論 說 報 告

第28卷 第3號 昭和17年2月

1 直徑の方向に壓縮點荷重を受ける厚肉中空圓筒の應力

正會員 村 上 正*

梗概 1 直徑の方向に壓縮される厚肉中空圓筒，例へば，中空ローラーの如きものを見るに，一般に荷重は1點に集中して働らくものではなくて，圓筒の周上，若干の幅の上に分布して居ると考ふべきものである。然しながら，その應力解析を試みる場合には，荷重の分布を無視し，之を點荷重と見做して處理することもできる譯で，本文は斯様な場合の一つの解法である。

1. 緒 言

筆者は，曩に，厚肉中空圓筒が，1 直徑の方向に壓縮される場合を取扱つて，その應力を求めることができた[1]。その要領は，現象を平面應力の問題と見做し，二次元彈性體の應力に關する横田博士の一般方程式を出發點とし，その中に含まれる任意函數を，境界條件に合致する様に決めたのである。この場合に，問題を處理する便宜上，荷重に關して次の様な假定を設けた。卽ち，

荷重は，圓筒の外周に於ける或る幅の弧上に一様な强度を以て，放射狀に分布して働らく。

今，この假定に於いて，荷重の擴がりの幅が極めて小さいとする時は，得られる結果は，點荷重の狀態に對して適用できるであらう。以下示す所は，この見地の下に試みた應力解析である。

2. 記號について

本文に於て使用する種々の記號について先づ說明を行ふと，

α, β: 問題を處理する上に用ふる直交曲線座標で，直交座標 (x, y) との關係は次式によつて與へられる。

$$Z=ae^{-w}$$

但し，$Z=x+iy$, $w=\alpha+i\beta$ である。この式の虛實を分離すれば

$$x=ae^{-\alpha}\cos\beta,\quad y=-ae^{-\alpha}\sin\beta$$

α, β と極座標 (r, θ) との關係を求めれば，

$$r=ae^{-\alpha},\quad \theta=-\beta$$

αー曲線は原點を中心とする圓周を表はし，その中，$\alpha=0$, $\alpha=\infty$ は夫々，半徑 a なる圓周（圓筒の外周）及び座標原點（圓筒の中心）を示してゐる。α の一つの値に對して一つの圓周が對應するから，$\alpha=\alpha_1$ によつて半徑 a_1 なる圓周（圓筒の內周）を表はすものとする。

又，βー曲線は原點から放射する直線を表はし，その中，$\beta=0$, $\beta=-\pi/2$ は夫々，x 軸の正方向及び y 軸の正方向を示す。角 β は θ とは反對に，卽ち，時計様に測る時を正とする。

σ_α: 任意點 (α, β) に於て，αー曲線へ引いた法線方向に作用する垂直應力 (radial stress).

---

* 九州帝國大學助教授

1) 土木學會誌，第 27 卷，第 9 號

σ_β: 同じ點に於て，βー曲線へ引いた法線方向に作用する垂直應力 (tangential stress)

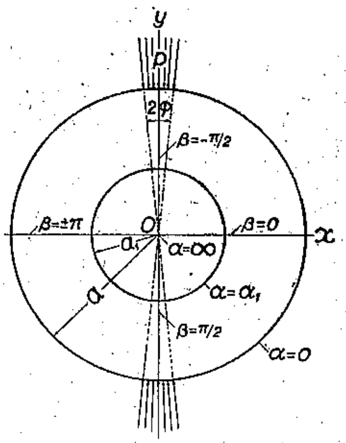
$\tau_{\alpha\beta}$: 同じ點に於ける剪斷應力

2φ: 荷重が分布荷重として働らくと考へた場合に，荷重の存在してゐる部分の弧が中心に於てなす角，以後，之を“接觸角”と呼ぶ

p: 荷重の强度

圖-1 は以上に關する說明圖である。但し，圓筒は y 軸の方向に壓縮されるものとする

圖-1.



