論　説　報　告

第27卷第9號　昭和16年9月

1 直徑の方向に壓縮される厚肉中空圓筒の應力に就いて

正會員　村　上　　正*

梗　概　本文は，厚肉の中空圓筒が，1 直徑の方向に壓縮される場合を取扱つたもので，之を平面應力の問題と見做し，横田方程式を用ひ，複素函數の助けに依つて，其の應力を解いたものである。この解は圓筒だけでなく，比較的小さな孔を持つ圓板にも適用できるであらう。また，嚴密解は無限級數を含むのであるが，數値計算を便利にするため，近似式を導いた。

1. 緒　言

1 直徑の方向に壓縮される圓筒の應力に關する問題は，從來多くの人々によつて扱はれてゐるが，其中點荷重を假定したものに在つては，荷重の作用點が數學的に特異點となり，其處に於ける應力は ∞ になるといふ不都合を生じてゐる。久野先生は，この特異性を除くために，荷重が微小幅の擴がりを持つことを前提とし，複素函數を用ひて，一つの新らしい解を示された[1]。

筆者は，先生が示された方法に倣つて，圓筒が同心圓孔を有する場合について解き，本文の樣な結果を得たのである。

2. 應力の一般方程式と境界條件

二次元彈性體に關する横田博士の應力の一般方程式は，直交座標系 (x, y) に關して，次の式で表はされる[2]。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x-\sigma_y-2i\tau&=2iyF_1'(z)+F_2(z)\\ \sigma_x+\sigma_y&=2\,\Re[F_1(z)]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

玆に，σ_x は，任意點 (x, y) に於ける x 方向の垂直應力，σ_y は其點に於ける y 方向の垂直應力，τ は同じ點に於ける剪斷應力である。又，$F_1(z)$, $F_2(z)$ は $z=x+iy$ の任意の函數であつて，$\Re[F_1(z)]$ は $F_1(z)$ の實部を示す。

この一般式は，次の關係に依つて，直交曲線座標系 (α, β) に移すことができる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta}&=e^{2i\gamma}(\sigma_x-\sigma_y-2i\tau)\\ \sigma_\alpha+\sigma_\beta&=\sigma_x+\sigma_y\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(b)}$$

但し，σ_α は任意點 (α, β) に於いて，α-曲線へ引いた法線方向に働らく垂直應力，σ_β は同じ點に於て，β-曲線へ引いた切線方向に働らく垂直應力，$\tau_{\alpha\beta}$ は其點に於ける剪斷應力である。又，γ は α-曲線へ引いた外向法線が x 軸の正方向となす角，e は自然對數の底である。

さて，$w=\alpha+i\beta$ とおいて，次の關係式を考へる。

$$z=ae^{-w}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(1)}$$

但し，$\alpha\geqq 0$, $0\leqq|\beta|\leqq\pi$ と定める。

(1) 式の左右兩邊の實部及虛部を夫々相等しと置けば，

$$x=ae^{-\alpha}\cos\beta,\quad y=-ae^{-\alpha}\sin\beta\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(c)}$$

又，(1) 式の關係を極座標 (r, θ) で示すと，

---

* 工學士　九州帝國大學助教授

1) 土木學會誌，第 19 卷，第 1 號　昭和 8 年 1 月

2) 機械學會誌，第 18 卷，第 38 號　大正 4 年 4 月

$$re^{i\theta}=ae^{-\alpha}\cdot e^{-i\beta}$$

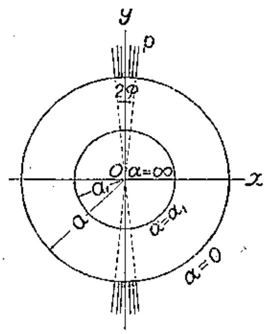
或は,

$$r=ae^{-\alpha},\quad \theta=-\beta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

(c) 及 (d) 式を參照して次のことが言はれる。

曲線 $\alpha=0$ は半徑 a なる圓（圓筒の外周）を表はし, $\alpha=\infty$ は中心を表はしてゐる。α の一つの値に對して, 原點を中心とする一つの圓が對應するから, 今, $\alpha=\alpha_1$ に依つて半徑 a_1 なる圓（圓筒の內周）を表はすことにする。又 β 曲線は中心から放射する直線を表はし, 角 β の測り方は極座標の偏角の場合と反對である。今の場合, γ はその定義より極座標の偏角と見ることができるから,

圖-1.



$$\gamma=\theta=-\beta$$

從つて (b) 式は次のやうに書き換へられる。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta}=e^{-2i\beta}\{2iyF_1'(z)+F_2(z)\}\\&\sigma_\alpha+\sigma_\beta=2\Re[F_1(z)]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

この第 1 式に (c) 式の關係を入れて少しく變形すると,

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta}&=e^{-2i\beta}\{-2iae^{-\alpha}\sin\beta\,F_1'(z)+F_2(z)\}\\&=e^{-2i\beta}\{-ae^{-\alpha}(e^{i\beta}-e^{-i\beta})F_1'(z)+F_2(z)\}\\&=(1-e^{-2i\beta})(-ae^{-w})F_1'(z)+e^{\alpha-i\beta}(-e^{-w})F_2(z)\end{aligned}$$

ここで, z の函數を w の函數で置きかへるために, 次の樣に置く。

$$f_1(w)=F_1(z)$$

$$f_2(w)=-e^{-w}F_2(z)$$

$$f_1'(w)=F_1'(z)\frac{dz}{dw}=-ae^{-w}F_1'(z)$$

之を用ひて (2) 式を書換へれば次の一般方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta}=(1-e^{-2i\beta})f_1'(w)-e^{\alpha-i\beta}f_2(w)\\&\sigma_\alpha+\sigma_\beta=2\Re[f_1(w)]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

圓筒に加はる荷重は, 弧 $2a\varphi$ の上に一樣な強度 p を以つて放射狀に分布するものと假定する（圖-1）。

ここで, 荷重が放射狀に働らくとしたのは, 計算を進める上に便利な爲である。然し, 角 2φ の小さい範圍に於ては, 之を 1 直徑の方向に働らく等分布荷重と見做しても, 實用上差支ないであらう。

荷重 $P(\beta)$ を Fourier 級數で表はせば,

$$P(\beta)=-\frac{2p}{\pi}\left\{\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但し, $0\leqq|\beta|\leqq\pi$, 負號は壓縮を表はす。

應力式の滿足すべき境界條件は,

$$\left.\begin{aligned}&\text{外周},\quad \alpha=0\ \text{に於て},\quad \sigma_\alpha=P(\beta),\quad \tau_{\alpha\beta}=0\\&\text{孔周},\quad \alpha=\alpha_1\ \text{に於て},\quad \sigma_\alpha=0,\quad \tau_{\alpha\beta}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

