合にも體力が可成りの影響を與へる事は當然である。

以下、凝聚力無き砂地盤の表面に荷重が働く場合の支持力並びに滑り面を求める著者の方法を述べる。

2. 一般假定

構造物の奥行は大なるものとし、平面變形の場合として取扱ふ。

圖-4 の如く荷重直下の ABC なる楔形部分は、滑り出しの瞬間には、AC, BC なる線に沿ひて切断されて荷重と共に押込まれるものとする。又此瞬間には、楔 ABC 内部の砂の體力に依る應力は Rankine の主働土壓力に達するものと假定する。



今 $\frac{1-\sin \rho}{1+\sin \rho} \equiv k$ と置けば、主働土壓應力は次の如く表はされる。

$$\sigma_y^a = -\gamma \cdot y, \quad \sigma_x^a = -\frac{1-\sin \rho}{1+\sin \rho} \gamma \cdot y = -k \cdot \gamma \cdot y, \quad \tau_{xy}^a = 0 \dots \dots \dots (1)$$

但し、 σ_y, σ_x は夫々 y, x 方向の直應力、 τ_{xy} は y, x 方向の剪斷應力とする。 σ_y, σ_x の負號は壓縮應力なるを示す。

然る時は滑り面 AC, BC は主働土壓力滑り面となり、Reissner の理論に於けると同様に、

$$\angle ACO = \angle BCO = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \angle ABC = \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \dots \dots \dots (2)$$

となる。

$\theta = \theta_0$ 、即ち BD 線より地表 BN までの間の應力は、滑り出しの瞬間には Rankine の受働土壓應力に達するものとする。此應力は次の如き値となる。

$$\sigma_y^b = -\gamma \cdot y, \quad \sigma_x^b = -\frac{1+\sin \rho}{1-\sin \rho} \gamma \cdot y = -\frac{1}{k} \gamma \cdot y, \quad \tau_{xy}^b = 0 \dots \dots \dots (3)$$

(5) Ohde: Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund. Der Bauingenieur 1939.

此部分の滑り面は水平線と $\pi/4 - \rho/2$ なる角をなす。

次に荷重 p による AC, BC 線の反力を次の如く假定する。滑り出しの場合、荷重の押し出しに抵抗するものは砂の重量である。砂の重量は深さに比例する。従つて抵抗力は深さに比例する事となる。依つて限界釣合の状態に於ける BC 線の反力も深さ、或ひは B よりの距離 r に比例して増大するものと考えられる。此反力の或點に於ける強度を、 p_0 を以て表はせば、滑りの瞬間には p_0 は滑り面 BC への法線と ρ なる角をなさねばならない。

以上の假定に基き p による BC 線の應力を出せば (1) 式と同様にして次の如くなる。

$$\sigma_y^p = -a, p, y, \quad \sigma_x^p = -a, k, p, y, \quad \tau_{xy}^p = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

此應力を B を原點とする極座標にて表はせば次の如きものを得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta_0}^p &= ap(1-k)r \sin^2 \theta_0 - apr \sin \theta_0 \\ \tau_{r\theta_0}^p &= -ap(1-k)r \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\ \sigma_{r\theta_0}^p &= ap(1-k)r \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 - apr \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

此處に a は常數であり、 $\sigma_{\theta_0}^p, \tau_{r\theta_0}^p$ は圖-4 (b) に示す如く、 p_0 の法線分力及び切線分力、 $\sigma_{r\theta_0}^p$ は BC 線方向の直應力を表はすものとする。

楔 ABC の釣合条件より次の如く a を求める事が出来る。

$$\begin{aligned} -bp &= \int_0^{BC} (\sigma_{\theta_0}^p \cos \theta_0 + \tau_{r\theta_0}^p \sin \theta_0) dr \\ &= ap(1-k) \frac{BC^2}{2} [\sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0] - ap \frac{BC^2}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= -ap \frac{b^2}{2 \cos^2 \theta_0} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = -\frac{ab^2 p \sin \theta_0}{2 \cos \theta_0} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{2}{b} \cot \theta_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

3. 極座標に於ける主働土壓力及び受働土壓力

一般に Airy の應力函數 χ 並びに體力のポテンシャル Ω を用ふれば、直交座標に於ける應力 $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ は次の如く表はされる。

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \Omega, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \Omega, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (7)$$

x, y 方向の體力を夫々 X, Y とすれば Ω は次の如きものである。

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (8)$$

今の場合、

$$X=0, \quad Y=\gamma \quad \dots\dots\dots (9)$$

であるから、

$$\Omega = -\gamma \cdot y = -\gamma \cdot r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。