3. 分布荷重による應力

厚肉中空圓筒が 1 直徑の方向に壓縮される場合に，之を平面應力の問題と考へ，二次元彈性體に關する横田氏方程式をもとゝして導いた應力の式は次の通りである。但し荷重は圓筒の外周上 $2\varphi a$ なる弧上に分布して居るものと假定する。

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha=-\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}+2ne^{\alpha}H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L_2+\Re(L_1)\}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=-\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L_2-\Re(L_1)\}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}=-2e^{\alpha}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}K_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\sin 2n\beta-\frac{1}{2}\Im(L_1)\quad\cdots\cdots(3)$$

但し，$0<\alpha\leqq\alpha_1$ で，m は計算の際要求される精度から決めらるべき項數である。以上の各式に用ひた記號は夫々，次の如きものである。

$$\left.\begin{aligned}
F_{2n}&=2ne^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\sinh 2n\alpha-\sinh 2n\alpha_1\sinh 2n(\alpha_1-\alpha)\\
H_{2n}&=2n\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\cosh 2n\alpha-\sinh\alpha\sinh 2n\alpha_1\cosh 2n(\alpha_1-\alpha)\\
K_{2n}&=2n\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\sinh 2n\alpha+\sinh\alpha\sinh 2n\alpha_1\sinh 2n(\alpha_1-\alpha)\\
G_{2n}&=\sinh^2 2n\alpha_1-4n^2\sinh^2\alpha_1\\
\mu_{2n}&=1-4e^{-4n\alpha_1}G_{2n}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Re(L_1)=&-\xi_1\{[R_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}\\
&+\xi_2\{[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}+[R_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}\\
\Im(L_1)=&\ \xi_1\{[Q_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[Q_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}\\
&-\xi_2\{[Q_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[Q_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}-[Q_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}+[Q_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}\\
L_2=&-\xi_2\{[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-[R_3]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}+[R_3]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}+[R_3]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_3]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}\\
&\xi_1=8c^{\alpha}\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\sinh 4\alpha_1\\
&\xi_2=2c^{\alpha}\sinh\alpha\\
&\xi_3=4c^{\alpha_1}\sinh\alpha_1
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&Q_1=\frac{1}{N_1}\{\cosh 4\alpha_1\sinh 4u+(\cosh^2 4\alpha_1+\cosh^2 2u+\sin^2 2v)\sinh 2u\cos 2v\}\\
&Q_2=\frac{1}{N_2}\{e^{-4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+(e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\cosh 2u\cos 2v\\
&\quad+\cosh^2 2u-\sin^2 2v\}\\
&R_1=\frac{1}{N_1}\{\cosh 4\alpha_1\sin 4v+(\cosh^2 4\alpha_1-\sinh^2 2u+\cos^2 2v)\cosh 2u\sin 2v\}\\
&R_2=\frac{1}{N_2}\sinh 4\alpha_1\sinh 2u\sin 2v\\
&R_3=\tan^{-1}\frac{2e^{4\alpha_1}\cosh 2u\sin 2v+\sin 4v}{e^{8\alpha_1}+2e^{4\alpha_1}\cosh 2u\cos 2v+\cos 4v}\\
&N_1=N_2^2\\
&N_2=(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2u\cos 2v)^2+\sinh^2 2u\sin^2 2v
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)
$$

4. 點荷重への誘導

(1)～(3) 式を基として，點荷重の狀態に適用すべき式を導くために，次の樣な變形を試みる。

接觸角 2φ が小さいときは，

$$\sin 2\varphi=2\varphi,\qquad \cos 2\varphi=1$$

と置いて差支ない。この關係を先づ (6) 式へ入れて φ^2 以上の項を省略するときは，次の結果を得る。

$$
\left.\begin{aligned}
&[Q_1]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}=(C_1\mp 2\varphi D_1)/(A_1\mp 8\varphi B_1)\\
&[Q_2]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}=(C_2\mp 2\varphi D_2)/(A_2\mp 4\varphi B_2)\\
&[R_1]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}=(E_1\pm 2\varphi F_1)/(A_1\mp 8\varphi B_1)\\
&[R_2]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}=(E_2\pm 2\varphi F_2)/(A_2\mp 4\varphi B_2)\\
&[R_3]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}=\tan^{-1}\frac{E_3\pm 4\varphi F_3}{A_3\mp 4\varphi B_3}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)
$$