さて, (3) 式に於ける任意函數 $f_1(w), f_2(w)$ は, 之を次の樣に撰ぶものとする。

$$\left.\begin{aligned}&f_1(w)=\frac{2p}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}e^{-2nw}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}e^{2nw}\right\}\\&f_2(w)=-\frac{2p}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}e^{-(2n+1)w}+\sum_{n=1}^{\infty}D_{2n-1}e^{(2n-1)w}\right\}\\&f_1'(w)=-\frac{2p}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}2nA_{2n}e^{-2nw}-\sum_{n=1}^{\infty}2nB_{2n}e^{2nw}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(6) 式を (3) 式に入れ，境界條件 (5) 式を滿足するやうに，係數 A_{2n}, B_{2n}, C_{2n+1} 及 D_{2n-1} を決定することができれば，所要の解式が得られる譯である。

3. 係數の決定

係數 A, B, C 及 D を定めるに當り，先づ (6) 式の $f_1'(w)$ 及 $f_2(w)$ を (3) 式の第 1 式へ入れる。

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta})=-(1-e^{2i\beta})\left\{\sum_{n=0}^{\infty}2nA_{2n}e^{2nw}-\sum_{n=1}^{\infty}2nB_{2n}e^{2nw}\right\}$$

$$+e^{\alpha-i\beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}e^{-(2n+1)w}+\sum_{n=1}^{\infty}D_{2n-1}e^{(2n-1)w}\right\}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\{2nA_{2n}e^{-2nw}-2nA_{2n}e^{-2nw-2i\beta}-C_{2n+1}e^{-2nw-2i\beta}\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{2nB_{2n}e^{2nw}-2nB_{2n}e^{2nw-2i\beta}+D_{2n-1}e^{2nw-2i\beta}\}$$

この 2 つの括弧內の第 1 項は夫々次の樣に書いて差支ない。

$$\sum_{n=0}^{\infty}2nA_{2n}e^{-2nw}=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)A_{2(n+1)}e^{-2(n+1)w}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2nB_{2n}e^{2nw}=\sum_{n=1}^{\infty}2(n-1)B_{2(n-1)}e^{2(n-1)w}$$

從つて,

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta})=-\sum_{n=1}^{\infty}\{2(n+1)A_{2(n+1)}e^{-2\alpha}-2nA_{2n}-C_{2n+1}\}e^{-2(nw+i\beta)}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{2(n-1)B_{2(n-1)}e^{-2\alpha}-2nB_{2n}+D_{2n-1}\}e^{2(nw-i\beta)}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\{2nA_{2n}-2(n-1)A_{2(n-1)}e^{2\alpha}-C_{2n-1}e^{2\alpha}\}e^{-2nw}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{2nB_{2n}-2(n+1)B_{2(n+1)}e^{2\alpha}+D_{2n+1}e^{2\alpha}\}e^{2nw}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

次に，(6) 式の $f_1(w)$ を (3) 式の第 2 式へ入れると,

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)=2\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}e^{-2n\alpha}\cos 2n\beta+2\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}e^{2n\alpha}\cos 2n\beta$$

$$=2A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}(A_{2n}e^{-2n\alpha}+B_{2n}e^{2n\alpha})\cos 2n\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(7) 式の左右兩邊の虛部を相等しいと置けば,

$$-\frac{\pi}{2p}2\tau_{\alpha\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\{2n(A_{2n}e^{-2n\alpha}+B_{2n}e^{2n\alpha})-2(n-1)A_{2(n-1)}e^{-2(n-1)\alpha}$$

$$-2(n+1)B_{2(n+1)}e^{2(n+1)\alpha}-C_{2n-1}e^{-2(n-1)\alpha}+D_{2n+1}e^{2(n+1)\alpha}\}\sin 2n\beta\cdots\cdots(9)$$

又實部を相等しいと置けば,

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)=-(2B_2-D_1)e^{2\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\{2n(A_{2n}e^{-2n\alpha}-B_{2n}e^{2n\alpha})-2(n-1)A_{2(n-1)}e^{-2(n-1)\alpha}$$

$$+2(n+1)B_{2(n+1)}e^{2(n+1)\alpha}-C_{2n-1}e^{-2(n-1)\alpha}-D_{2n+1}e^{2(n+1)\alpha}\}\cos 2n\beta\cdots\cdots(10)$$

(8) 及 (10) 式より σ_α を求めると,

$$\frac{\pi}{2p}2\sigma_\alpha=2A_0-(2B_2-D_1)e^{2\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\{2n(A_{2n}e^{-2n\alpha}-B_{2n}e^{2n\alpha})-2(n-1)A_{2(n-1)}e^{-2(n-1)\alpha}$$

$$+2(n+1)B_{2(n+1)}e^{2(n+1)\alpha}-C_{2n-1}e^{-2(n-1)\alpha}-D_{2n+1}e^{2(n+1)\alpha}$$

$$-2(A_{2n}e^{-2n\alpha}+B_{2n}e^{2n\alpha})\}\cos 2n\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(9) 及 (11) 式から境界條件 (5) 式を滿足するやうに，未定係數を決める譯である。先づ，外周に於ける剪斷應力の條件，$[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=0}=0$ より，

$$2nA_{2n}+2nB_{2n}-2(n-1)A_{2(n-1)}-2(n+1)B_{2(n+1)}-C_{2n-1}+D_{2n+1}=0,\quad n\geqq 1 \cdots\cdots(12)$$

又，外周に於ける輻射應力 (radial stress) の條件，$[\sigma_\alpha]_{\alpha=0}=P(\beta)$ より次の 2 つの式が得られる。

$$2A_0-(2B_2-D_1)=-2\varphi \cdots\cdots(13)$$

$$2nA_{2n}-2nB_{2n}-2(n-1)A_{2(n-1)}+2(n+1)B_{2(n+1)}-2A_{2n}-2B_{2n}$$
$$-C_{2n-1}-D_{2n+1}=(-1)^n\frac{2}{n}\sin 2n\varphi,\quad n\geqq 1 \cdots\cdots(14)$$

今，

$$q_{2n}=(-1)^n\frac{1}{n}\sin 2n\varphi$$

と置いて，(12) と (14) 式から，C_{2n-1}, D_{2n+1} を求めると，

$$\left.\begin{aligned}C_{2n-1}&=2nA_{2n}-A_{2n}-2(n-1)A_{2(n-1)}-B_{2n}-q_{2n},\quad n\geqq 1\\ D_{2n+1}&=-2nB_{2n}-B_{2n}+2(n+1)B_{2(n+1)}-A_{2n}-q_{2n},\quad n\geqq 1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

これで，C, D は夫々 A, B を以て表はし得ることがわかる。(15) 式を (9) 式へ入れると，

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\{2ne^{\alpha}\sinh\alpha(A_{2n}e^{-2n\alpha}+B_{2n}e^{2n\alpha})+e^{2\alpha}\sinh 2n\alpha(A_{2n}+B_{2n}+q_{2n})\}\sin 2n\beta$$