(1) 式より主働土壓の應力函數を求めれば次の如くなる。

$$\chi^a = \gamma(1-k) \frac{y^3}{6} = \gamma(1-k) \frac{r^3 \sin^3 \theta}{6} \quad \dots\dots\dots (11)$$

同様にして、(3) 式より受働土壓の應力函数は、次式にて表はされる。

$$\chi^b = \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{y^3}{6} = \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{r^3 \sin^3 \theta}{6} \dots\dots\dots(12)$$

次に極座標に於ける應力 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ は、一般に次式によつて求められる。

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + Q, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + Q \dots\dots\dots(13)$$

依つて主働土壓應力及び受働土壓應力を、極座標にて表はせば夫々次の如くなる。

主働土壓應力

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta^a} &= \gamma (1-k) r \sin^2 \theta + Q, & \tau_{r\theta^a} &= -\gamma (1-k) r \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \sigma_{r^a} &= \gamma (1-k) r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

受働土壓應力

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta^b} &= \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin^3 \theta + Q, & \tau_{r\theta^b} &= -\gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin^2 \theta \cos \theta \\ \sigma_{r^b} &= \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

4. 過渡領域に於ける應力

今ポアソン比の逆数を μ とすれば、應力函数 χ の充すべき變形の條件は、次の式で與へられる。

$$D^4 \chi = -\frac{\mu-2}{\mu-1} D^2 Q \dots\dots\dots(16)$$

但し

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \dots\dots\dots(17)$$

今の場合、

$$D^2 Q = 0$$

であるから、(16) 式は、

$$D^4 \chi = 0 \dots\dots\dots(18)$$

となる。

(18) 式は極座標では次の如く表はされる。

$$D^4 \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \chi = 0 \dots\dots\dots(19)$$

應力が r の一次の項のみより成る如き (19) 式の一般解を χ' とすれば、

$$\chi' = E r^3 \cos 3\theta + F r^3 \cos \theta + G r^3 \sin 3\theta + H r^3 \sin \theta \dots\dots\dots(20)$$

が得られる。但し、 E, F, G, H は境界條件により定まる常數である。

今過渡領域 (圖-4 の $\angle CBD$ の内部) の應力函数として、計算の便宜上、次の如きものを選ぶ。

$$\chi = \chi' + \chi^a \dots\dots\dots(21)$$

然る時は此領域の應力は次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\theta &= 6Er \cos 3\theta + 6Fr \cos \theta + 6Gr \sin 3\theta + 6Hr \sin \theta + \gamma(1-k)r \sin^2 \theta + Q \\
 \tau_{r\theta} &= 6Er \sin 3\theta + 2Fr \sin \theta - 6Gr \cos 3\theta - 2Hr \cos \theta - \gamma(1-k)r \sin^2 \theta \cos \theta \\
 \sigma_r &= -6Er \cos 3\theta + 2Fr \cos \theta - 6Gr \sin 3\theta + 2Hr \sin \theta \\
 &\quad + \gamma(1-k)r \sin \theta \cos^2 \theta + Q
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

境界条件として次の如きものが存在する。

θ_0 に於て, [(22) 式の應力] は [主働土壓應力 + p_0 に依る應力] に等しく;

θ_n に於て, [(22) 式の應力] は [受働土壓應力] に等しくなければならぬ。

依つて (5), (14), (15) 及び (22) 式に依り,

$\theta = \theta_0$

$$\left. \begin{aligned}
 6E \cos 3\theta_0 + 6F \cos \theta_0 + 6G \sin 3\theta_0 + 6H \sin \theta_0 &= ap(1-k) \sin^2 \theta_0 - ap \sin \theta_0 \\
 6E \sin 3\theta_0 + 2F \sin \theta_0 - 6G \cos 3\theta_0 - 2H \cos \theta_0 &= -ap(1-k) \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\
 -6E \cos 3\theta_0 + 2F \cos \theta_0 - 6G \sin 3\theta_0 + 2H \sin \theta_0 \\
 &= ap(1-k) \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 - ap \sin \theta_0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$\theta = \theta_n$

$$\left. \begin{aligned}
 6E \cos 3\theta_n + 6F \cos \theta_n + 6G \sin 3\theta_n + 6H \sin \theta_n &= \gamma \left(k - \frac{1}{k} \right) \sin^2 \theta_n \\
 6E \sin 3\theta_n + 2F \sin \theta_n - 6G \cos 3\theta_n - 2H \cos \theta_n \\
 &= -\gamma \left(k - \frac{1}{k} \right) \sin^2 \theta_n \cos \theta_n \\
 -6E \cos 3\theta_n + 2F \cos \theta_n - 6G \sin 3\theta_n + 2H \sin \theta_n \\
 &= \gamma \left(k - \frac{1}{k} \right) \sin \theta_n \cos^2 \theta_n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

