

論 說 報 告

第 28 卷 第 6 號 昭和 17 年 5 月

射流現象特に射流の流體抵抗に就て (1)

正會員 本 間 仁*

要 旨 射流に関する理論の發展を述べ、特に射流の流體抵抗の問題に就ては常流に関する法則が延長され得るや否やに就て詳論した。

目 次

- 1. 限界流速と波速
- 2. 射流と壓縮性流體の超音速運動との相似
- 3. 射流の彎曲の問題
- 4. 壁面壓力の問題
- 5. 射流の水壓及び限界水深
- 6. 射流の流體抵抗
- 7. 射流の亂れに就て

1. 限界流速と波速

射流は開水路にのみ現れる現象であつて、その平均速度が水面を傳播する長波の速度以上になつてゐるものである。即ち流れが等流の状態にありと考へて、その水深を h 、平均速度を v 、長波の傳播速度を c とすれば

$$c = \sqrt{gh} \dots\dots\dots (1)$$

であるから、射流に於ては $v > \sqrt{gh}$ であつて、従つて常流と射流の限界水深に於ては $v = \sqrt{gh}$ 即ち Froude 數 v/\sqrt{gh} が 1 に等しくなる。

然るに一般流水論の方から知られてゐる様に限界水深 h_c は

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha' q^2}{g}} \dots\dots\dots (2)$$

で表はされる。但し α' は Bélanger の常數で約 1.1 に等しく、 q は單位幅當りの流量である。従つて h_c に對應する限界流速 v_c は

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \frac{q}{h_c} = \sqrt{\frac{gh_c}{\alpha'}} \\ \text{又は} \quad \frac{v_c}{\sqrt{gh_c}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

即ち $\alpha' = 1$ と假定すれば前述の様に限界状態での Froude 數は 1 となるが、 $\alpha' = 1.1$ と取れば限界 Froude 數 $F_{r,c}$ はほぼ 0.95 になる。之は断面内での流速分布の不均一が原因となつてゐるのであるが、この他にも水路底の摩擦も波の傳播速度に影響する筈である。然し著者が嘗て變化する断面での長波の形に對する摩擦の影響を計算した所によればその影響は極めて輕微である¹⁾。

以上は流れが等流である場合に就て述べたものであるが、等流でない場合でも變化の極めて緩慢な不等流などでは、近似的に等流と見做して上述の所論を適用出来る事は勿論である。

流れてゐる水の表面での長い波の傳播は波の高さが水深に比して小さければ $c \pm v$ で與へられる²⁾。但し (+) は

* 工學士 東京帝國大學助教授
 1) 本間 仁, 「長波の變形に就て」土木學會誌第 19 卷第 9 號 754 頁。
 2) Forchheimer, Hydraulik S. 255.

流れの方向に、(一)は流れと反対の方向に波の傳はる場合である。然し波の高さが水深に比して小さくない時は色々な補正が行はれた。例へば Boussinesq によれば³⁾、 ξ を静水面からの波の高さとして

$$\text{傳播速度} = v \pm \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\xi}{h} + \frac{h^2}{6\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} \right) \dots\dots\dots(4)$$

又は最後の項を省略して

$$v \pm \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\xi}{h} \right) \dots\dots\dots(5)$$

と書く。この様な場合には水面の上昇の時は傳播速度が増し、従つて限界 Froude 数は (3) よりも更に減少する傾向にあるが、水面低下の時は反対に多少増加する傾向にある。

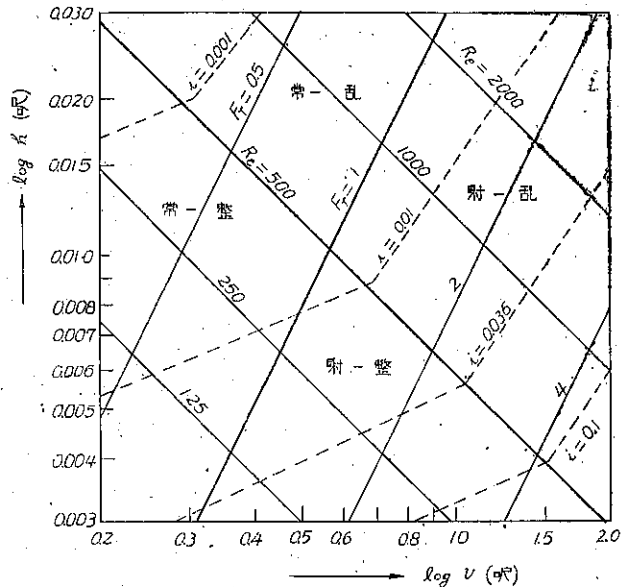
射流に於ては 背水現象が見られない事は上の事實からも證明される。即ち射流では流速が波の傳播速度よりも大きい爲に、起つた變動が上流に傳はる事が出来ないが常流では之が自由に傳はる事が出来る。尚常流では水面變動が下流側に傳はらないと言ふ事實は傳播速度の問題から來るのではなく、常流状態の水面曲線は $dh/dx < 0$ (x は下流に向つて測る) ならば上方に凸、 $dh/dx > 0$ ならば上方は凹の曲線でなければならない事から定まる⁴⁾。

自由水面を持つた流れでも貯水堰堤が地震動を受けた場合の様に変動が衝撃的に來た場合には、變動の一部が壓縮波として傳播する事も考へられる。この様な場合には以上に述べた所には多少の差異を生ずる。

一般に射流の觀測されるのは流速の大きい場合であり、従つて Reynolds 數も大きいのが普通であるから射流は亂流 (Turbulent flow) に屬するものと考へられて來た、然し元來整流と亂流の區別は Reynolds 數に關係するものであり、常流と射流の區別は既に述べた様に Froude 數に關係するものであつて、その間の關聯はないと考へる事が出来る。従つて整流にも亂流にも夫々に常流と射流の區別があつてよい筈である。この事實を M. Robertson 及び H. Rouse は實驗的に證明した⁵⁾。

水深 h の幅の広い水路で Reynolds 數を $Re = vh/\nu$ 、(ν は動粘性係數) とすれば、 d 直径 d の圓管での限界 Reynolds 數 vd/ν が約 2000 である事から、この場合は約 500 が限界になつてゐると考へてよい。そこで Robertson 及び Rouse は $\log v$ 及び $\log h$ の關係を表はすべき圖の全域を 圖-1 の様にして 4 つの領域に分けた、但し限界 Froude 數は 1 としてゐる。そこで射流で整流の流況が存在する事を證明する爲に幅の広い水路に極く小さい水深で水を流し、上端から着色液の流線を與へ

圖-1. 水流の 4 流況



3) J. Boussinesq, Essai sur le theorie d'eau courants, p. 358 又は Forchheimer S. 255.

4) 本間 仁「不等速定流に關する 2, 3 の問題」土木學會誌第 20 卷第 7 號 722 頁。

5) Robertson, Rouse, On the four regimes of open-channel flow. Civil Engineering, 1941-3.