又，(11) 式に入れゝば，

$$\frac{\pi}{2p}2\sigma_\alpha=2A_0-(2B_2-D_1)e^{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\{4ne^{\alpha}\sinh\alpha(A_{2n}e^{-2n\alpha}-B_{2n}e^{2n\alpha})$$
$$+2(A_{2n}e^{-2n\alpha}+B_{2n}e^{2n\alpha})-2e^{2\alpha}\cosh 2n\alpha(A_{2n}+B_{2n}+q_{2n})\}\cos 2n\beta$$

此處に得た 2 式は夫々孔周 $\alpha=\alpha_1$ に於ける境界條件を滿足しなければならぬ。そこで，先づ $[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=\alpha_1}=0$ より，

$$\{2ne^{-(2n+1)\alpha_1}\sinh\alpha_1+\sinh 2n\alpha_1\}A_{2n}+\{2ne^{(2n-1)\alpha_1}\sinh\alpha_1+\sinh 2n\alpha_1\}B_{2n}$$
$$+q_{2n}\sinh 2n\alpha_1=0,\quad n\geqq 1 \cdots\cdots(16)$$

又，$[\sigma_\alpha]_{\alpha=\alpha_1}=0$ より次の 2 式が出る。

$$2A_0-(2B_2-D_1)e^{2\alpha_1}=0 \cdots\cdots(17)$$

$$\{2ne^{-(2n+1)\alpha_1}\sinh\alpha_1-\cosh 2n\alpha_1+e^{-2(n+1)\alpha_1}\}A_{2n}$$
$$-\{2ne^{(2n-1)\alpha_1}\sinh\alpha_1+\cosh 2n\alpha_1-e^{2(n-1)\alpha_1}\}B_{2n}-q_{2n}\cosh 2n\alpha_1=0,\quad n\geqq 1 \cdots\cdots(18)$$

(13) 及 (17) 式を解いて，

$$A_0=-\frac{1}{2}\varphi e^{\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1 \cdots\cdots(19)$$

$$D_1=\varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+2B_2 \cdots\cdots(20)$$

又，(16) 及 (18) 式から A_{2n}, B_{2n} が求められる。その結果を書けば，

$$\left.\begin{aligned}A_{2n}&=(-1)^{n+1}\frac{2ne^{\alpha_1}\sinh\alpha_1+e^{2n\alpha_1}\sinh 2n\alpha_1}{2n(\sinh^2 2n\alpha_1-4n^2\sinh^2\alpha_1)}\sin 2n\varphi,\quad n\geqq 1\\ B_{2n}&=(-1)^{n}\frac{2ne^{\alpha_1}\sinh\alpha_1+e^{-2n\alpha_1}\sinh 2n\alpha_1}{2n(\sinh^2 2n\alpha_1-4n^2\sinh^2\alpha_1)}\sin 2n\varphi,\quad n\geqq 1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

これらを (15) 及 (20) 式に代入すれば，夫々 C_{2n-1}, D_{2n+1} 及 D_1 が決定する譯である。

4. 應力の解式

係數 A, B, C 及 D を (7) 及 (8) 式へ入れゝば，應力の一般式として次の式が得られる[3]。

3) この際 (15) 及 (20) 式の關係を用ふると便利である。

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta})=\varphi e^{2\alpha-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+4e^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi \quad\cdots\cdots(22)$$

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)=-\varphi e^{\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta \quad\cdots\cdots(23)$$

但し，

$$E_{2n}=2n\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\cosh 2nw-\sinh\alpha\sinh 2n\alpha_1\cosh 2n(\alpha_1'-w)$$

$$F_{2n}=2ne^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\sinh 2n\alpha-\sinh 2n\alpha_1\sinh 2n(\alpha_1-\alpha)$$

$$G_{2n}=\sinh^2 2n\alpha_1-4n^2\sinh^2\alpha_1$$

(22), (23) 式から分應力式から分應力式を求めれば，

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha=-\varphi e^\alpha\operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_{2n}+2ne^\alpha H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta \quad\cdots\cdots(24)$$

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=-\varphi e^\alpha\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)_n\frac{F_{2n}-2ne^\alpha H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta \quad\cdots\cdots(25)$$

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}=-2e^\alpha\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{K_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\sin 2n\beta \quad\cdots\cdots(26)$$

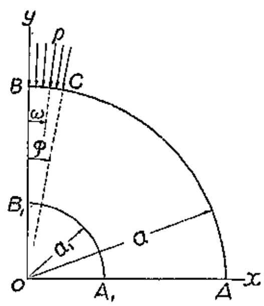
之が所要の解式である。玆に，

$$H_{2n}=2n\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\cosh 2n\alpha-\sinh\alpha\sinh 2n\alpha_1\cosh 2n(\alpha_1-\alpha)$$

$$K_{2n}=2n\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\sinh 2n\alpha+\sinh\alpha\sinh 2n\alpha_1\sinh 2n(\alpha_1-\alpha)$$

(24) 式の σ_α は外周 ($\alpha=0$) で，荷重 $P(\beta)$ に等しくなり，孔周 ($\alpha=\alpha_1$) で 0 になることがわかる。又，(26) 式の $\tau_{\alpha\beta}$ は，外周及孔周で共に 0 となる。即ち，境界條件は確かに滿足されてゐる。

圖-2.



次に (25) 式の圓周應力 (tangential stress) σ_β について檢査して見よう。$\beta=0$ 即ち，x 軸による切口 AA_1 (圖-2) の上に作用する σ_β の合力 V を求めて見るに，

$$V=\int_{\alpha}^{\alpha_1}[\sigma_\beta]_{\beta=0}\,dr=-a\int_0^{\alpha_1}[\sigma_\beta]_{\beta=0}\,e^{-\alpha}\,d\alpha$$

$$=\frac{2p}{\pi}a\left\{\varphi-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 2n\varphi}{n(4n^2-1)}\right\}$$

$$=\frac{2p}{\pi}a\left\{\varphi-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{4n}{4n^2-1}\right)\sin 2n\varphi\right\} \quad\cdots\cdots(e)$$

然るに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin 2n\varphi}{n}=\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n\sin 2n\varphi}{4n^2-1}=\sin\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

なる關係がある[4]。問題の性質上，φ は $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間の値をとるから，これを (e) 式へ入れると，

$$V=\frac{2p}{\pi}a\left(\varphi-\varphi+\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)=pa\sin\varphi$$

一方，荷重の垂直分力は，

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi}p\cos w\cdot a\,dw=2pa\sin\varphi$$

之は $2V$ に等しい。依つて，σ_β の式も正しいことが認められる。

今，(22) 及 (23) 式に於て，$\alpha_1=\infty$ と置けば，孔のない場合の一般方程式となる。

---

4) 例へば，小平吉男； 物理數學，第 1 卷，pp. 182, 187.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta}&=\frac{8p}{\pi}e^\alpha\sinh\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-2nw}\sin 2n\varphi\\ \sigma_\alpha+\sigma_\beta&=-\frac{4p}{\pi}\left\{\varphi-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}e^{-2n\alpha}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(f)}$$