を得る。

尚滑りが起る場合には, 滑り面の各點に於ける應力は, 次の限界釣合の條件⁽⁶⁾を充さねばならぬ。

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \sin^2 \rho (\sigma_\theta + \sigma_r)^2 \dots\dots\dots(25)$$

然るに (22) 式の應力は全て r の一次の項のみよりなるから, 之を (25) 式に入れると, r は消える事となる。故に今の場合, 連続せる滑り面を生ずる爲には, r に無關係に, 換言すれば過渡領域内の各點に於て, 應力は滑りの限界に達する事を要する事となる。即ち此区域内の全ての點の應力が (25) 式の關係を満足すべき事となる。

(22) 式より,

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\theta - \sigma_r &= 12Er \cos 3\theta + 4Fr \cos \theta + 12Gr \sin 3\theta + 4Hr \sin \theta - \gamma(1-k)r \sin \theta \cos 2\theta \\
 2\tau_{r\theta} &= 12Er \sin 3\theta + 4Fr \sin \theta - 12Gr \cos 3\theta - 4Hr \cos \theta - \gamma(1-k)r \sin \theta \sin 2\theta \\
 \sigma_\theta + \sigma_r &= 8Fr \cos \theta + 8Hr \sin \theta - \gamma(1+k)r \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

を得る。よつて,

$$\begin{aligned}
 & [(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2] / r^2 \\
 &= 144E^2 + 16F^2 + 144G^2 + 16H^2 + \gamma^2(1-k)^2 \sin^2 \theta + 96EF \cos 2\theta + 96GH \cos 2\theta \\
 &\quad - 96EH \sin 2\theta + 96FG \sin 2\theta - 24E\gamma(1-k) \sin \theta \cos \theta - 8F\gamma(1-k) \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

(6) 例へば. 拙著: 砂の鉛直壓力に關する一考察, 九州帝國大學工學彙報, 第 17 卷第 1 號

$$\begin{aligned}
 & -24G\gamma(1-k)\sin^2\theta + 8H\gamma(1-k)\sin^2\theta \\
 & = 144E^2 + 16F^2 + 144G^2 + 16H^2 + \gamma^2(1-k)^2\sin^2\theta + 96(EF+GH)\cos 2\theta \\
 & \quad - 96(EH-FG)\sin 2\theta - \gamma(1-k)(12E+4F)\sin 2\theta + \gamma(1-k)(12G-4H)\cos 2\theta \\
 & \quad - \gamma(1-k)(12G-4H)\dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_\theta + \sigma_r)^2/r^2 \\
 & = 64F^2\cos^2\theta + 64H^2\sin^2\theta + 128FH\sin\theta\cos\theta + \gamma^2(1+k)^2\sin^2\theta \\
 & \quad - 16F\gamma(1+k)\sin\theta\cos\theta - 16H\gamma(1+k)\sin^2\theta \\
 & = 32F^2\cos 2\theta + 32F^2 + 32H^2 - 32H^2\cos 2\theta + 64FH\sin 2\theta + \gamma^2(1+k)^2\sin^2\theta \\
 & \quad - 8F\gamma(1+k)\sin 2\theta - 8H\gamma(1+k) + 8H\gamma(1+k)\cos 2\theta\dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

が得られる。(27),(28) 式を (25) 式に入れれば滑りの条件が與へられる。然るに

$$(1-k)^2 = \sin^2\rho(1+k)^2$$

が成立つから、 γ^2 の項は消失する。

又各點で滑る爲には、 θ にも無關係に (25) 式が成立つべきであるから、常數項、 $\cos 2\theta$ の係數及び $\sin 2\theta$ の係數は何れも零とならねばならない。故に次の 3 式が成立すべきである。

$$\left. \begin{aligned}
 & 36(E^2+G^2)+4(F^2+H^2)(1-2\sin^2\rho)-\gamma(1-k)(3G-H)+2\gamma H(1+k)\sin^2\rho=0 \\
 & 24(EF+GH)-8(F^2-H^2)\sin^2\rho+\gamma(1-k)(3G-H)-2\gamma H(1+k)\sin^2\rho=0 \\
 & -24(EH-FG)-16FH\sin^2\rho-\gamma(1-k)(3E+F)+2\gamma F(1+k)\sin^2\rho=0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