但し，$[Q]_{\substack{u\\\beta\pm\varphi}}$ 等は，Q_1 等の式に於て，u はそのまゝとし，$v=\beta\pm\varphi$ と置いたものなることを示す。又，右邊の記號については，

$$
\left.\begin{aligned}
&A_1=A_2^2,\quad B_1=A_2B_2\\
&A_2=(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2u\cos 2\beta)^2+\sinh^2 2u\sin^2 2\beta\\
&B_2=(\cosh 4\alpha_1\cosh 2u+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\
&A_3=e^{8\alpha_1}+2e^{4\alpha_1}\cosh 2u\cos 2\beta+\cos 4\beta\\
&B_3=(e^{4\alpha_1}\operatorname{coh} 2u+2\cos 2\beta)\sin 2\beta\\
&C_1=\cosh 4\alpha_1\sinh 4u+(\cosh^2 4\alpha_1+\cosh^2 2u+\sin^2 2\beta)\sinh 2u\cos 2\beta
\end{aligned}\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned}
D_1&=(\sinh^2 4\alpha_1+\sinh^2 2u+3\sin^2 2\beta)\sinh 2u\sin 2\beta\\
C_2&=e^{-4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+(e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\cosh 2u\cos 2\beta+\cosh^2 2u-\sin^2 2\beta\\
D_2&=(e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\cosh 2u\sin 2\beta+\sin 4\beta\\
E_1&=\cosh 4\alpha_1\sin 4\beta+(\cosh^2 4\alpha_1-\sinh^2 2u+\cos^2 2\beta)\cosh 2u\sin 2\beta\\
F_1&=2\cosh 4\alpha_1\cos 4\beta+(\sinh^2 4\alpha_1-\cosh^2 2u+3\cos^2 2\beta)\cosh 2u\cos 2\beta\\
E_2&=\sinh 4\alpha_1\sinh 2u\sin 2\beta\\
F_2&=\sinh 4\alpha_1\sinh 2u\cos 2\beta\\
E_3&=2(e^{4\alpha_1}\cosh 2u+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\
F_3&=e^{4\alpha_1}\cosh 2u\cos 2\beta+\cos 4\beta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(7) 式を (5) 式へ入れて，L_1, L_2 の代りに L_1', L_2' と書けば，