る。初め勾配を小さくして置き整流状態に保つて、下流端を少し堰き上げた所が背水曲線が得られた。即ち流れは整流で常流である。次に勾配を増して行き或る勾配になつた時に背水は消えて跳水現象が起る様になつた。而もその時に跳水の起る位置までは流線が亂れない事が見られた。即ち此處までの流れは整流で射流である事が認められたのである。

2. 射流と壓縮性流體の超音速運動との相似

1932年 Riabouchinsky が氣體の超音速運動と液體の射流との相似性を論じた⁶⁾。その要旨は $h=f(x, y)$, h_0 を速度 0 の時の水深として、第一近似値として水流に對し

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{h_0}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{h_0}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (6)$$

とおけば、之から次の式が得られる。

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{c_0^2}, \quad c_0^2 = gh_0, \quad q^2 = u^2 + v^2 \quad \dots \dots \dots (7)$$

之に對して二次元の壓縮性氣體では

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (8)$$

とおけば、同様にして次の式が得られる。但し ρ_0, c_0 は速度 0 の點での ρ, c の値である。

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{c_0^2} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad \dots \dots \dots (9)$$

故に $\rho/\rho_0 = h/h_0$ 及び $\gamma=2$ とおけば兩者の間に相似性が得られる。而して γ の値が 2 になる様な氣體は實在しないから、實驗で相似を得る事は不可能である。

その後 Preiswerk⁷⁾ は 2 方面に擴がる射流の説明に於て同様の相似性を述べて居り、更に最近では次の章に述べる様な幾つかの文獻が出てゐる。

以上の様に超音速運動と射流との間には相似性があるが、之を實驗上に利用する時には音波の速度でも必ずしも一定ではなく、まして長い波の速度は色々の條件で影響されるから、嚴密に相似性を保たせる事はかなり困難であると思はれる。

3. 射流の彎曲の問題

V. Kármán は超音速運動の解法を應用して彎曲水路での射流の問題を解いた⁸⁾。それによれば先づ水平底の水路で流體摩擦は無視し、水深は水路幅に比して非常に小さいとする。水深 h_0 、平均流速 U の直線水路から彎曲部に入つた時に、状態の變化は極めて少いものとして $v_x = U + v_x', v_y = v_y', h = h_0 + h'$ と置いた時に、 v_x', v_y', h' 等の二次以上の項は省略出来るものとする。但し x は流れに沿つて測り、 y は之と直角に取る。その時の運動及

6) Riabouchinsky, Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible. *Compte Rendus*, 1932 Tome 195, p. 998.

7) Preiswerk, Zweidimensionale Strömung schiessenden Wasser. *Schweizerische Bauzeitung*, 1937 S. 237.

8) Th. v. Kármán, Eine praktische Anwendung der Analogie zwischen überschallströmung in Gasen und überkritischer Strömung in offenen Gerinnen. *ZAMM*, 1938 H 1.

び連続の方程式は次の様になる。

$$U \frac{\partial v_x'}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad U \frac{\partial v_y'}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial y} \dots\dots (10)$$

$$h_0 \left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} \right) + U \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \dots\dots (11)$$

この 3 式から v_x' 及び v_y' を消去すれば

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \left(\frac{U^2}{gh_0} - 1 \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \dots\dots (12)$$

即ち常流状態ならば $U^2/gh_0 < 1$ であるから (12) 式はポテンシャル方程式になるが、射流状態では $U^2/gh_0 > 1$ であるから (12) 式は波動方程式であつて、水面には波動が現れる事がわかる。射流の場合には $U^2/gh_0 - 1 = \beta^2$ と書けば、 β は Mach 角 α の餘切、即ち波の線と基本流の流線とのなす角の餘切である。

先づ両側の壁の相互の影響の初まる前の範囲に對して考へる。壁面で起つた變位は波の線に沿つて變らずに傳はる。唯 Mach 角 α は波の線と x 軸の間の角でなく、波の線と實際の流線の間の角に取る事にすれば、 $v = \sqrt{2g(H-h)}$ 、(但し h は全エネルギー水頭) であつて、之も變化しないから波の線に沿つて α の値は不變である。そこで入口断面での Mach 角を α_0 とすれば

$$\alpha = \alpha_0 = \arcsin \frac{\sqrt{gh_0}}{U} \dots\dots (13)$$

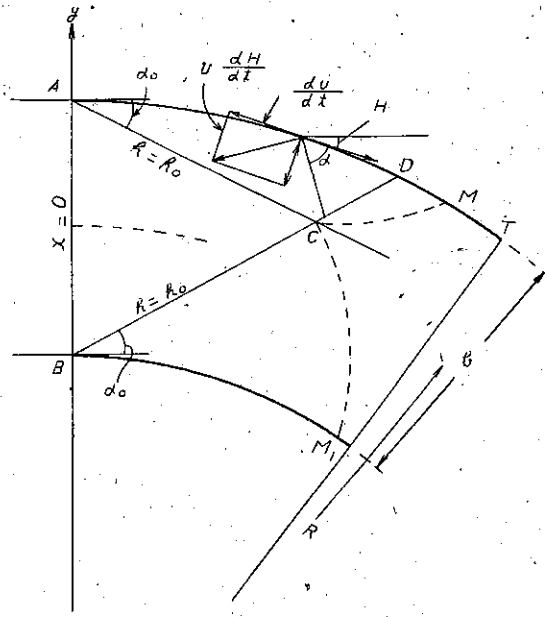
三角形 ABC の内部では $h = h_0$ で、速度はその大きさと方向を維持する。壁面で水面が Δh だけ昇るものとすれば、その變位は壁から α だけ傾いた波の線に沿つて變化せずに傳はり、加速度は h の勾配の方向に現れるから、之は波の線に垂直である。⊙を初めの方向からの流線の傾きとすれば、圖-2 に示す様に加速度 a の成分は $\frac{dv}{dt}$ 及び $v \frac{d\odot}{dt}$ であつて、 a の方向は速度の方向と $90^\circ + \alpha$ の角をなす。

$$\left. \begin{aligned} \therefore \frac{dv}{dt} &= a \cos(90^\circ + \alpha) = -a \sin \alpha \\ v \frac{d\odot}{dt} &= a \sin(90^\circ + \alpha) = a \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{1}{v} \frac{dv}{d\odot} \dots\dots (15)$$

然るに $\frac{v^2}{2g} + h = \text{const.} = H$ であるから

圖-2.



9) Busemann, Gasdynamik, Handbuch der Experimental-Physik. Bd. 4, I. Teil. S. 418 参照。

$$\frac{dh}{d\Theta} = -\frac{v}{g} \frac{dv}{d\Theta} = \frac{v^2}{g} \tan \alpha \dots\dots\dots (16)$$

更に $\frac{v^2}{2g} = H-h$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{v^2-g^2h}} = \sqrt{\frac{h}{2H-3h}}$ を代入すれば

$$\frac{dh}{d\Theta} = \frac{2(H-h)\sqrt{h}}{\sqrt{2H-3h}} \dots\dots\dots (17)$$

(17) の解は $\Theta=0$ で $\alpha=\alpha_0$, $h=h_0$ として次の形で與へられる。

$$\Theta + \alpha = \sqrt{3} \left(\arcsin \sqrt{\frac{3h}{2H}} - \arcsin \sqrt{\frac{3h_0}{2H}} \right) + \alpha_0 \dots\dots\dots (18)$$

① の負の値は内側の壁での流線の離れる事を示してゐる。圖-3 の曲線 A は (18) で計算した値を表はす。又曲線 B 及び C は Ippen 氏の實驗結果¹⁰⁾ による外側及び内側の壁での水面の變位を示す。之から見ると (18) 式はやゝ大き過ぎる結果を與へる。

底勾配 i があつて摩擦を考慮する場合に對しては Kármán は近似的に次の式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial h'}{\partial x} \end{aligned} \right\} (19)$$

但し

$$\kappa = \frac{2i}{h_0} \left(1 + \frac{g}{2} \frac{h_0}{U^2} \right) = \frac{2i}{h_0}$$