先づ θ_n, θ_n を未知數とすれば、 E, F, G, H 及び $\alpha\rho$ を合せて未知數の數は 7 個である。 θ_n, θ_n なる境界に於て、應力が接續する爲には、少く共 $\sigma_{\theta_n}, \tau_{r\theta_n}$ 及び $\sigma_{\theta_n}, \tau_{r\theta_n}$ は接續すべきで、即ち (23) 式の第 1, 第 2 式並びに (24) 式の第 1, 第 2 式は成立たねばならない。此 4 つに (29) 式の 3 つの式を合せて、7 個の條件式が存在する事となる。依つて理論上、境界條件を満足し、全ての點に於て滑りの限界に達する如き應力は定め得る事となる。

今 (29) 式の第 1, 第 2 兩式を相加すれば、

$$3E(3E+2F)+3G(3G+2H)+F^2(1-4\sin^2\rho)+H^2=0 \dots\dots\dots(30)$$

が得られる。

又 θ_n に於て滑りの條件を満足する爲には、(24) 式の第 3 式も當然成立すべきであるから、(29) 式の内 2 つの式の代りに (30) 及び (24) 式の第 3 式を以て、代用しても同じ事となる筈である。

今 (24) 式の 3 式を解けば、次の如く E, G, H を F にて表はし得る。

$$\left. \begin{aligned}
 E &= -\frac{F}{3} \frac{\sin 3\theta_n}{\sin \theta_n} \\
 G &= -\frac{\gamma}{24} \left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{F \cos 3\theta_n}{3 \sin \theta_n} \\
 H &= \frac{\gamma}{8} \left(k - \frac{1}{k}\right) - F \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

之を (30) 式に入れれば、

$$-F^2 \frac{\sin 3\theta_n}{\sin^2 \theta_n} (2 \sin \theta_n - \sin 3\theta_n) + F^2 \frac{\cos 3\theta_n}{\sin^2 \theta_n} (\cos 3\theta_n - 2 \cos \theta_n) + F^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\sin^2 \theta_n} + F^2 (1 - 4 \sin^2 \rho) = 0$$

或は、 $F^2 [\sin^2 \theta_n (1 - 4 \sin^2 \rho) + 1 - 2 \cos 2\theta_n + \cos^2 \theta_n] = 0$

$$\therefore F^2 \sin^2 \theta_n (1 - \sin^2 \rho) = 0$$

が得られる。

$\sin \theta_n = 0$ とすれば (31) 式が成立たないから、結局 $F=0$ となる。然る時は (31) 式より、

$$E = F = 0, \quad G = -\frac{\gamma}{24} \left(k - \frac{1}{k}\right), \quad H = \frac{\gamma}{8} \left(k - \frac{1}{k}\right) \dots \dots \dots (32)$$

を得る。(32) 式の係数を (22) 式に入れて應力を求めれば、

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\gamma}{8} \left(k - \frac{1}{k}\right) r [-2 \sin 3\theta + 3 \sin \theta] + \gamma(1-k)r \sin^2 \theta + Q \\ &= \gamma \left(k - \frac{1}{k}\right) r \sin^2 \theta + \gamma(1-k)r \sin^2 \theta + Q = \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin^2 \theta + Q \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\gamma}{4} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \cos 3\theta - \frac{\gamma}{4} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \cos \theta - \gamma(1-k)r \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= -\frac{\gamma}{2} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \sin 2\theta \sin \theta - \gamma(1-k)r \sin^2 \theta \cos \theta = -\gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin^2 \theta \cos \theta \\ \sigma_r &= \frac{\gamma}{4} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \sin 3\theta + \frac{\gamma}{4} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \sin \theta + \gamma(1-k)r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \\ &= \frac{\gamma}{2} \left(k - \frac{1}{k}\right) r \sin 2\theta \cos \theta + \gamma(1-k)r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \\ &= \gamma \left(1 - \frac{1}{k}\right) r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \end{aligned}$$

となり、之は受働土壓應力を示す。

依つて此の場合、全ての點に於て滑りの限界に達する應力状態は、受働土壓の状態より外に存在せざる事となる。然るに受働土壓は、第一象限では $\tau_{r\theta}$ が正の値となり、絶対に θ_0 に於ける境界條件を満足し得ないのである。