$$\left.\begin{aligned}
\Re(L_1')=&-\xi_1\left\{\frac{E_{1,\alpha}+2\varphi F_{1,\alpha}}{A_{1,\alpha}-8\varphi B_{1,\alpha}}-\frac{E_{1,\alpha}-2\varphi F_{1,\alpha}}{A_{1,\alpha}+8\varphi B_{1,\alpha}}\right\}\\
&+\xi_2\left\{\frac{E_{2,\alpha}+2\varphi F_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}-4\varphi B_{2,\alpha}}-\frac{E_{2,\alpha}-2\varphi F_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}+4\varphi B_{2,\alpha}}\right.\\
&\left.+\frac{E_{2,2\alpha_1-\alpha}+2\varphi F_{2,2\alpha_1-\alpha}}{A_{2,2\alpha_1-\alpha}-4\varphi B_{2,2\alpha_1-\alpha}}-\frac{E_{2,2\alpha_1-\alpha}-2\varphi F_{2,2\alpha_1-\alpha}}{A_{2,2\alpha_1-\alpha}+4\varphi B_{2,2\alpha_1-\alpha}}\right\}\\
\Im(L_1')=&\xi_1\left\{\frac{C_{1,\alpha}-2\varphi D_{1,\alpha}}{A_{1,\alpha}-8\varphi B_{1,\alpha}}-\frac{C_{1,\alpha}+2\varphi D_{1,\alpha}}{A_{1,\alpha}+8\varphi B_{1,\alpha}}\right\}\\
&-\xi_2\left\{\frac{C_{2,\alpha}-2\varphi D_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}-4\varphi B_{2,\alpha}}-\frac{C_{2,\alpha}+2\varphi D_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}+4\varphi B_{2,\alpha}}\right.\\
&\left.-\frac{C_{2,2\alpha_1-\alpha}-2\varphi D_{2,2\alpha_1-\alpha}}{A_{2,2\alpha_1-\alpha}-4\varphi B_{2,2\alpha_1-\alpha}}+\frac{C_{2,2\alpha_1-\alpha}+2\varphi D_{2,2\alpha_1-\alpha}}{A_{2,2\alpha_1-\alpha}+4\varphi B_{2,2\alpha_1-\alpha}}\right\}\\
L_2'=&-\xi_3\left\{\frac{E_{2,\alpha}+2\varphi F_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}-4\varphi B_{2,\alpha}}-\frac{E_{2,\alpha}-2\varphi F_{2,\alpha}}{A_{2,\alpha}+4\varphi B_{2,\alpha}}\right\}\\
&-\tan^{-1}\frac{E_{3,\alpha}+4\varphi F_{3,\alpha}}{A_{3,\alpha}-4\varphi B_{3,\alpha}}+\tan^{-1}\frac{E_{3,\alpha}-4\varphi F_{3,\alpha}}{A_{3,\alpha}+4\varphi B_{3,\alpha}}\\
&+\tan^{-1}\frac{E_{3,2\alpha_1-\alpha}+4\varphi F_{3,2\alpha_1-\alpha}}{A_{3,2\alpha_1-\alpha}-4\varphi B_{3,2\alpha_1-\alpha}}-\tan^{-1}\frac{E_{3,2\alpha_1-\alpha}-4\varphi F_{3,2\alpha_1-\alpha}}{A_{3,2\alpha_1-\alpha}+4\varphi B_{3,2\alpha_1-\alpha}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

こゝに，$A_{1,\alpha}$ 等の意味は，(8) 式の A_1 等に $u=\alpha$ 等を代入したものなることを示す。

(1), (2), 及び (3) 式の L_1, L_2 を夫々此處に得た L_1', L_2' で置きかへると，

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha=&-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\\
&+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}+2ne^\alpha H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L_2'+\Re(L_1')\}
\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=&-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)\\
&+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}-2ne^\alpha H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L_2'-\Re(L_1')\}
\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}=-2e^\alpha\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}K_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\sin 2n\beta-\frac{1}{2}\Im(L_1')\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

若し，m を大きく取る必要がない場合には，

$$\sin 2n\varphi = 2n\varphi$$

と置いて，(10), (11), 及び (12) 式の代りに，夫々次式によつて計算して差支ない。

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha = -\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1 \sinh(\alpha_1-\alpha)$$
$$+2\varphi\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}}{G_{2n}}(F_{2n}+2ne^\alpha H_{2n})\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L_2'+\Re(L_1')\} \quad\cdots\cdots(10\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta = -\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1 \cosh(\alpha_1-\alpha)$$
$$+2\varphi\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}}{G_{2n}}(F_{2n}-2ne^\alpha H_{2n})\cos 2n\beta+\frac{1}{2}\{L'_2-\Re(L_1')\} \quad\cdots\cdots(11\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta} = -4e^\alpha\varphi\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{n\mu_{2n}K_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\beta-\frac{1}{2}\Im(L'_1) \quad\cdots\cdots(12\,\mathrm{a})$$

今，荷重の全量を P, 圓筒の長さを b とすると，

$$P=2\varphi abp$$

依つて，(10)～(12) 式或は，(10 a)～(12 a) 式に於て，

$$\varphi=P/2abp$$

を代入するときは，φ なる因子が消えて，玆に目的の解式が得られる譯である。

(9) 式に於て，$\alpha=\alpha_1$ と置けば，

$$\Re(L'_1)=-L_2$$

$$\Im(L'_1)=0$$

を得る。從つて (10) 及び (12) 式より

$$[\sigma_\alpha]_{\alpha=\alpha_1}=0,\quad [\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=\alpha_1}=0$$