之は，久野先生の解式と一致してゐる。

又，(24)～(26) 式に於て，$2\varphi=\pi$ とおくと，外部から水壓を受ける厚肉中空圓筒の分應力式が得られる。この場合には，無限級數の項が消滅して，次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha&=-pe^\alpha\operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\\ \sigma_\beta&=-pe^\alpha\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)\\ \tau_{\alpha\beta}&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(g)}$$

(d) 式を用ひて，之を極座標 (r,θ) について表はすと，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\frac{a^2(r^2-a_1^2)}{r^2(a^2-a_1^2)}p\\ \sigma_\theta&=-\frac{a^2(r^2+a_1^2)}{r^2(a^2-a_1^2)}p\\ \tau_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(ga)}$$

これは，横田博士の解かれた例と一致してゐる[5)]。

5. 近似解式

(24)～(26) 式には無限級數が含まれてゐて，計算がかなり煩雜であるから，實用上の目的に對して，近似式を考へて見よう。

(22) 及 (23) 式に於て，無限級數の分母を見るに，

$$G_{2n}=\sinh^2 2n\alpha_1-4n^2\sinh^2\alpha_1$$

之は，n が大きくなるに從つて，第 2 項の影響は小さくなる。又，n の大きい値に對して，第 1 項を次の樣に置く。

$$\sinh^2 2n\alpha_1=\frac{1}{4}e^{4n\alpha_1}$$

卽ち，n の大きい値に關して，G_{2n} を次のやうに置くことにする。

$$G_{2n}=\frac{1}{4}e^{4n\alpha_1}$$

斯樣な置換を行ふと，式中の無限級數は，第 m 項までを保存して，それより後は單一函數で置きかへることができる。以下その變形の手續を示さう。

(22) 式に於ける無限級數に，今述べた置換を行ひ，多少の變形を試みると，

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha-\sigma_\beta-2i\tau_{\alpha\beta})&=\varphi e^{2\alpha-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+4e^\alpha\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{F_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\\ &\quad+4e^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4e^{-4n\alpha_1}E_{2n}\sin 2n\varphi-4e^\alpha\sum_{n=1}^{m}(-1)^n 4e^{-4n\alpha_1}E_{2n}\sin 2n\varphi\\ &=\varphi e^{2\alpha-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+4e^\alpha\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}F_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi+L_1\cdots\cdots(27)\end{aligned}$$

茲に，

$$\mu_{2n}=1-4e^{-4n\alpha_1}G_{2n}$$

5) 前記機械學會誌參照（但し，この場合，內壓力を 0 と置く）

$$L_1=16e^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-4n\alpha_1}E_{2n}\sin 2n\varphi \cdots\cdots(28)$$

同様にして，(23) 式から，

$$\frac{\pi}{2p}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)=-\varphi e^{\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+2\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{F_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n}e^{-4n\alpha_1}F_{2n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta-2\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{4}{n}e^{-4n\alpha_1}F_{2n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$

$$=-\varphi e^{\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+2\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}F_{2n}}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta+L_2 \cdots\cdots(29)$$

玆に，

$$L_2=8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}e^{-4n\alpha_1}F_{2n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta \cdots\cdots(30)$$

さて，

$$\cosh 2nw\sin 2n\varphi=-i\cosh 2nw\sinh 2ni\varphi$$

$$=-\frac{i}{2}\{\sinh 2n(w+i\varphi)-\sinh 2n(w-i\varphi)\}$$

$$\sinh 2n\alpha_1\cosh 2n(\alpha_1-w)\sin 2n\varphi=-\frac{i}{4}\{\cosh 2n(2\alpha_1-w+i\varphi)-\cosh 2n(w-i\varphi)$$

$$-\cosh 2n(2\alpha_1-w-i\varphi)+\cosh 2n(w+i\varphi)\}$$

であるから，L_1 に含まれる因子を變形すると，

$$E_{2n}\sin 2n\varphi=-in\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\{\sinh 2n(w+i\varphi)-\sinh 2n(w-i\varphi)\}$$

$$+\frac{i}{4}\sinh\alpha\{\cosh 2n(2\alpha_1-w+i\varphi)-\cosh 2n(2\alpha_1-w-i\varphi)$$

$$+\cosh 2n(w+i\varphi)-\cosh 2n(w-i\varphi)\} \cdots\cdots(31)$$

同様な手續によつて，L_2 に含まれる因子を變形すると，

$$F_{2n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta=-\frac{i}{2}ne^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\{\cosh 2n(w+i\varphi)-\cosh 2n(w-i\varphi)$$

$$+\cosh 2n(\overline{w}+i\varphi)-\cosh 2n(\overline{w}-i\varphi)\}$$

$$+\frac{i}{8}\{\sinh 2n(2\alpha_1-w+i\varphi)-\sinh 2n(2\alpha_1-w-i\varphi)+\sinh 2n(2\alpha_1-\overline{w}+i\varphi)$$

$$-\sinh 2n(2\alpha_1-\overline{w}-i\varphi)-\sinh 2n(w+i\varphi)+\sinh 2n(w-i\varphi)$$

$$-\sinh 2n(\overline{w}+i\varphi)+\sinh 2n(\overline{w}-i\varphi)\} \cdots\cdots(32)$$

但し，$\overline{w}=\alpha-i\beta$ である。(31) 式を (28) 式へ代入すれば，

$$L_1=-16ie^{\alpha}\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ne^{-4n\alpha_1}\{\sinh 2n(w+i\varphi)-\sinh 2n(w-i\varphi)\}$$

$$+4ie^{\alpha}\sinh\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-4n\alpha_1}\{\cosh 2n(2\alpha_1-w+i\varphi)-\cosh 2n(2\alpha_1-w-i\varphi)$$

$$+\cosh 2n(w+i\varphi)-\cosh 2n(w-i\varphi)\} \cdots\cdots(33)$$

(32) 式を (30) 式に代入すれば，

$$L_2=-4ie^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-4n\alpha_1}\{\cosh 2n(w+i\varphi)-\cosh 2n(w-i\varphi)$$

$$+\cosh 2n(\overline{w}+i\varphi)-\cosh 2n(\overline{w}-i\varphi)\}$$

$$+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}e^{-4n\alpha_1}\{\sinh 2n(2\alpha_1-w+i\varphi)-\sinh 2n(2\alpha_1-w-i\varphi)$$

$$+\sinh 2n(2\alpha_1-\overline{w}+i\varphi)-\sinh 2n(2\alpha_1-\overline{w}-i\varphi)-\sinh 2n(w+i\varphi)+\sinh 2n(w-i\varphi)$$

$$-\sinh 2n(\overline{w}+i\varphi)+\sinh 2n(w-i\varphi)\} \cdots\cdots(34)$$

(33) 式には 2 種の無限級數が含まれ，その 1 つは，

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ne^{-4n\alpha_1}\sinh 2nt \cdots\cdots(35)$$