之は減衰振動の方程式であつて、その解は最初の變位と $h' = f(y) = \sum a_n \cos \frac{n\pi y}{b}$ の形で假定し、壁面で $\frac{\partial h'}{\partial y} = 0$ とすれば

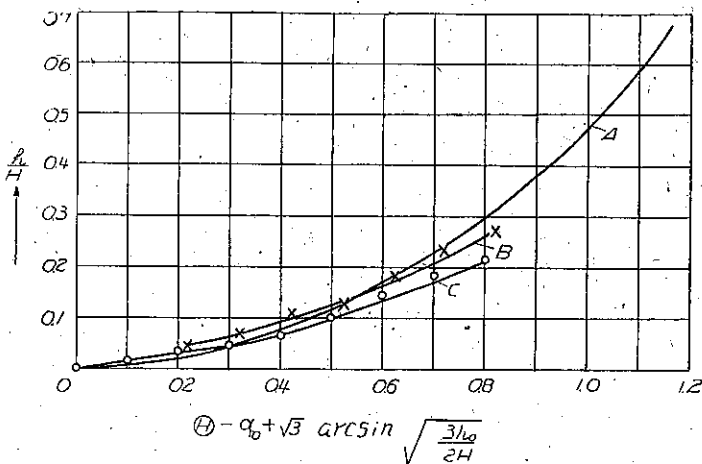
$$h' = \sum a_n e^{-\frac{\alpha n y}{2\beta^2}} \left[\cos x \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{\beta^2} + \frac{\kappa^2}{4\beta^4}} + \sin x \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{\beta^2} + \frac{\kappa^2}{4\beta^4}} \right] \cos \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots (20)$$

減衰率は $e^{-\frac{\kappa y}{2\beta^2}}$ 又は近似的に $e^{-\frac{\kappa y}{\beta^2}}$ であつて、勾配の急な程早く減衰する事になる。

圖-4 は幅 1', 曲率半径 10' の水路の外壁に沿つての水深の變化を示す。速度水頭は鎖線で與へられる。減衰率は (20) で計算したものよりもこの實驗結果の方が大きくなつた。

この問題に就ては Kármán の論文に先立つて、Knapp 及び Ippen が California Institute of Technology の Hydraulic Structures Laboratory に於て實驗を行つてゐる^{11,12)}。兩氏は (16) 式に於て v をほぼ常數と見て、 $h=h_0$ で $\Theta=0$, $\alpha=\alpha_0$ なる事から

圖-3.



10) 後出。

11) R. T. Knapp, A. T. Ippen, Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation. Proc. of 5th International Congress for Applied Mechanics. p. 531.

12) Knapp, Ippen, A study of high velocity flow in curved channels. Trans. American Geophysical Union, 1936-1.

$$h = \frac{v^2}{g} \sin^2 \left(\alpha_0 + \frac{\Theta}{2} \right) = Fr_0^2 h_0 \sin^2 \left(\alpha_0 + \frac{\Theta}{2} \right) \dots\dots\dots(21)$$

但し Fr_0 は $h=h_0$ に於ける Froude 数であつて、この式の方が Kármán の (18) 式よりも實驗には適合したと

圖-4. 彎曲による波の減衰

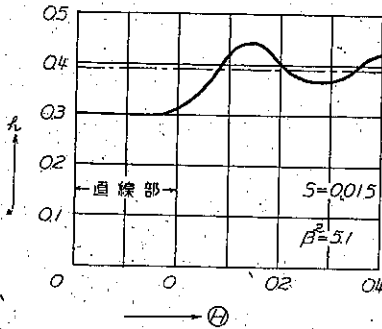
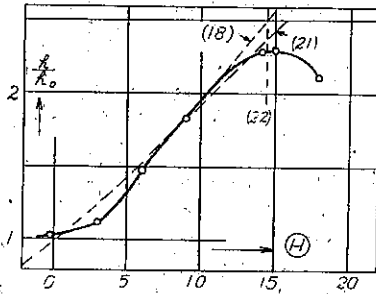


圖-5. Knapp, Ippen の實驗



言つてゐる。尚 $\sqrt{gh/v} = \sin \alpha$ であるから、 $\alpha = \alpha_0 + \Theta/2$ になる。

圖-5 に於て最初の高まりの線は CM に沿ひ、傾きが $\alpha_0 - \Theta/2$ となつてゐる。又 M は内壁によつて影響される最初の點で、A から M に水深は (21) 式に従つて變化する。そこで M は上昇の最後の點であり

$$\Theta_0 = \tan^{-1} \frac{b}{\left(R + \frac{b}{2} \right) \tan \alpha_0} \dots\dots\dots(22)$$

で與へられる。 Θ_0 は半波長を與へる事になるから、相次ぐ波頂は外壁では $3\Theta_0, 5\Theta_0$ 等で起る。

彎曲が急激な場合、即ち壁の屈曲の場合には水位の變動は小さい量ではなくなる。H. Rouse 及び M. P. White¹³⁾ によればこの時の波は跳水現象であるから (圖-6)

$$v_1 \sin \alpha = c = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_2}{h_1} (h_2 - h_1)} \dots\dots\dots(23)$$

ベクトル圖から

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos (\alpha - \theta) \dots\dots\dots(24)$$

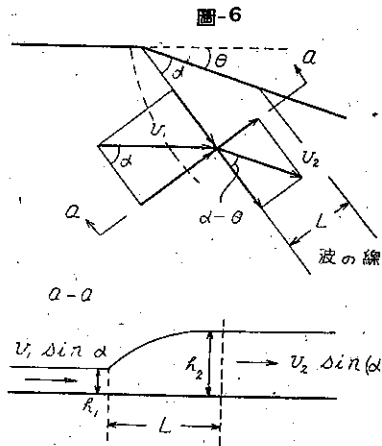
連續方程式から

$$h_1 v_1 \sin \alpha = h_2 v_2 \sin (\alpha - \theta) \dots\dots\dots(25)$$

この 3 つの聯立方程式を解けば

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_0^2 \sin^2 \alpha} - 1) \dots\dots\dots(26)$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{h_2}{h_1} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right)^2 - 4 \frac{h_2}{h_1} \tan^2 \theta}}{2 \tan \theta} \dots\dots\dots(27)$$



實際には跳水現象が起つてゐる時は波の線は圖の點線の様な曲

線になつてゐる。以上の彎曲流の例で見得る様に變位を與へられた射流はそれ以下の水面に於て波状を呈するの
が大きな特徴である。

13) H. Rouse, Hydraulics for Hydraulic Engineers. p. 400.

4. 壁面壓力の問題

前述の問題に關して彎曲した水路の壁面での水壓の強さは、射流状態に於ては如何なる値を取るかの問題に就て考へる。之に關しては Wilson の實驗¹⁴⁾があり、この實驗は一方が凸面壁、他方が眞直ぐな壁であつて、同氏によれば凸面壁での水面の低下を、Knapp-Ippen の (21) 式と實驗の結果とで比較すれば、圖-7 の様に一般に實

圖-7. 凸面壁での水壓

(彎曲半徑 R , $F_{r0}=10$, h_0 =約 0.33 呎)

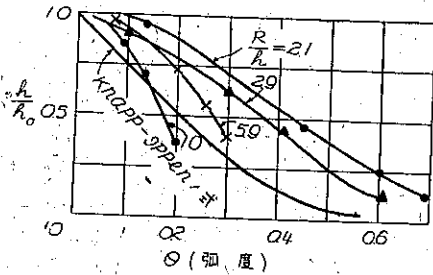
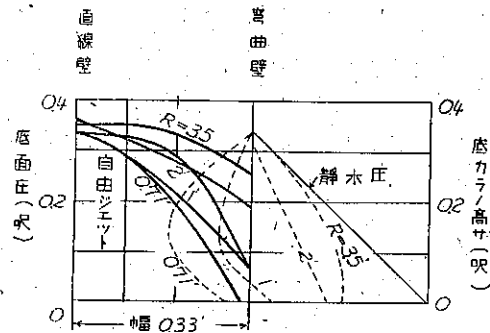


圖-8.