卽ち，內周に於ける境界條件は確かに滿足されてゐる。

5. 外周に於ける應力

既に記した通り，(10), (11) 及び (12) 式に於ける α の變域は $0<\alpha\leqq\alpha_1$ である。本節に於ては，$\alpha=0$ 卽ち外周に於て之等の式が如何なる値を示すかを考へようと思ふ。

(9) 式の取扱ひを便利にするために，

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1&=\frac{E_1+2\varphi F_1}{A_1-8\varphi B_1}-\frac{E_1-2\varphi F_1}{A_1+8\varphi B_1}=\frac{4\varphi}{A_2^3}(A_2F_1+4B_2E_1)\\
\Phi_2&=\frac{E_2+2\varphi F_2}{A_2-4\varphi B_2}-\frac{E_2-2\varphi F_2}{A_2+4\varphi B_2}=\frac{4\varphi}{A_2^2}(A_2F_2+4B_2E_2)\\
\Phi_3&=\frac{C_1-2\varphi D_1}{A_1-8\varphi B_1}-\frac{C_1+2\varphi D_1}{A_1+8\varphi B_1}=\frac{4\varphi}{A_2^3}(4B_2C_1-A_2D_1)\\
\Phi_4&=\frac{C_2-2\varphi D_2}{A_2-4\varphi B_2}-\frac{C_2+2\varphi D_2}{A_2+4\varphi B_2}=\frac{4\varphi}{A_2^2}(2B_2C_2-A_2D_2)\\
\Phi_5&=\tan^{-1}\frac{E_3+4\varphi F_3}{A_3-4\varphi B_3}-\tan^{-1}\frac{E_3-4\varphi F_3}{A_3+4\varphi B_3}=\tan^{-1}8\varphi\frac{A_3F_3+B_3E_3}{A_3^2+E_3^2}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

と置く。但し，上式を作るに當つて φ^2 を含む項を省略してゐる。(13) 式を (9) 式に入れゝば，

$$\left.\begin{aligned}\Re(L_1') &= -\xi_1[\Phi_1]_{u=\alpha}+\xi_2[\Phi_2]_{u=\alpha}+\xi_2[\Phi_2]_{u=2\alpha_1-\alpha}\\ \Im(L_1') &= -\xi_1[\Phi_3]_{u=\alpha}-\xi_2[\Phi_4]_{u=\alpha}+\xi_2[\Phi_4]_{u=2\alpha_1-\alpha}\\ L_2' &= -\xi_3[\Phi_2]_{u=\alpha}-[\Phi_5]_{u=\alpha}+[\Phi_5]_{u=2\alpha_1-\alpha}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

さて，(8) 式より，$u\to0$ の時は，

$$\left.\begin{aligned}A_2 &= (\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)^2\\ B_2 &= (\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ A_3 &= (e^{4\alpha_1}+\cos 2\beta)^2-\sin^2 2\beta\\ B_3 &= (e^{4\alpha_1}+2\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ C_2 &= (e^{-4\alpha_1}+\cos 2\beta)(\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\\ D_2 &= (e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\sin 2\beta+\sin 4\beta\\ E_1 &= (\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)^2\sin 2\beta\\ F_1 &= (\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\{(\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\cos 2\beta\\ &\quad -2\sin^2 2\beta\}\\ E_3 &= 2(e^{4\alpha_1}+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ F_3 &= (e^{4\alpha_1}+\cos 2\beta)\cos 2\beta-\sin^2 2\beta\\ C_1 &= D_1=E_2=F_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