なる形を持ち，他の 1 つは，

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-4n\alpha_1}\cosh 2nt \cdots\cdots(36)$$

なる形を持つ。又，(34) 式にも，2 種の無限級數が含まれ，その 1 つは S_2 と同形のものであり，他の 1 つは，次の形を持つてゐる。

$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}e^{-4n\alpha_1}\sinh 2nt \cdots\cdots(37)$$

次に，之等 3 種の無限級數を單一函數で置換へることを考へよう。先づ S_1 については，

$$S_1=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ne^{-4n\alpha_1}(e^{2nt}-e^{-2nt})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\{e^{-2n(2\alpha_1-t)}-e^{-2n(2\alpha_1+t)}\}$$

今，$\lambda_1=e^{-2(2\alpha_1-t)}$，$\lambda_2=e^{-2(2\alpha_1+t)}$ と置き，

$$|\lambda_1|<1, \qquad |\lambda_2|<1$$

と假定すれば，

$$S_1=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)^2}\right\}$$

$$=-\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(1-\lambda_1\lambda_2)}{2(1+\lambda_1)^2(1+\lambda_2)^2}$$

$$=-\frac{\sinh 4\alpha_1\sinh 2t}{2(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2t)^2}$$

こゝに於て，$t=u+iv$ とおいて，變形すると，其結果は，

$$S_1=-\frac{\sinh 4\alpha_1}{2N_1}[\cosh 4\alpha_1\sinh 4u+(\cosh^2 4\alpha_1+\cosh^2 2u+\sin^2 2v)\sinh 2u\cos 2v$$

$$+i\{\cosh 4\alpha_1\sin 4v+(\cosh^2 4\alpha_1-\sinh^2 2u+\cos^2 2v)\cosh 2u\sin 2v\}]\cdots\cdots(38)$$

こゝに，

$$N_1=\{(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2u\cos 2v)^2+\sinh^2 2u\sin^2 2v\}^2$$

である。簡單のために，(38) 式を次の様に置く，

$$S_1=-\frac{1}{2}\sinh 4\alpha_1(Q_1+iR_1)\cdots\cdots(38a)$$

次に S_2 については，

$$S_2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-4n\alpha_1}(e^{2nt}+e^{-2nt})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\lambda_1{}^n+\lambda_2{}^n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{1+\lambda^2}\right)$$

$$=-\frac{\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2}{2(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}$$

$$=-\frac{e^{-4\alpha_1}+\cosh 2t}{2(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2t)}$$

$t=u+iv$ とおいて更に變形すると，

$$S_2=-\frac{1}{2N_2}\{e^{-4\alpha_1}\cosh 4\alpha_1+(e^{-4\alpha_1}+\cosh 4\alpha_1)\cosh 2u\cos 2v+\cosh^2 2u-\sin^2 2v$$
$$+i\sinh 4\alpha_1\sinh 2u\sin 2v\}\cdots\cdots(39)$$

こゝに，

$$N_2=(\cosh 4\alpha_1+\cosh 2u\cos 2v)^2+\sinh^2 2u\sin^2 2v$$

取扱ひの便宜上，(39) 式を次のやうに置く。

$$S_2=-\frac{1}{2}(Q_2+iR_2)\cdots\cdots(39a)$$

更に，S_3 については，

$$S_3=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}e^{-4n\alpha_1}(e^{2nt}-e^{-2nt})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}(\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n)$$
$$=\frac{1}{2}\{-\log(1+\lambda_1)+\log(1+\lambda_2)\}$$
$$=-\frac{1}{2}[\log\{1+e^{-2(2\alpha_1-t)}\}-\log\{1+e^{-2(2\alpha_1+t)}\}]$$

$t=u+iv$ と置き，公式，$\log(x+iy)=\log_e(x^2+y^2)^{1/2}+i\tan^{-1}y/x$ を用ひて，此の式を變形した結果は，

$$S_3=-\frac{1}{2}\left\{\log_e 2u\sqrt{\frac{\cosh 2(2\alpha_1-u)+\cos 2v}{\cosh 2(2\alpha_1+u)+\cos 2v}}+i\tan^{-1}\frac{2e^{4\alpha_1}\cosh 2u\sin 2v+\sin 4v}{e^{8\alpha_1}+2e^{4\alpha_1}\cosh 2u\cos 2v+\cos 4v}\right\}\cdots(40)$$

或は，この式を，

$$S_3=-\frac{1}{2}(Q_3+iR_3)\cdots\cdots(40a)$$

にて表はす。

(38a), (39a), (40a) 式中，Q_1, Q_2 及 Q_3 は共に v に關して偶函數である。又，R_1, R_2 及 R_3 は，何れも，に關して奇函數である。即ち，

$$[Q]_v=[Q]_{-v},\quad [R]_v=-[R]_{-v}$$

この關係を利用すれば，(33) 及 (34) 式の L_1 及 L_2 は次の様になる。

$$L_1=-16ie^{\alpha}\sinh\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)\{[S_1]_{t=w+i\varphi}-[S_1]_{t=w-i\varphi}\}$$
$$+4ie^{\alpha}\sinh\alpha\{[S_2]_{t=2\alpha_1-w+i\varphi}-[S_2]_{t=2\alpha_1-w-i\varphi}+[S_2]_{t=w+i\varphi}-[S_2]_{t=w-i\varphi}\}$$
$$=-\xi_1\{[R_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}+\xi_2\{[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}+[R_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}$$
$$+i\xi_1\{[Q_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[Q_1]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}-i\xi_2\{[Q_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[Q_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}-[Q_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}+[Q_2]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}$$
$$\cdots\cdots(41)$$

$$L_2=-4ie^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\{[S_2]_{t=w+i\varphi}-[S_2]_{t=w-i\varphi}+[S_2]_{t=\overline{w}+i\varphi}-[S_2]_{t=\overline{w}-i\varphi}\}$$
$$+i\{[S_3]_{t=2\alpha_1-w+i\varphi}-[S_3]_{t=2\alpha_1-w-i\varphi}+[S_3]_{t=2\alpha_1-\overline{w}+i\varphi}-[S_3]_{t=2\alpha_1-\overline{w}-i\varphi}$$
$$-[S_3]_{t=w+i\varphi}+[S_3]_{t=w-i\varphi}-[S_3]_{t=\overline{w}+i\varphi}+[S_3]_{t=\overline{w}-i\varphi}\}$$
$$=-\xi_3\{[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_2]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\}$$
$$+[R_3]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta+\varphi}}-[R_3]_{\substack{u=2\alpha_1-\alpha\\v=\beta-\varphi}}-[R_3]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta+\varphi}}+[R_3]_{\substack{u=\alpha\\v=\beta-\varphi}}\cdots\cdots(42)$$

但し，　$\xi_1=8e^{\alpha}\sinh\alpha_1\sinh 4\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)$