驗による値の方が大きくなつてゐる。この時の曲線部の初めの壁面及底面の水壓の分布は 圖-8 の様になつた。之から見るとこの様な射流には非静水壓分布の存在する事がわかる。

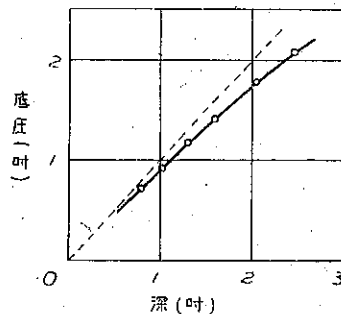
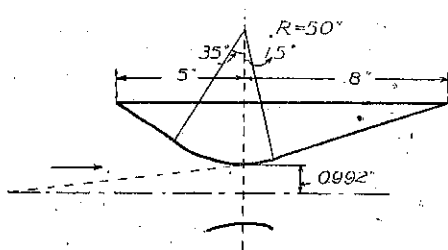
Wilson によれば常流の場合は速度による壓力降下は流線の水平面内での彎曲が原因となるが、射流では鉛直面内での彎曲が原因になつてゐる。そこで常流では壓力分布は常にほぼ直線的になるが、射流では水面と底部で彎曲が違ふ爲に直線的にならないとして説明されてゐる。然しやはり水平遠心力による流線の壁面からの離れが水深によつて違ふ爲ではないかとも考へられる。即ち射流では流線が離れると其處に空隙が出来る。その離れ方が一樣でないものとして説明される。

Wilson は鉛直面の單位幅當りに働く全水壓を $P=k \frac{\rho g h^2}{2}$ (但し $k < 1$) とおいて次の補正式を出してゐる。

$$c = \sqrt{gh \left(k + \frac{dk}{dh} \frac{h}{2} \right)} \dots \dots \dots (28)$$

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{h}{4v} \left\{ -\frac{dk}{d\theta} + \sqrt{\left(\frac{dk}{d\theta} \right)^2 + (6k F_r)} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

圖-9. Binnie, Hooker の實驗



14) W. E. Wilson, Effects of curvature in supercritical flow. Civil Engineering, 1941-2.

彎曲の初めの點で測つた k の値は $R/h_0=12$ の時に, $E_r=20$ では 0 になり, Froude 數がそれ以上になれば負の値になつてゐる。

尙 Binnie, Hooker¹⁵⁾ が 圖-9 の様な水平狹窄水路で底壓を測定した結果を見ても, 射流では底壓が靜水壓よりも低い事を示してゐる。この原因もやはり狹窄部の下流で流線が壁から離れる事にあると思ふ。

5. 射流の水壓及び限界水深

圖-10 の様な射流の等流に於ける水壓の強さに就て Lauffer は次の様な計算をした¹⁶⁾。記號を圖の様に取れば

$$p ds - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) ds + \rho g dn ds \cos i = 0$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial n} = \rho g \cos i \dots\dots\dots(30)$$

但し n は水面に垂直に測つた深さである。水面での壓力を 0 とすれば

$$\left. \begin{aligned} p &= n \rho g \cos i \\ \text{底の壓力は} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

$$p_b = \rho g h \cos^2 i$$

然し實際には流れの方向に内部摩擦があるから, Lauffer の計算の様に摩擦を無視して, 水壓に方向性なしとする考へは多少の誤差を伴ふ。即ちこの壓力は方向によつてその強さが多少異なると見なければならぬ。(21) 式で與へられるのは n 方向の水壓の強さであつて, 平均流速よりも遅い流體塊では大體前面の水壓が大きく後面では小さくなり, 平均流速よりも速い流體塊では大體之が反對になる。勿論この傾向は常流でも考へられる事であるが, 常流では亂流状態にあれば速度分布が一様に近い爲に水壓の強さの方向性は全く問題にされてゐない。

尙 Lauffer によればポテンシャルエネルギー h_p は

$$h_p = z + \frac{p}{\rho g} = z + n \cos i = d \cos i \dots\dots\dots(22)$$

即ち全エネルギーは

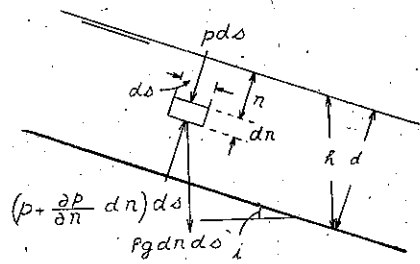
$$H = d \cos i + \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(23)$$

水平流の最大流量を $q_{or} = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} H \right)^{3/2}$ と書き, 之を (23) 式に代入すれば

$$\left(\frac{d}{H} \right)^3 \cos i + \left(\frac{d}{H} \right)^2 + \frac{4}{27} \left(\frac{q}{q_{or}} \right)^2 = 0 \dots\dots\dots(24)$$

但し q は水深 h に對する流量であつて, 之を最大ならしめる h 及び d を h_c 及び d_c と書けば, (24) 式から

圖-10.



15) Binnie, Hooker, The flow under gravity of an incompressible and inviscid fluid through a contraction in a horizontal channel. Proc. of Royal Society of London. vol. 159, no. 899. 1937.

16) Lauffer, Druck, Energie und Fließzustand in Gerinnen mit grossem Gefälle. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 1935 H 7.

$$\frac{d_c}{H} = \frac{2}{3} \frac{1}{\cos i}, \quad \frac{q_{\max}}{q_{gr}} = \frac{1}{\cos i} \quad \dots\dots\dots (25)$$

力積を I で表はせば

$$I = \rho g \left(\frac{d^2}{2} \cos i + \frac{1}{g} v^2 d \right)$$

水平流の場合の最小の力積 $J_{gr} = \rho g \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{2/3}$ 及びその時の水深 h_{gr} を代入すれば

$$\frac{I}{J_{gr}} = \frac{1}{3} \cos i \left(\frac{d}{h_{gr}} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{d}{h_{gr}} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (26)$$

従つて最小の力積は次の關係を持つ。

$$\frac{d I_{\min}}{h_{gr}} = \frac{1}{(\cos i)^{1/3}}, \quad \frac{I_{\min}}{J_{gr}} = (\cos i)^{1/3} \quad \dots\dots\dots (27)$$

そこで最小力積に對應する流量, 速度, d の値を夫々 q_c', v_c', d_c' とすれば

$$v_c' = \frac{q_c'}{d_c'} = \sqrt{g d_c' \cos i} \quad \dots\dots\dots (28)$$

従つて限界 Froude 數は

$$F_{rc} = \sqrt{\cos i}$$

となり, 勾配の點から言つても F_{rc} は 1 よりも小さくなる傾向がある。然しその影響は前に述べた流速分布の一様でない事の影響よりも一般に小さい。即ち $\sqrt{\cos i}$ の値は i が 1/10, 1/5 及び 1/3 に對して夫々 0.9975, 0.9900 及び 0.9722 である。