又，$u\to2\alpha_1$ の場合には，

$$\left.\begin{aligned}A_2 &= (1+\cos 2\beta)(2\cosh^2 4\alpha_1-1+\cos 2\beta)\\ B_2 &= (\cosh^2 4\alpha_1+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ A_3 &= e^{8\alpha_1}+2e^{4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1\cos 2\beta+\cos 4\beta\\ B_3 &= e^{4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+2\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ C_2 &= (1+\cos 2\beta)(e^{-4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+\sinh^2 4\alpha_1+\cos 2\beta)\\ D_2 &= (e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\cosh 4\alpha_1\sin 2\beta+\sin 4\beta\\ E_2 &= \sinh^2 4\alpha_1\sin 2\beta\\ F_2 &= \sinh^2 4\alpha_1\cos 2\beta\\ E_3 &= 2(e^{4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\sin 2\beta\\ F_3 &= e^{4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1\cos 2\beta+\cos 4\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

先づ $\Im(L_1')$ について考へるに，(15) 及び (16) 式を用ひて計算すると，

$$[\Phi_3]_{u\to0}=0$$

$$[\Phi_4]_{u\to0}=-4\varphi\sinh 4\alpha_1\sin 2\beta/(\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)^2$$

$$[\Phi_4]_{u\to2\alpha_1}=-4\varphi\sinh 4\alpha_1\cosh 4\alpha_1\sin 2\beta/(2\cosh^2 4\alpha_1-1+\cos 2\beta)^2$$

而して，$\alpha\to0$ の時 $\xi_1\to0$ であるから，β の如何に關せず

$$\lim_{\alpha\to0}\Im(L_1')=0$$

となる。從つて，$\tau_{\alpha\beta}$ の (12) 式は常に外周に於ける境界條件を滿足して居ることが知られる。

次に，$\Re(L_1')$ 及び L_2' について考ふるに，(15) 及び (16) 式を用ひて，

$$[\Phi_1]_{u\to 0}=4\varphi\frac{(\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)\cos 2\beta+2\sin^2 2\beta}{(\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta)^3}$$

$$[\Phi_2]_{u\to 0}=0$$

$$[\Phi_2]_{u\to 2\alpha_1}=4\varphi\sinh^2 4\alpha_1\frac{2\cosh^2 4\alpha_1+\cos 2\beta-\cos^2 2\beta}{(1+\cos 2\beta)(2\cosh^2 4\alpha_1-1+\cos 2\beta)^2}$$

$$[\Phi_5]_{u\to 0}=4\varphi\frac{e^{-4\alpha_1}+\cos 2\beta}{\cosh 4\alpha_1+\cos 2\beta}$$

$$[\Phi_5]_{u\to 2\alpha_1}=4\varphi\frac{e^{-4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+\sinh^2 4\alpha_1+\cos 2\beta}{\cosh^2 4\alpha_1+\sinh^2 4\alpha_1+\cos 2\beta}$$

を得る。但し，φ が小さいから $\tan^{-1}$ なる運算記號は省略した。これで見ると，$\alpha\to 0$ なるとき，$\xi_2[\Phi_2]_{u=2\alpha_1}$ の値は $\beta\neq\pi/2$ の部分では 0 となり，$\beta=\pi/2$ に於て 0/0 の不定形を示す。即ち，$\beta=\pi/2$（荷重の作用點）を除いては，

$$\lim_{\alpha\to 0}\{L_2'+\Re(L_1')\}=-8\sinh^2\alpha_1\sinh 4\alpha_1[\Phi_1]_{u=0}-[\Phi_5]_{u=0}+[\Phi_5]_{u=2\alpha_1}$$

これを (10) 式へ入れると，m が大なる時には，$[\sigma_\alpha]_{\alpha=0}=0$ となる。即ち，σ_α の (10) 式は荷重の作用點を除いては外周に於ける境界條件を滿足してゐる。

$\beta=\pi/2$ の場合については後に述べる。

6. σ_β の式の吟味

tangential stress σ_β に對しては別に境界條件は與へられてゐないけれども，その解式の適否は，x 軸（$\beta=0$）に依る切口の斷面に働らく σ_β の合成力 V と；荷重 P との釣合の條件から之を檢することができる。