$\xi_2=2e^{\alpha}\sinh\alpha$

$$\xi_3 = 4e^{\alpha_1}\sinh\alpha_1$$

(41) 式を (27) 式へ，(42) 式を (29) 式へ夫々代入し，之を解けば分應力式が得られる。其の結果を示せば，

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha = -\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha) + \sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}+2n\,e^{\alpha}H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$
$$+\frac{1}{2}\{L_2+\Re(L_1)\} \quad \cdots\cdots(43)$$

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta = -\varphi e^{\alpha}\operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha) + \sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}(F_{2n}-2ne^{\alpha}H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$
$$+\frac{1}{2}\{L_2-\Re(L_1)\} \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta} = -2e^{\alpha}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\mu_{2n}K_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\sin 2n\beta - \frac{1}{2}\Im(L_1) \quad \cdots\cdots(45)$$

こゝに，$\Re(L_1)$ 及 $\Im(L_1)$ は夫々 (14) 式の實部及虛部を示す。

これらの式は，一見複雜のやうであるが，それでも，無限級數に依る計算に比べれば餘程手數が省けるのである。式中 m を如何なる値に定めるかは，α_1 の數値に關係する。肉が厚い程，α_1 が大きく從つて m は小さく取つてよい。

さて，これらの式を求めるに當つて，$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$ なることを假定して來た。今この假定について吟味して見よう。

$$|\lambda_1| = e^{-2(2\alpha_1-u)},\quad |\lambda_2| = e^{-2(2\alpha_1+u)}$$

なる故，u の種々の値に對して，之等の取る値を検するに表-1 の如くなる。

表-1.

t	u	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
$\overline{w}\pm i\varphi$	α	$e^{-2(2\alpha_1-\alpha)}$	$e^{-2(2\alpha_1+\alpha)}$
$\overline{w}\pm i\varphi$	α	$e^{-2(2\alpha_1-\alpha)}$	$e^{-2(2\alpha_1+\alpha)}$
$2\alpha_1-w\pm i\varphi$	$2\alpha_1-\alpha$	$e^{-2\alpha}$	$e^{-2(4\alpha_1-\alpha)}$
$2\alpha_1-w\pm i\varphi$	$2\alpha_1-\alpha$	$e^{-2\alpha}$	$e^{-2(4\alpha_1-\alpha)}$

玆に，$0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ である。從つて，$|\lambda_2|$ の方は常に 1 より小ない値になるから假定を滿足してゐる。然るに $|\lambda_1|$ の方は，$t=2\alpha_1-w\pm i\varphi$ 及 $t=2\alpha_1-\overline{w}\pm i\varphi$ の場合に，$\alpha=0$ に對して 1 に等しくなり，假定に反する。このことより，Q 及 R の中，$u=2\alpha_1-\alpha$ を含むものは，α の變域より $\alpha=0$ を除外しなければならないことになる。依つて，(43)～(45) 式は $0<\alpha\leqq\alpha_1$ の範圍に於て使用すべきであつて，外周 $\alpha=0$ に於ては (24)～(26) 式を用ひなければならない[6]。

この場合には，σ_α 及 $\tau_{\alpha\beta}$ の値は境界條件 (5) 式によつて與へられてゐるから計算する迄もないけれども，σ_β の式は次の樣になる。

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0} = -\varphi\coth\alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sinh^2 2n\alpha_1+4n^2\sinh^2\alpha_1}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$

式中，無限級數の收斂が緩漫で，このまゝでは取扱ひが不便であるから，之を次の樣に書き換へる。

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0} = -\varphi\coth\alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{G_{2n}+8n^2\sinh^2\alpha_1}{nG_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$
$$= -\varphi\coth\alpha_1 + \frac{\pi}{2p}P(\beta) + \varphi - 8\sinh^2\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$
$$= \frac{\pi}{2p}P(\beta) - \varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1 - 8\sinh^2\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta \quad \cdots\cdots(46)$$

---

6) $\tau_{\alpha\beta}$ の式は $u=2\alpha_1-\alpha$ の項を含むけれども，係數 ξ_2 があるために，結局 $\alpha=0$ に於て 0 となり境界條件を滿足することが見られる。從つて，(45) 式は $\alpha=0$ の場合にも用ひて差支ないと言ふことが出來る。但し，後に述べく如く，$\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ の場合を除くものとする。

この式に對して，既に述べた方法によつて，近似式を書くことが出來る。その形は，(38) 式に於て，$u=0$ と置いたものに等しい。即ち，

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}=\frac{\pi}{2p}P(\beta)-\varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1-8\sinh^2\alpha_1\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{n\mu_{2n}}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$
$$+8\sinh^2\alpha_1\sinh 4\alpha_1\left[\frac{\sin 2(\beta+\varphi)}{\{\cosh 4\alpha_1+\cos 2(\beta+\varphi)\}^2}-\frac{\sin 2(\beta-\varphi)}{\{\cosh 4\alpha_1+\cos 2(\beta-\varphi)\}^2}\right]\quad\cdots(46a)$$

6. 計 算 例

外徑が孔徑の 2 倍，荷重の擴がりの角が 0.05 rdian, 即ち，$a=2a_1$，$2\varphi=0.05$ radian の場合について，近似式を使つて數値計算を行つて見た。直徑 20 cm の中空ローラーに例をとれば，接觸部の弧長 5 mm といふ場合に當る。

この時は $e^{\alpha_1}=2$ であつて，$m=3$ と定めて實用上充分な結果が得られる。その結果は，圖-3～11 に示す通り

圖-3.

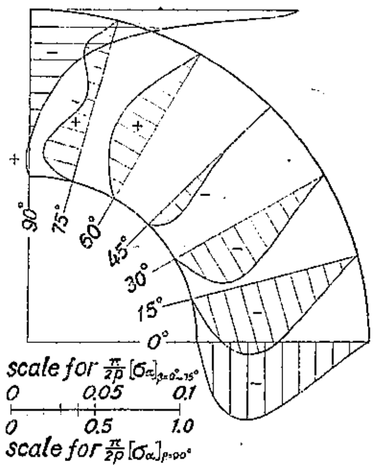


圖-4.

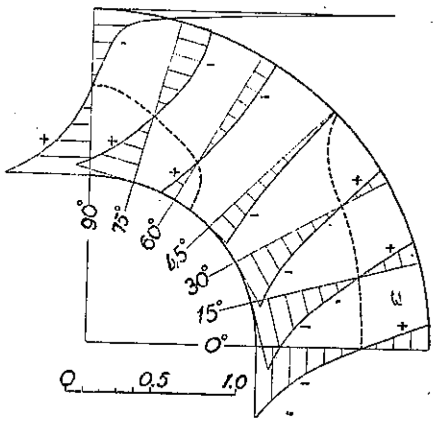


圖-5.