6. 射流の流體抵抗

射流に對する抵抗係數又は平均流速に關する資料は甚だ乏しい。Lane は Uncompahgre の灌溉地區で行つた實驗の結果から見て, Chézy の常數 c には常流の場合と同じ形を與へてよいと言つてゐる¹⁷⁾。この實驗がどの程度のものであるかは明かでないが, O'Brien 等がこの推定の理由として擧げてゐる所は¹⁸⁾、射流では速度が大きく亂れは充分發達してゐるから亂流の法則が當てはまるとするのである。

然し最近の Gegerow の實驗によると¹⁹⁾ Blasius の滑かな管に對する抵抗係數

$$\lambda_f = \frac{0.056}{Re^{1/4}}$$

を滑かな面の開水路に當てはめた時に, λ_f の値が Reynolds 數のみならず Frouds 數によつても多少變化する事が認められた。その状態は後に示す圖-13 及び圖-14 中の曲線で表はされて居り, $1 < F_r < 2$ の間では λ は F_r の値の増加と共に増加し, F_r が 2 を越せば λ の値が減少してゐる。即ち射流 ($F_r > 1$) になると抵抗法則は常流の場合とは違つて來る事になり, 従來言はれてゐた所とは一致しない。

そこで著者の私見としては Jegorow の實驗で $\lambda-Re$ 曲線又は $\lambda-F_r$ 曲線に途中で山が現れてゐるのは, 速度が或る大きさを越せば境界層の厚さが減じ, 従つてラミナ底層の厚さが減じて滑かな面と考へられてゐたものが最

17) O'Brien, Hickox, Applied Fluid Mechanics, p. 294.

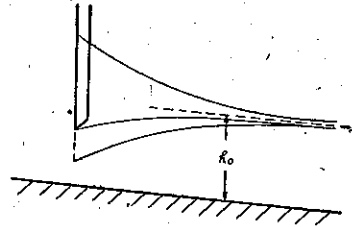
18) 17) と同じ。

19) S. A. Jegorow, Turbulente Überwellenströmung (Schiessen) im offenen Gerinne mit glatten Wänden. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 1940 H 3, S. 55.

早滑かとは見做されなくなり抵抗係数が大きくなるが、更に速度が増せば今度は流れの亂れが少なくなつて、又抵抗の減少を來すのではないかと考へる。この説明の前半は一般に認められてゐる所であつて後半が問題である。

そこでこの問題に就て今少しく資料を得る爲に著者は次の様な實驗を試みた²⁰⁾。即ち長さ 5 m, 幅 0.5 m の木製鉋削り仕上げの矩形断面水路に於て射流の抵抗を測るのに、短い開水路で導流状態を作り出す事は不可能であるから、圖-11 の様に上流端に水門扉を設けて、一定の流量を流してゐる間にその開きを幾通りかに變化させて各々の場合の水面縦斷形狀を測つた。之等の水面曲線は何れも導流水深に等しい水深線を漸近線とするから、共通漸近線を圖上で見出す事によつて等流水深を定めた。

圖-11.



又底面の粗度の影響を見る爲には底に金網 (20 番線約 1 cm 目) を一様に張つて同じ實驗を試みた。何れの場合にも水門の下流側に出来る停止波の爲に充分な精度を得る事が困難であつたが、特に金網のない場合は波が著しく現れた。我々の問題の場合は Boussinesq の理論²¹⁾ に従つて計算すれば未だ停止波の現れるに至らない範囲内にある事になるが、實驗に於て水面に現れた波はやはりこの停止波である様に見える。その波長は常に 1 m 前後であつた。

この様にして定めた導流水深を h_0 、底勾配を i 、徑深を R とすれば、抵抗係数 λ は

$$i = \frac{\lambda}{R} \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{h_0} \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{bh_0} \right)^2$$

の形を用ひる事により

$$\lambda = 2gi \times \frac{b^3 h_0^3}{Q^2} \dots \dots \dots (29)$$

Reynolds 數は

$$Re = \frac{vR}{\nu} = \frac{Q}{\nu} \frac{b h_0}{b h_0} = \frac{Q}{b \nu} \dots \dots \dots (30)$$

この表はし方を Blasius の公式

$$I = \lambda_b \frac{\rho \cdot v^2}{D} \frac{1}{2}, \quad \lambda_b = \frac{0.316}{(\nu D / \nu)^{1/4}}$$

に比較すれば $\lambda = 4\lambda_b$ であつて、又この λ の値は Jegorow の用ひた λ_j に等しい。尙 Froude 數は $\sqrt{\alpha'}$ を省略して

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh_0}} = \frac{Q}{bh_0 \sqrt{gh_0}} \dots \dots \dots (31)$$

$b = 50$ cm であるから、 Q 及び h_0 の測定値から λ , Re , Fr が計算出来る。但し ν の値は温度によつて變化するが、實驗が 4 月から 7 月に亘つて行はれたから平均値として 18°C の水温に對して計算した。圖-12 及び 圖-13 は夫々板面及び金網張の底を持つた水路に就て水面縦斷曲線を測つた結果の中から代表的なものだけを示したものであつて、金網張の場合も水深は底板の面から測つてある。圖中の點は各縦斷曲線に對應して測つた底での

20) 本實驗は日本學術振興會の補助によつて行つたものである。

21) Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes. p. 200.

圖-12.

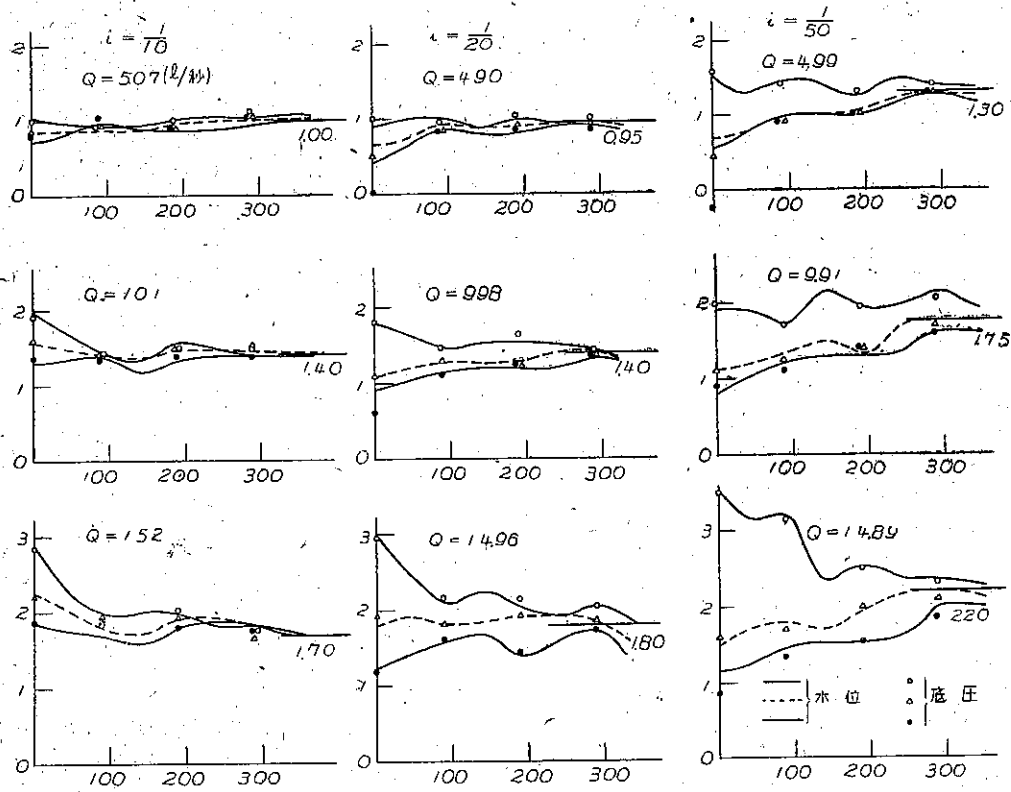


圖-13. a.