今，(11) 式に於て $\beta=0$ と置くと，

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\beta=0}=&-\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)\\&+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi+\frac{1}{2}[L_2'-\Re(L_1')]_{\beta=0}\\=&-\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\\&-4\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{e^{-4n\alpha_1}}{n}(F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n})\sin 2n\varphi+\frac{1}{2}[L_2'-\Re(L_1')]_{\beta=0}\end{aligned}$$

こゝに於て，m を大きく取り，φ が小さいことを考慮しつゝ計算すれば，上式の第 3 項と第 4 項とは互に消し合つて 0 となり結局次の樣になる。

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\beta=0}=-\varphi^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi$$

故に，

$$\begin{aligned}V=b\int_a^{a_1}[\sigma_\beta]_{\beta=0}dr&=-ab\int_0^{\alpha_1}[\sigma_\beta]_{\beta=0}\,e^{-\alpha}d\alpha\\&=-abp\sin\varphi\\&=-abp\varphi\\&=-P/2\end{aligned}$$

即ち，(11) 式は不都合のないものと云つてよい。

最に，外徑が內徑の 2 倍 ($a=2a_1$)，接觸角 $2\varphi=0.05$ radian の場合に，$\beta=52°11'40''$ の斷面に於て，一樣な

tangential stress が働らいてゐることが知られたのであるが，點荷重を假定した結果，この斷面の位置がどう變るかを，前と同じ寸法の圓筒について計算して見ると，その結果は，

$$\beta=52^\circ 11'40'',\quad \sigma_\beta=-1.805\,P/\pi ab$$

であつて，全くその位置に變化がないことがわかる。

以上のことより，(11) 式は分布荷重を假定した場合の解式と比較して，殆んど喰違ひのないものであると云ふことができる。

7. 荷重の作用點に於ける應力

既に述べた通り，radial stress の (10) 式は，$\beta \neq \pi/2$ の部分では境界條件を滿足してゐるのであるが，$\beta=\pi/2$ の所，即ち，荷重の作用點では如何なる値を示すかを調べようと思ふ。

今，$\beta=\pi/2$ と置いて，(8) 式を計算すれば，

$$\left.\begin{aligned}
A_2&=(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)^2\\
A_3&=2e^{4\alpha_1}(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)\\
C_1&=-(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)^2\sinh 2u\\
C_2&=(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)(e^{-4\alpha_1}-\cosh 2u)\\
F_1&=-(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)\{(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2u)\cosh 2u-2\}\\
F_2&=-\sinh 4\alpha_1\sinh 2u\\
F_3&=e^{4\alpha_1}(e^{-4\alpha_1}-\cosh 2u)\\
B_1&=B_2=B_3=D_1=D_2=E_1=E_2=E_3=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(17)$$

これを (13) 式へ入れゝば，

$$\Phi_1=-4\varphi\frac{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)\cosh 2u-2}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)^3}$$

$$\Phi_2=-4\varphi\frac{\sinh 4\alpha_1\sinh 2u}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u)^3}$$

$$\Phi_5=-4\varphi\frac{\cosh 2u-e^{-4\alpha_1}}{\cosh 4\alpha_1-\cosh 2u}$$

これを (14) 式へ入れて $\alpha\to 0$ ならしめるとき，$\Re(L_1')$ の第 3 項，並に，L_2' の第 3 項は，夫々，

$$\lim_{\alpha\to 0}\xi_2[\Phi_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\ \beta=\pi/2}}=-\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}[\Phi_5]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\ \beta=\pi/2}}=-\infty$$

となり，結局

$$\lim_{\alpha\to 0}[L_2'+\Re(L_1')]_{\beta=\pi/2}=-\infty$$

依つて，荷重の作用點に於ては，σ_α の値は $-\infty$ となる。

次に，同じ點に於ける $L_2'-\Re(L_1')$ を求めて見るに，この場合には $\infty-\infty$ なる不定形となるから，微分法の示す所に從つて計算の結果次の樣になる。

$$\lim_{\alpha\to 0}[L_2'-\Re(L_1')]_{\beta=\pi/2}=4\varphi\left\{\frac{e^{4\alpha_1}+2}{2\sinh 4\alpha_1}-\frac{8\sinh^2\alpha_1\sinh 4\alpha_1}{(\cosh 4\alpha_1-1)^2}\right\}$$