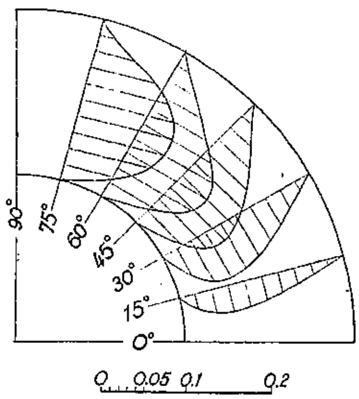


圖-6.

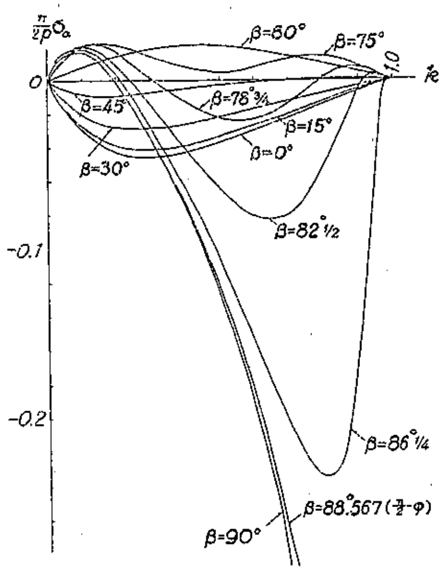


圖-7.

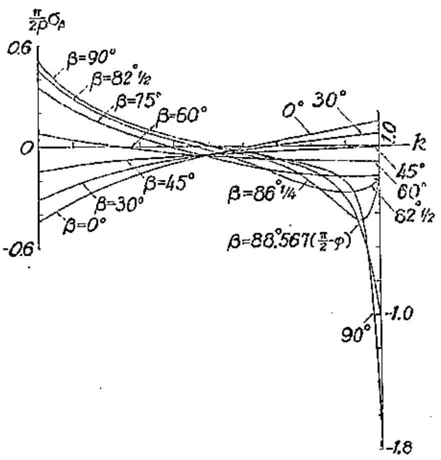


圖-8.

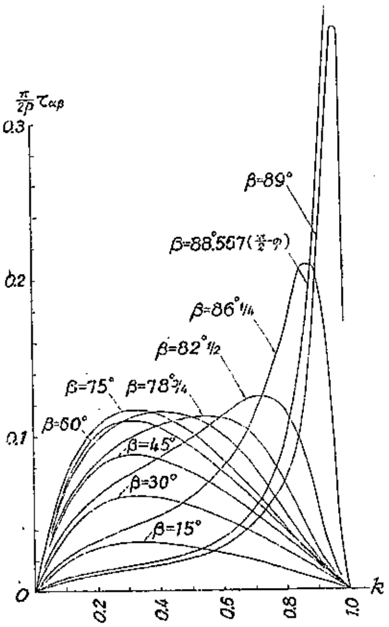


圖-9.

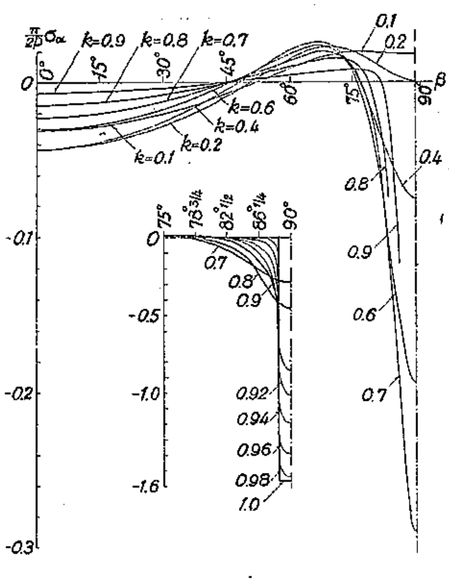
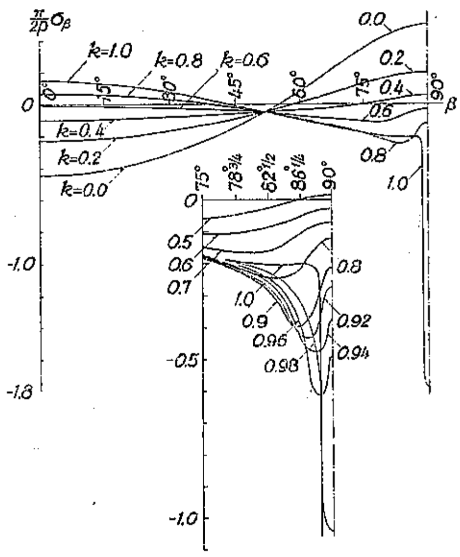


圖-10.



である。圖-3～5 は β を一定に保ち，α を種々に變へて表はしたもので，應力の變化する模樣をもつと解り易くするために，圖-6～8 を添へた。圖-9～11 は α を一定に保ち，β を種々に變化せしめた場合に於ける，應力變化の模樣を示したものである。

圖中 k は，考へる點の動徑 (r) と孔の半徑 (a_1) の差と，肉厚 (h) との比を表はす。

$$k=\frac{r-a_1}{h}=\frac{e^{-\alpha}-e^{-\alpha_1}}{1-e^{-\alpha_1}}$$

或は

$$e^{-\alpha}=(1-k)e^{-\alpha_1}+k=\frac{1+k}{2}$$

圖-4 の太い破線は $\sigma_\beta=0$ の軌跡である。この線を境として，引張と壓縮の領域が分れてゐる。材料が引張に弱いものならば，荷重を漸次増すとき，B_1 及 A（圖-2）の附近に最初の龜裂が現はれるであらう。

次に，圖-10 を見ると，全ての曲線が一點に於て交つてゐる所がある。圖上に於てその點の座標を求めると，

$$\beta=52.^\circ1,\qquad \frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=-0.04$$

卽ち，$\beta=52.^\circ1$ なる斷面に於ては，k（卽ち α）の値の如何に關せず，一様に $0.04(2p/\pi)$ なる壓縮圓周應力が働いてゐる。これをもつと正確に求めるには，(25) 式から，

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}=-\varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1-8\sinh^2\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta^{7)}$$

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=\alpha_1}=-\varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1+4e^{\alpha_1}\sinh\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sinh 2n\alpha_1}{G_{2n}}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta$$

の2つを撰んで，兩式の右邊を相等しと置き，之を滿足する β を求めると共に，それに對應する σ_β の値を計算すればよい譯である。然しながら，この方法は，無限級數があるために，實際上實行困難であるから，試索に依つて目的を達するの外はない。それをやつて見ると，次の結果を得る。

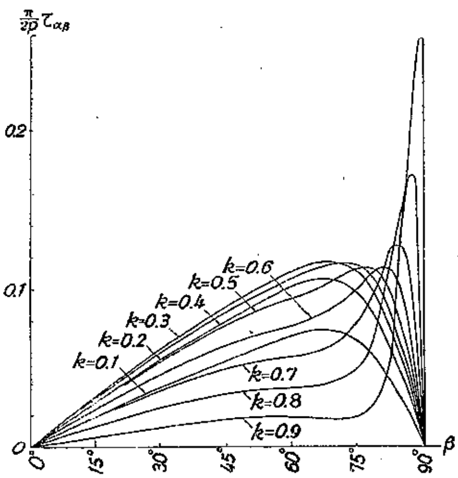
$$\beta=52.^\circ194=52^\circ11'40'',\qquad \frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=-0.0451\,4 \qquad\cdots\cdots(\mathrm{h})$$

玆に得られた，β の値を，σ_β の近似式に入れて其の値を求め，(h) 式の値との喰違ひを見ることに依つて，近似式の含む誤差を檢することが出來るであらう。$m=3$ として計算すると，

$$\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta=-0.0451\,5$$

であつて，兩者の値は實際上相等しいと見てよいことが確められた。從つて，先に導いた近似式なるものは，嚴密式と比較して，其の精度は劣らぬものと思はれる次第である。

圖-11.