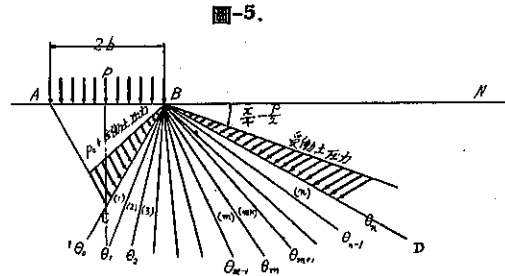
5. 過渡領域を多數の微小楔形區域に分割して應力を求める方法

以上より、過渡領域の應力函数は (20), (21) 式の如き唯一つの函数では求め得ざる事を知つた。よつて結局、安藏博士が土壓論に於て創始された方法⁽⁷⁾に倣ひ、此領域を多數の微小楔形區域に分割して近似的に應力を求める事とする。

即ち圖-5 の如く CBD 間を B を通る放射線に依り多數の微小區域に分割する。但し、 θ_0 は前述の如く

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \quad \text{とする。}$$

任意の $\theta_{m-1} \sim \theta_m$ 間の應力及び係數に m なる番號を附し、次の如く表はす。



(7) Anzo: Pressure Exerted by Granular or Pulverulent Material. Memoirs of Faculty of Eng. Kyushu Imperial University, Vol. 7.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(m)} &= 6F_m r \cos 3\theta + 6F_m r \cos \theta + 6G_m r \sin 3\theta + 6H_m r \sin \theta + \gamma(1-k)r \sin^2 \theta + Q \\ \tau_{r\theta}^{(m)} &= 6E_m r \sin 3\theta + 2F_m r \sin \theta - 6G_m r \cos 3\theta - 2H_m r \cos \theta - \gamma(1-k)r \sin^2 \theta \cos \theta \\ \sigma_r^{(m)} &= -6E_m r \cos 3\theta + 2F_m r \cos \theta - 6G_m r \sin 3\theta + 2H_m r \sin \theta \\ &\quad + \gamma(1-k)r \sin \theta \cos^2 \theta + Q \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

θ_m なる分割線上の應力を, θ_m の左側に於て $\sigma_{\theta m}^{(m)}, \tau_{r\theta m}^{(m)}, \sigma_{r m}^{(m)}$ とし, θ_m の右側に於て $\sigma_{\theta m}^{(m+1)}, \tau_{r\theta m}^{(m+1)}, \sigma_{r m}^{(m+1)}$ を以て表はせば, 此線上で應力は連続せねばならないから,

$$\sigma_{\theta m}^{(m)} = \sigma_{\theta m}^{(m+1)}, \quad \tau_{r\theta m}^{(m)} = \tau_{r\theta m}^{(m+1)}, \quad \sigma_{r m}^{(m)} = \sigma_{r m}^{(m+1)} \dots\dots (34)$$

が成立つべきである。但し右肩の番號は楔形區域の番號, 右下の番號は分割線の番號を示すものとする。

又 θ_m なる線上で滑りの限界に達すると云ふ條件より,

$$(\sigma_{\theta m} - \sigma_{r m})^2 + 4\tau_{r\theta m}^2 = \sin^2 \rho (\sigma_{\theta m} + \sigma_{r m})^2 \dots\dots (35)$$

を得る。此場合は過渡領域内の全ての點で滑りの限界に達する應力を求める代りに, 近似的に分割線上に於てのみ此條件を充す如くする。

θ_1 より θ_{n-1} 迄の各分割線上に於て, (34), (35) 式と同様な 4 つ宛の條件式が存在する。又 θ_m 及び θ_n に於ては, 前述の如き境界條件を充すべきであるから, 結局條件式の數は,

$$4(n-1) + 6 = 4n + 2$$

となる。之に對して未知數は各楔形分割區域に於て E_m, F_m, G_m, H_m の 4 つ宛, 及び θ_n, ap である。勿論 $m = 1, 2, \dots, n-1, n$ と置くべきものである。然る時は, 未知數の數は $(4n+2)$ となり以上の條件式の數と一致するから, 之等の式を聯立に解く事に依つて, $(4n+2)$ 個の未知數を決定し得る事となる。

分割の數 n を増大すれば増大する程, 各楔形區域は微小なるものとなり, 以上に依り求めた應力は, 眞實の應力に近づく理で, 遂に $n \rightarrow \infty$ となる極限に於ては, 理論上眞實の應力と一致する筈である。