依つて，σ_β の (11) 式は，荷重の作用點に於て，有限なる値を與へる。

8. 計　算　例

外徑が内徑の 2 倍 ($a=2a_1$) の場合を例にとつて, x 軸 ($\beta=0$) 及び y 軸 ($\beta=\pi/2$) に依る切口の斷面に於ける應力を求めた結果は, 圖-2 に示す通りである。

9. 孔のない圓筒

孔のない圓筒が直徑方向に壓縮される場合の應力は前掲の各式に於て, $\alpha_1=\infty$ と置けば求められる筈である。この場合には級數の項は消滅して,

$$\lim_{\alpha_1\to\infty}\Re(L_1')=8\varphi e^{-\alpha}\sinh\alpha\,\{(1+e^{-4\alpha})\sin 2\beta+2e^{-2\alpha}\}/D$$

$$\lim_{\alpha_1\to\infty}\Im(L_1')=-8\varphi e^{-\alpha}\sinh\alpha\,(1-e^{-4\alpha})\sin 2\beta/D$$

$$\lim_{\alpha_1\to\infty}L_2'=\tan^{-1}\frac{\sin 2\beta+2\varphi\cos 2\beta}{e^{2\alpha}+\cos 2\beta-2\varphi\sin 2\beta}-\tan^{-1}\frac{\sin 2\beta-2\varphi\cos 2\beta}{e^{2\alpha}+\cos 2\beta+2\varphi\sin 2\beta}$$

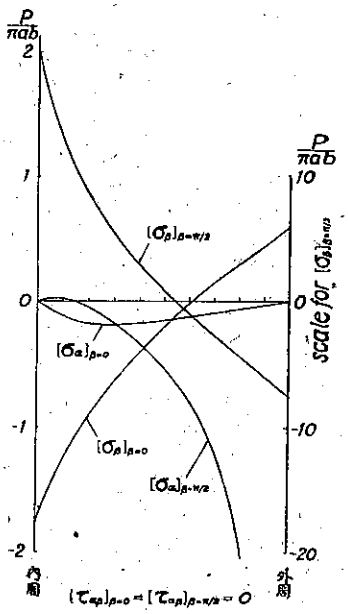
玆に,　$D=(1+e^{-4\alpha}+2e^{-2\alpha}\cos 2\beta)^2-(4\varphi e^{-2\alpha}\sin 2\beta)^2$

これより, 應力の一般式を作つて見ると,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta})&=\frac{8\varphi e^{-\alpha}\sinh\alpha}{D}\{(1+e^{-4\alpha})\cos 2\beta\\&\quad+2e^{-2\alpha}-i(1-e^{-4\alpha})\sin 2\beta\}\\\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)&=-2\varphi+\tan^{-1}\frac{\sin 2\beta+2\varphi\cos 2\beta}{e^{2\alpha}+\cos 2\beta-2\varphi\sin 2\beta}\\&\quad-\tan^{-1}\frac{\sin 2\beta-2\varphi\cos 2\beta}{e^{2\alpha}+\cos 2\beta+2\varphi\sin 2\beta}\end{aligned}\right\}(18)$$

(18) 式は, 久野先生が示されたものと一致してゐる[2]。

圖-2.



10. 要　　結

分布荷重を假定して得られた應力式を基として, 點荷重を受ける場合の應力の一般式を求めることができた。その中で, radial stress は荷重の作用點に於て, その値が ∞ となり實際の現象と著しく隔つた結果を與へる。これは數式自體の持つ特異性に依るものであつて, 問題を數學的に處理しようとする限り免れ難い點である。

尙, 1 直徑の方向に壓縮點荷重を受ける孔のない圓筒の應力は, 以上の特別の場合として求め得られることを知つた。

附記:　本文は久野先生の御敎示に負ふ所が多い。こゝに記して謝意を表する次第である。

2) 土木學會誌, 第 19 卷, 第 1 號