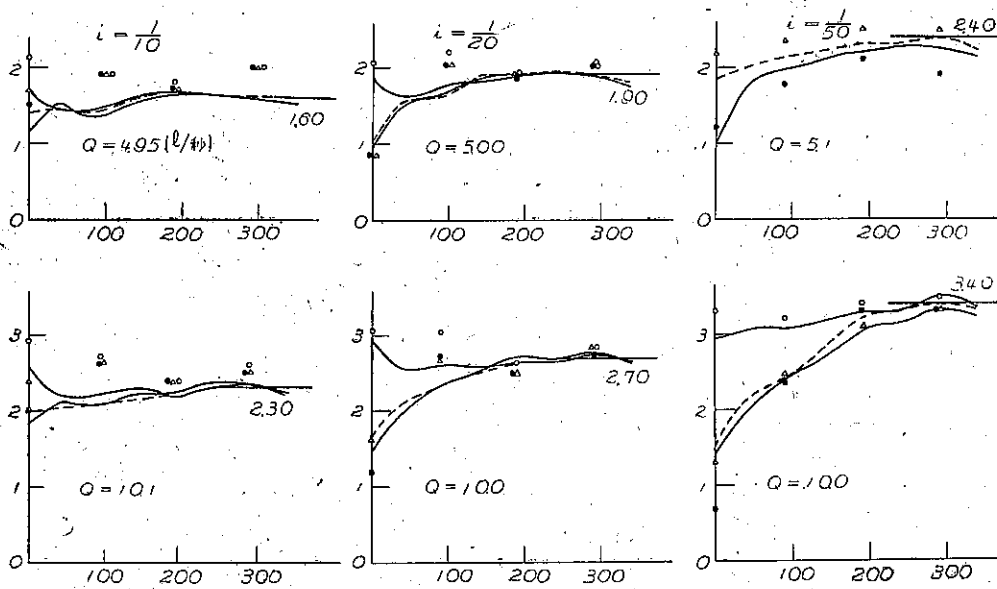


圖-13. b.

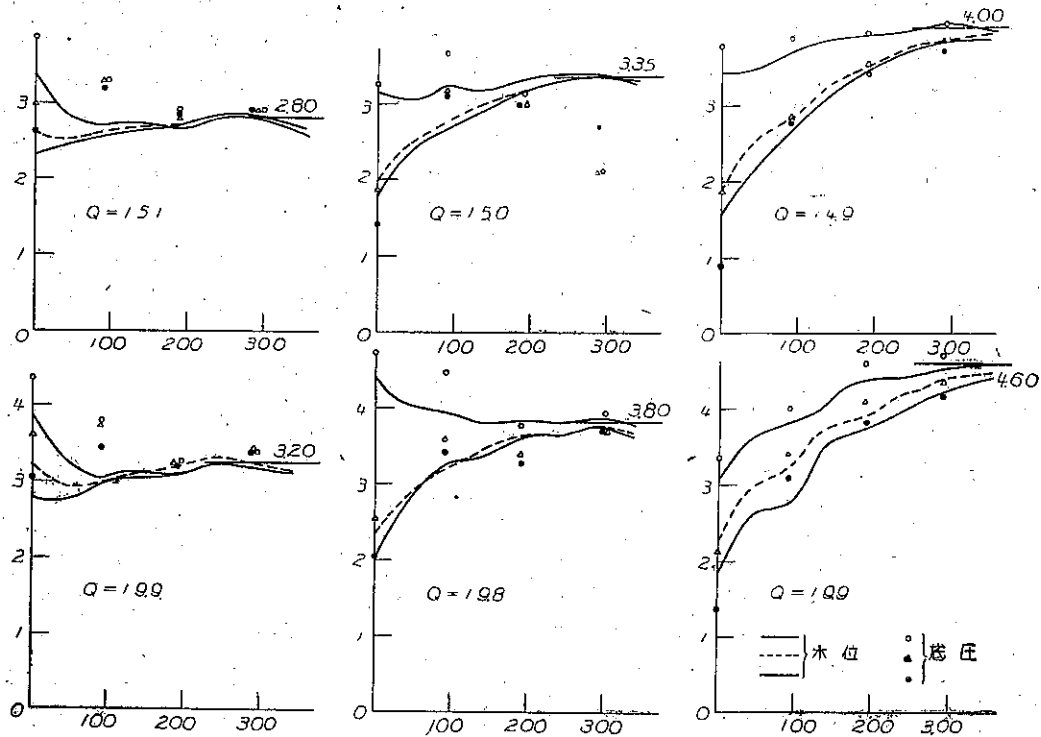


圖-14. R_c と λ の關係

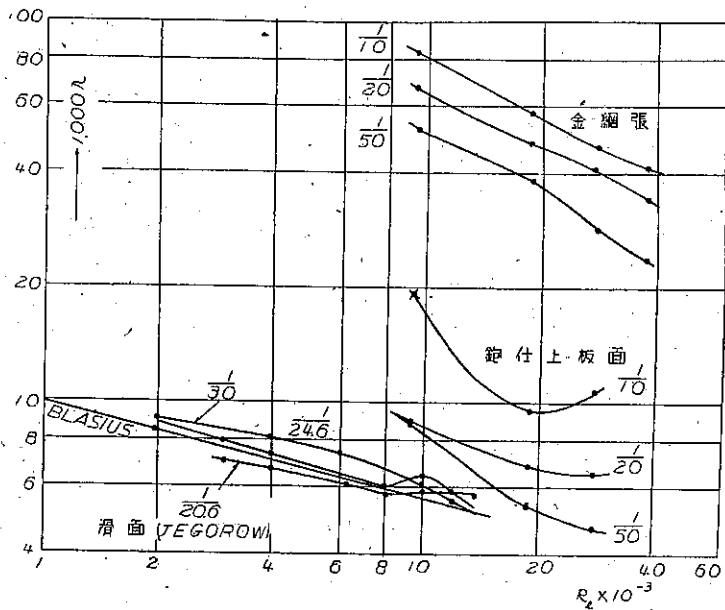
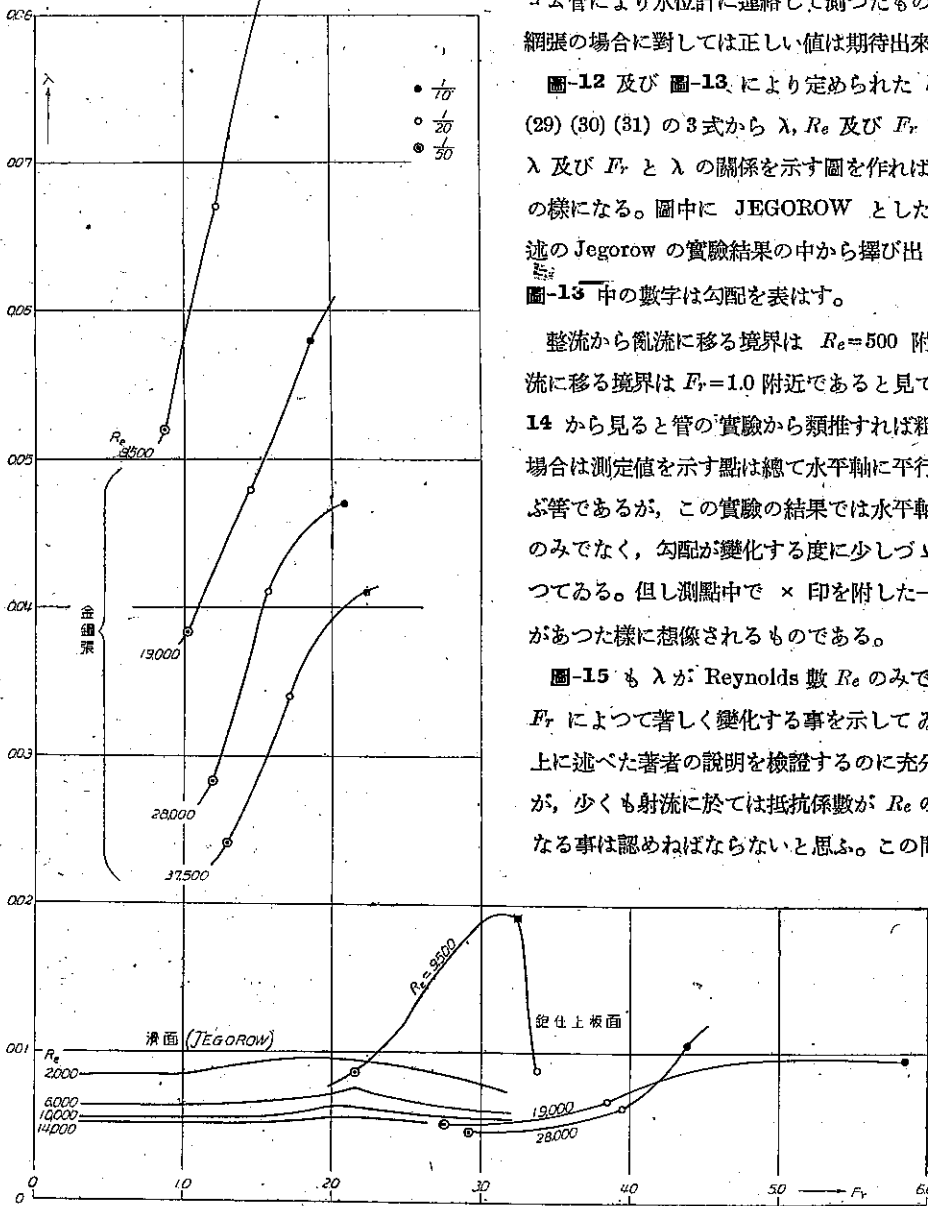