(34) 式に (33) 式の値を入れれば, 各線上に於ける連續の條件は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} 6(E_{m+1} - E_m) \cos 3\theta_m + 6(F_{m+1} - F_m) \cos \theta_m + 6(G_{m+1} - G_m) \sin 3\theta_m \\ \quad + 6(H_{m+1} - H_m) \sin \theta_m = 0 \\ 6(E_{m+1} - E_m) \sin 3\theta_m + 2(F_{m+1} - F_m) \sin \theta_m - 6(G_{m+1} - G_m) \cos 3\theta_m \\ \quad - 2(H_{m+1} - H_m) \cos \theta_m = 0 \\ -6(E_{m+1} - E_m) \cos 3\theta_m + 2(F_{m+1} - F_m) \cos \theta_m - 6(G_{m+1} - G_m) \sin 3\theta_m \\ \quad + 2(H_{m+1} - H_m) \sin \theta_m = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

(36) 式を解けば,

$$\left. \begin{aligned} E_{m+1} - E_m &= -\frac{(F_{m+1} - F_m) \sin 3\theta_m}{3 \sin \theta_m} \\ G_{m+1} - G_m &= \frac{(F_{m+1} - F_m) \cos 3\theta_m}{3 \sin \theta_m} \\ H_{m+1} - H_m &= -(F_{m+1} - F_m) \frac{\cos \theta_m}{\sin \theta_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots (37)$$

が得られる。依つて (34) 式の代りに (37) 式を用ひ得る。

次に θ_m に於ける境界條件式は, (23) 式の E, F, G, H の代りに E_1, F_1, G_1, H_1 を用ひたものとなる。此 3 式を解けば次の關係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= -\frac{\alpha p}{12} \sin 2\theta_0 - \frac{F_1 \sin 3\theta_0}{3 \sin \theta_0} \\ G_1 &= -\frac{\alpha p}{24} (1-k) + \frac{\alpha p}{12} \cos 2\theta_0 + \frac{F_1 \cos 3\theta_0}{3 \sin \theta_0} \\ H_1 &= -\frac{\alpha p}{8} (1+k) - F_1 \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

同様に θ_n に於ける境界条件式は、(24) 式の係数を E_n, F_n, G_n, H_n としたものであるから、此 3 式を解けば、(31) 式の E, F, G, H に各、 n なる番號を附したものととなる。即ち

$$\left. \begin{aligned} E_n &= -\frac{F_n \sin 3\theta_n}{3 \sin \theta_n}, \quad G_n = \frac{\gamma}{24} \left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{F_n \cos 3\theta_n}{3 \sin \theta_n}, \\ H_n &= \frac{\gamma}{8} \left(k - \frac{1}{k}\right) - F_n \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

が得られる。

よつて結局、各分割線上に於て (37) 及び (35) 式の 4 式宛、 θ_0 及び θ_n に於て (38) 及び (39) 式の 6 式、合計 $(4n+2)$ 式を聯立に解けばよい事となる。

然るに未知数の内、 θ_n は以上の聯立方程式を解かず共、次の如くして獨立に見出す事が出来る。 θ_{n-1} に於ける滑りの條件に $\sigma_{\theta_{n-1}}^{(n)}, \tau_{r\theta_{n-1}}^{(n)}, \sigma_{r_{n-1}}^{(n)}$ を入れる。即ち具體的には、

$$[(27) \text{ 式の右邊}] = \sin^2 \rho \times [(28) \text{ 式の右邊}]$$

と置き、 θ に $(n-1)$ なる番號を附し、 E, F, G, H に各、 (n) なる番號を附し、此 E_n, G_n, H_n に (39) 式の値を代入して、少しく計算すれば次のものが得られる。

$$F_n = 0 \dots\dots\dots (40)$$

又は、

$$\begin{aligned} &4F_n \frac{\cos^2 \rho}{\sin \theta_n} \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) + \gamma \left(k - \frac{1}{k}\right) (\cos 2\theta_n - \sin^2 \rho) \sin \theta_{n-1} \\ &= -\gamma \sin \theta_{n-1} [(1-k) \cos 2\theta_n + (1+k) \sin^2 \rho] \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

然るに (40) 式は全區域受働土壓の場合を與へるから、前述の理由によつて之を除く。

今分割を無數に多くした場合、即ち $n \rightarrow \infty$ の極限に於ては、 $(\theta_n - \theta_{n-1}) \rightarrow 0$ となる。故に (41) 式に於て $(\theta_n - \theta_{n-1}) = 0$ と置けば次の關係が得られる。

$$\frac{1+k}{k} [\cos 2\theta_n - \sin^2 \rho] = \cos 2\theta_n + \frac{1+k}{1-k} \sin^2 \rho$$

之より、

$$\begin{aligned} 2\theta_n &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right) \\ \therefore \theta_n &= \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

を得る。依つて圖-4、圖-5 に於ける受働土壓力の境界線 BD の水平線 BN となす角は $(\pi/4 - \rho/2)$ となり、Reissner の假定と一致するを知る。斯様にして θ_n が定まるから、未知數の數は 1 個減じて $(4n+1)$ 個となる。一方に於て、實際計算の場合には、 $(\theta_n - \theta_{n-1})$ は有限の値に取り、 θ_n として (42) 式の値を用ふれば、(41) 式は成立たない理であるから、条件式中より θ_{n-1} に於ける滑りの條件を除かねばならない事となる。故に条件式も

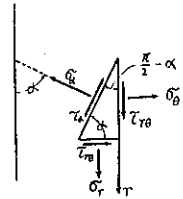
1 個丈減じて未知数の数と一致する。

6. 滑り方向

今任意の點に於て、放射線 r と $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ なる角をなす方向に對して 働く垂直應力及び切線應力を夫々 σ_α 及び τ_α とする。然る時は圖-6 より τ_α を求めれば次の如くなる。

圖-6.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= -\sigma_\theta \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_r \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{r\theta} [\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha] \\ &= -[\sigma_\theta - \sigma_r] \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau_{r\theta} \cos 2\alpha \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$



(43) 式に於て $\tau_\alpha = 0$ と置けば、此點に於ける主應力 σ_α と r とのなす角が得られる。

即ち

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta - \sigma_r} \dots \dots \dots (44)$$

より α を求めればよい。

一般に滑り方向は、最大主應力の方向と $\pm(\pi/4-\rho/2)$ なる角をなすから、 σ_α が最大主應力であれば、その點の滑り方向が r の正方向となす角 β は次式により與へられる。

$$\beta = \alpha + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) \dots \dots \dots (45)$$

若し又、 σ_α が最小主應力であるならば、

$$\beta = \alpha \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right) \dots \dots \dots (46)$$

となる。(45),(46) 式の正負の符號は其場合の滑り状態に適應するものを選定すればよい。一般的には符號の選び方は應力橢圓を考ふれば明瞭となるであらう(8)。

7. 計 算 例

$\rho=30^\circ$ の場合の計算例を示す。

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \theta_n = 150^\circ$$

(6) 式により, $a = \frac{1.1547}{b}$

i. $n=3$

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \theta_1 = 90^\circ, \quad \theta_2 = 120^\circ, \quad \theta_3 = 150^\circ$$

計算の結果次の値を得る。

$$ap = 8.00053 \gamma, \quad p = 6.920 \times b \gamma$$

ii. $n=4$

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \theta_1 = 82.5^\circ, \quad \theta_2 = 105^\circ, \quad \theta_3 = 127.5^\circ, \quad \theta_4 = 150^\circ$$

$$ap = 13.537 \gamma, \quad p = 11.723 \times b \gamma$$

$$\beta_1 = 103^\circ 34' 2'', \quad \beta_2 = 85^\circ 48' 49''$$

(8) 例へば、文獻(2) 参照

iii. $n=5$

$$\theta_0=60^\circ, \theta_1=78^\circ, \theta_2=96^\circ, \theta_3=114^\circ, \theta_4=132^\circ, \theta_5=150^\circ$$

$$ap=18.829 \gamma, \quad p=16.306 \times b\gamma$$

$$F_1=-5.81603 \gamma, \quad E_1=-1.35887 \gamma, \quad G_1=0.93103 \gamma, \quad H_1=0.21965 \gamma$$

$$F_2=-0.74343 \gamma, \quad E_2=0.03965 \gamma, \quad G_2=-0.08506 \gamma, \quad H_2=-0.85858 \gamma$$

$$F_3=-0.57567 \gamma, \quad E_3=0.09313 \gamma, \quad G_3=-0.06769 \gamma, \quad H_3=-0.84095 \gamma$$

$$F_4=-0.34925 \gamma, \quad E_4=0.12971 \gamma, \quad G_4=0.01825 \gamma, \quad H_4=-0.72543 \gamma$$

$$F_5=-0.09336 \gamma, \quad E_5=0.06224 \gamma, \quad G_5=0.11111 \gamma, \quad H_5=-0.49503 \gamma$$

$$\beta_1=94^\circ 43' 49'', \quad \beta_2=85^\circ 27' 15'', \quad \beta_3=77^\circ 47' 12''$$

iv. $n=6$

$$\theta_0=60^\circ, \theta_1=75^\circ, \theta_2=90^\circ, \theta_3=105^\circ, \theta_4=120^\circ, \theta_5=135^\circ, \theta_6=150^\circ,$$