圖-15: F_r と λ の關係



水壓の強さである。この水壓の強さは底板に穿けた穴からゴム管により水位計に連絡して測つたものであるから、金網張の場合に對しては正しい値は期待出来ない。

圖-12 及び 圖-13 により定められた h_0 の値を用ひて (29) (30) (31) の3式から λ , Re 及び F_r を計算し, Re と λ 及び F_r と λ の關係を示す圖を作れば 圖-14 及び 15 の様になる。圖中に JEGOROW として一群の曲線は上述の Jegerow の實驗結果の中から擇び出したものであり, 圖-13 中の數字は勾配を表はす。

整流から亂流に移る境界は $Re=500$ 附近, 射流から常流に移る境界は $F_r=1.0$ 附近であると見てよい。先づ 圖-14 から見ると管の實驗から類推すれば粗度の同じ亂流の場合は測定値を示す點は總て水平軸に平行な一直線上に並ぶ筈であるが, この實驗の結果では水平軸に平行にならぬのみでなく, 勾配が變化する度に少しづつ違つた曲線になつてゐる。但し測點中で \times 印を附した一點は測定に誤差があつた様に想像されるものである。

圖-15 も λ が Reynolds 數 Re のみでなく Froude 數 F_r によつて著しく變化する事を示してゐる。之だけでは上に述べた著者の説明を検證するのに充分なものではないが, 少くも射流に於ては抵抗係數が Re のみの函數でなくなる事は認めねばならないと思ふ。この問題を更に詳細に

論じ様とすれば, 今一段精密で數の多い實驗を行ふ必要がある。此處に示した 實驗結果から推論出来る事としては次の様な程度であらう。

1. λ の値は Reynolds 數の増加と共に減少する傾向がある。
2. Reynolds 數が一定ならば λ の値は Froude 數が 1 を超えてから或る値までは増加する。それからは減少するか否かはこの結果だけでは明かでない。

之等の結果から直ちに分る事は、射流の場合に Ganguillet-Kutter や Manning 等の平均流速公式がそのまま適用出来ない事である。勿論 Kutter や Manning の公式でも λ の値は Froude 數に無關係ではない。例へば Manning の公式に就て考へれば

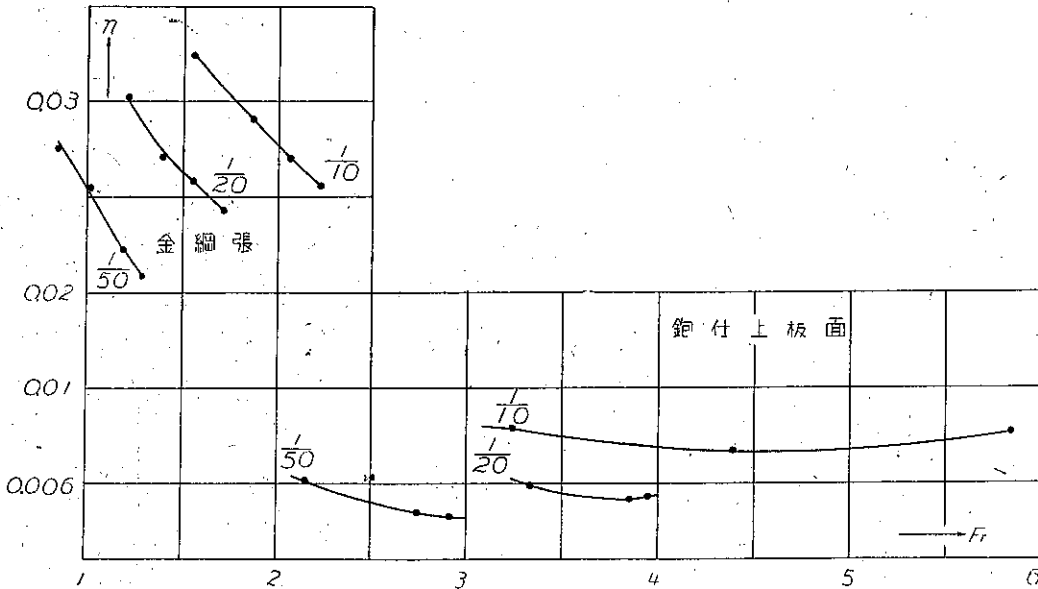
$$v = \frac{1}{n} h^{2/3} i^{1/2} \quad \therefore \frac{2g}{\lambda} = \frac{h^{1/3}}{n^2} \quad \dots\dots(32)$$

Froude 數は $F_r = Q/(bh\sqrt{gh})$ で表はされるから、之と (32) から h を消去すれば λ が Q 及び F_r の函數として表はされる。然しこの關係が満足されてゐるか否かを檢するには上の實驗値を Manning の公式の變形された

$$n = \frac{1}{Q} b h_0^{5/2} i^{1/2} \quad \dots\dots(33)$$

に代入して、之から求められた n の値が定つた壁面材料に對して一定値を保つてゐるか否かを檢すればよい。之を計算した結果 圖-16 の様になつた。即ち 2 種の壁面材料に對して何れも n の値は一定になつてゐない。殊に面の粗い場合にはその變化が著しい事が見られる。