$$ap=21.021 \gamma, \quad p=18.205 \times b\gamma$$

$$F_1=-7.22705 \gamma, \quad E_1=-1.51706 \gamma, \quad G_1=1.32191 \gamma, \quad H_1=0.66897 \gamma$$

$$F_2=-1.20231 \gamma, \quad E_2=-0.04692 \gamma, \quad G_2=-0.14823 \gamma, \quad H_2=-0.94536 \gamma$$

$$F_3=-0.90073 \gamma, \quad E_3=0.05361 \gamma, \quad G_3=-0.14823 \gamma, \quad H_3=-0.94536 \gamma$$

$$F_4=-0.58111 \gamma, \quad E_4=0.13160 \gamma, \quad G_4=-0.07024 \gamma, \quad H_4=-0.85972 \gamma$$

$$F_5=-0.31764 \gamma, \quad E_5=0.13160 \gamma, \quad G_5=0.04736 \gamma, \quad H_5=-0.74349 \gamma$$

$$F_6=-0.12639 \gamma, \quad E_6=0.08426 \gamma, \quad G_6=0.11111 \gamma, \quad H_6=-0.55224 \gamma$$

$$\beta_1=89^\circ 28' 53'', \quad \beta_2=83^\circ 43' 58'', \quad \beta_3=79^\circ 7' 27'', \quad \beta_4=74^\circ 23' 45''$$

v. $n=7$

此場合は等分ではなく次の如く分割する。

$$\theta_0=60^\circ, \theta_1=75^\circ, \theta_2=90^\circ, \theta_3=105^\circ, \theta_4=120^\circ, \theta_5=135^\circ, \theta_6=142.5^\circ, \theta_7=150^\circ$$

計算の結果次の値を得る。

$$ap=21.005 \gamma, \quad p=18.191 \times b\gamma$$

$$F_1=-7.22170 \gamma, \quad E_1=-1.51591 \gamma, \quad G_1=1.32096 \gamma, \quad H_1=0.66855 \gamma$$

$$F_2=-1.20141 \gamma, \quad E_2=-0.04686 \gamma, \quad G_2=-0.14809 \gamma, \quad H_2=-0.94459 \gamma$$

$$F_3=-0.90012 \gamma, \quad E_3=0.05357 \gamma, \quad G_3=-0.14809 \gamma, \quad H_3=-0.94459 \gamma$$

$$F_4=-0.58111 \gamma, \quad E_4=0.13141 \gamma, \quad G_4=-0.07025 \gamma, \quad H_4=-0.85911 \gamma$$

$$F_5=-0.31277 \gamma, \quad E_5=0.13141 \gamma, \quad G_5=0.03303 \gamma, \quad H_5=-0.70418 \gamma$$

$$F_6=-0.09078 \gamma, \quad E_6=0.05741 \gamma, \quad G_6=0.10703 \gamma, \quad H_6=-0.48219 \gamma$$

$$F_7=-0.06935 \gamma, \quad E_7=0.04623 \gamma, \quad G_7=0.11111 \gamma, \quad H_7=-0.45345 \gamma$$

$$\beta_1=89^\circ 28' 48'', \quad \beta_2=83^\circ 43' 47'', \quad \beta_3=78^\circ 50' 47'', \quad \beta_4=74^\circ 22' 18'', \quad \beta_5=70^\circ 24' 8''$$

以上の iii, iv, v の場合の滑り面を, β によつて圖式的に求めれば圖-7 及び圖-B の如くなり, iv と v の滑り面は殆んど一致する。

尙比較の爲に 山口博士の土質力學⁽⁹⁾に示されたる, 圓形滑り面による圖式解法に依り, 此場合の支持力を求め

(9) 文獻 (3) 129 頁参照

れば次の値を得る。

$$p = 29.3 \times by$$

8. 結 語

7. の計算例に示す如く、 n を 6 或ひは 7 位
 にとる事に依り、大體に於て從來の實驗の結果に
 一致する如き滑り面が得られ、同時に支持力を求
 める事が出来る。支持力は構造物基礎面の幅が増
 加する程増大するを示し、之は實際問題として當
 然首肯される所である。

分割数を多くする程正しき結果に近づく筈であ
 るが、各分割線上で二次方程式を解かねばならな
 いから、計算は可成複雑となり、實際上は餘り多
 數の分割をなす事は困難となる。併し實用上安全
 なる支持力を求める爲には、 n を 5 位に取れば充分であらうと思ふ。

附 記： 本文を草するに當り、安藏教授に有益なる御助言を賜はり、且つ同教授の前掲論文に示唆を受ける事
 大なるものがあつた。茲に附記して深甚なる謝意を表する。