圖-16. n と F_r の關係



概観すれば n の値は勾配が大きい程大きくなり、勾配 i が一定ならば、Froude 數の増加に伴つて n の値は減少する様に見えるが、この事は更に F_r を増加すれば何うなるか明かには言へない。將來更に數多くの實驗や實測を行つて射流に對する平均流速公式が作られる必要がある事だけは明かである。

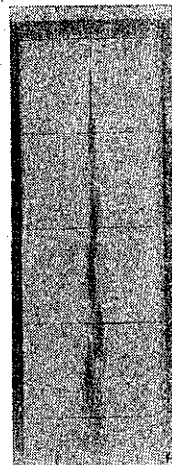
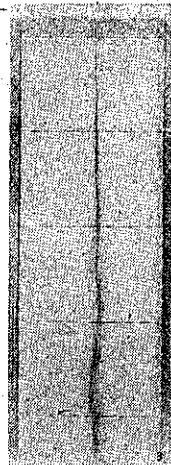
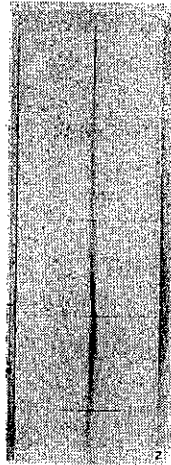
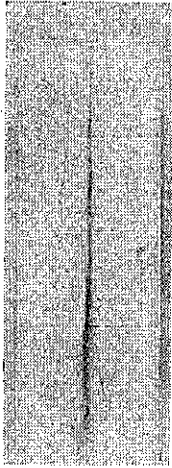
7. 射流の亂れに就て

圖-14 から見ると抵抗係數 λ の値が Reynolds 數の増加に伴つて減少するのが見られる。粗面を持つた管に就ての Nikuradse の實驗等から類推すればこの値は R_0 に無關係になる筈であるからその理由は一應考へられねばならない。そこで前にも述べた様に射流に於ては何等かの原因によつて Reynolds 數が大きくなれば亂れの

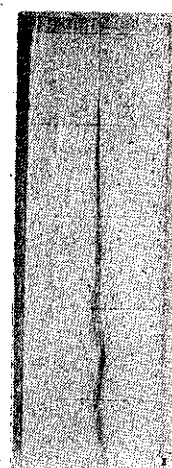
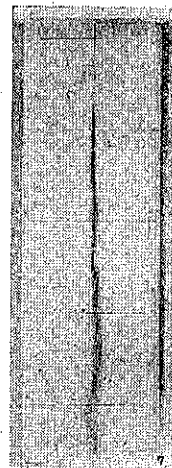
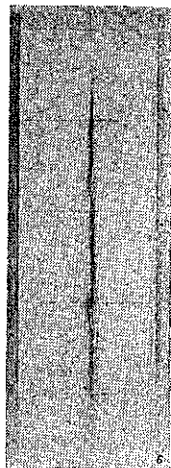
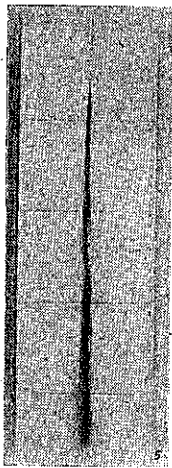
程度が少くなるのではないかと考へた。この臆説の當否を見る爲に次の様な實驗を試みた。

それは幅 30 cm, 長さ約 2 m の木製矩形水路の内面を滑かに仕上げ、表面に白ペンキを塗つて之に水を流した。勾配は $1/8.5$ 及び $1/25$ の 2 種, 流量は 5, 10, 15 及び 20 l/秒 の 4 種であつて, 正確な等流状態は期待出来ないから水路延長の中間部でほぼ等流と見做し得る部分を取つた。

寫眞-1. $i = \frac{1}{8.5}, Q = 50$ 寫眞-2. $i = \frac{1}{8.5}, Q = 10$ 寫眞-3. $i = \frac{1}{8.5}, Q = 15$ 寫眞-4. $i = \frac{1}{8.5}, Q = 20$
 $Q = 5, h_0 = 1.10, i = 1/8.5$ $Q = 10, h_0 = 1.91$ $Q = 15, h_0 = 2.58$ $Q = 20, h_0 = 3.55$
 $v = 151.5$ $i = 1/8.5, v = 174.5$ $i = 1/8.5, v = 194.0$ $i = 1/8.5, v = 187.7$
 $Re = 15700, Fr = 4.60$ $Re = 31400, Fr = 4.04$ $Re = 47200, Fr = 3.86$ $Re = 62900, Fr = 3.19$



寫眞-5. $i = \frac{1}{25}, Q = 5$ 寫眞-6. $i = \frac{1}{25}, Q = 10$ 寫眞-7. $i = \frac{1}{25}, Q = 15$ 寫眞-8. $i = \frac{1}{25}, Q = 20$
 $Q = 5, h_0 = 1.71$ $Q = 10, h_0 = 2.72$ $Q = 15, h_0 = 3.73$ $Q = 20, h_0 = 4.78$
 $i = 1/25, v = 97.5$ $i = 1/25, v = 122.5$ $i = 1/25, v = 134.0$ $i = 1/25, v = 139.5$
 $Re = 15700, Fr = 4.77$ $Re = 31400, Fr = 2.85$ $Re = 47200, Fr = 2.19$ $Re = 62900, Fr = 2.04$



水面の或る點に於て水面に切する方向に着色液を水流に近い速度を以て流出させ、その擴散の状態を寫眞に撮影した。寫眞-1~8 はその結果を示すものであつて、單位は Q は l/秒, v は cm/秒, h_0 は cm, 寫眞中の横線

は水路底に 20 cm 間隔に引いた平行線である。従つて之等の寫眞は水面附近の擴散状態を示すものである。

之等の寫眞を觀察すると着色流線は小規模の擴散によつて幅が擴がつて行くと共に、大きい流體塊の横方向の移動によつて攪亂されるのが見られ、前者は主として表面に起つてゐる小さい波によつて誘發されてゐる事が觀察される。事實、管内の流れに就て實驗した結果を見ると²²⁾、亂流は後者による攪亂から起つてゐる事がわかる。

寫眞-1 及び寫眞-5 等の様に Froude 數の高い場合、即ち高度の射流状態にある場合は亂れがあまり發達しない事が見られ、又寫眞-2 と 6, 3 と 7, 4 と 8 を夫々比較すれば同じ Reynolds 數に對しては Froude 數の高い場合に亂れが少くなるか否かは十分に明かではないが、常流状態ではこの様な着色流線は殆んどその形を保つ事が出来ない事を考へれば、射流では亂れがかなり少い事は認められる。

混合距離 l を流體分子の平均速度 \bar{u} 、之と垂直方向に y を取つた時に

$$l = \kappa \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \dots\dots\dots (34)$$

の形で表はす事が出来るものとすれば、速度分布曲線が常流と射流を通じてほぼ相似形を保つならば、 l の大きさは同じ程度の大きさを保つてゐる筈である。従つてこの問題に就ては亂れに關して更に多くの實驗を要すると共に、速度分布に關しても相當精密な實驗を要すると思ふ。

要するに現在までの實驗では射流に於ては Froude 數の増加と共に亂れが減少するであらうと言ふ推測を説明するのには不満足であつた。然しその結果は否定的ではないから今後更に方法を更めて實驗を進めて行き度いと思つてゐる。

22) 例へば H. Rouse, Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers. 卷頭の寫眞