7. 荷重の兩端 $\left(\beta=\dfrac{\pi}{2}\pm\varphi\right)$ に於ける應力の吟味

圖-6～11 に見る如く，荷重の作用點附近に於て，應力の値に著しい變化が現はれてゐる。特に，荷重の端點 C（圖-2）に於て應力の値に異狀が認められる。

今荷重の (5) 式に於て，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ と置いて見るに，符號を省いて，

$$P\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{2p}{\pi}\left\{\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\varphi\cos 2n\beta\right\}$$
$$=\frac{2p}{\pi}\left\{\varphi+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 4n\varphi\right\}$$
$$=\frac{2p}{\pi}\left\{\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\right\}$$
$$=\frac{p}{2}\qquad\cdots\cdots(47)$$

元來，この點に於ては，荷重の强度は，p でもあり又 0 でもある。その他の値ではない筈であるのに，それが，上のやうに $p/2$ なる値を示してゐる。これは，1 つの横座標に對して，p と 0 の 2 個の縱座標を假定したこと

7) $\beta=52.^\circ1$ 附近では $P(\beta)=0$ である（(46) 式參照）。

に基くもので，Fourier 級數に於ては屢々起る所である。このやうな，假定と數式との喰違ひが，應力式に如何なる影響を與へてゐるかを吟味しやうと思ふ。

この場合には，(24)～(26) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha&=-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{2n}+2ne^\alpha H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 4n\varphi\\
\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta&=-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{2n}-2ne^\alpha H_{2n}}{nG_{2n}}\sin 4n\varphi\\
\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}&=2e^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{2n}}{G_{2n}}\sin^2 2n\varphi
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(48)$$

$\alpha=0$ とおけば，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\pi}{2p}[\sigma_\alpha]_{\alpha=0}&=-\frac{\pi}{4}\\
\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}&=-\frac{\pi}{4}-\varphi e^{-\alpha_1}\operatorname{csch}\alpha_1-4\sinh^2\alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{G_{2n}}\sin 4n\varphi\\
\frac{\pi}{2p}[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=0}&=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(49)$$

1) 剪斷應力は境界條件の通り 0 となる。

2) 輻射應力は境界條件に示された荷重强度 p とは一致してゐない。即ち，p でもなく，0 でもなく，兩者の平均を示してゐる。

3) 圓周應力は，境界條件に示されてゐない。この値は α_1 と φ に關係するので，今例題の場合をとつて，$e^{\alpha_1}=2$, $\varphi=0.025$ とおくと，

$$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}=-0.9982$$

上の關係は嚴密式から導いたものである。次に近似式を吟味して見よう。この場合には，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\pi}{2p}\sigma_\alpha&=-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\sinh(\alpha_1-\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{\mu_{2n}(F_{2n}+2ne^\alpha H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 4n\varphi\\
&\qquad+\frac{1}{2}\{L_2+\Re(L_1)\}\\
\frac{\pi}{2p}\sigma_\beta&=-\varphi e^\alpha \operatorname{csch}\alpha_1\cosh(\alpha_1-\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{\mu_{2n}(F_{2n}-2ne^\alpha H_{2n})}{nG_{2n}}\sin 4n\varphi\\
&\qquad+\frac{1}{2}\{L_2-\Re(L_1)\}\\
\frac{\pi}{2p}\tau_{\alpha\beta}&=2e^\alpha\sum_{n=1}^{m}\frac{\mu_{2n}K_{2n}}{G_{2n}}\sin^2 2n\varphi-\frac{1}{2}\Im(L_1)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(50)$$

但し，

$$\begin{aligned}
\Re(L_1)=&\,\xi_1\frac{-\cosh 4\alpha_1\sin 8\varphi+(\cosh^2 4\alpha_1-\sinh^2 2\alpha+\cos^2 4\varphi)\cosh 2\alpha\sin 4\varphi}{\{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha\cos 4\varphi)^2+\sinh^2 2\alpha\sin^2 4\varphi\}^2}\\
&-\frac{\xi_2\sinh 4\alpha_1\sinh 2\alpha\sin 4\varphi}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha\cos 4\varphi)^2+\sinh^2 2\alpha\sin^2 4\varphi}\\
&-\frac{\xi_2\sinh 4\alpha_1\sinh 2(2\alpha_1-\alpha)\sin 4\varphi}{\{\cosh 4\alpha_1-\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\cos 4\varphi\}^2+\sinh^2 2(2\alpha_1-\alpha)\sin^2 4\varphi}\cdots\cdots(51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im(L_1)=&\,\xi_1\frac{\cosh 4\alpha_1\sinh 4\alpha-(\cosh^2 4\alpha_1+\cosh^2 2\alpha)\sinh 2\alpha}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha)^4}\\
&-\xi_1\frac{\cosh 4\alpha_1\sinh 4\alpha-(\cosh^2 4\alpha_1+\cosh^2 2\alpha+\sin^2 4\varphi)\sinh 2\alpha\cos 4\varphi}{\{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha\cos 4\varphi)^2+\sinh^2 2\alpha\sin^2 4\varphi\}^2}\\
&-\xi_2\frac{k_1-k_2\cosh 2\alpha+\cosh^2 2\alpha}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha)^2}+\xi_2\frac{k_1-k_2\cosh 2\alpha\cos 4\varphi+\cosh^2 2\alpha-\sin^2 4\varphi}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha\cos 4\varphi)^2+\sinh^2 2\alpha\sin^2 4\varphi}
\end{aligned}$$

$$+\xi_2\frac{k_1-k_2\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)+\cosh^2 2(2\alpha_1-\alpha)}{\{\cosh 4\alpha_1-\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\}^2}$$

$$-\xi_2\frac{k_1-k_2\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\cos 4\varphi+\cosh^2 2(\alpha_1-\alpha)-\sin^2 4\varphi}{\{\cosh 4\alpha_1-\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\cos 4\varphi\}^2+\sinh^2 2(2\alpha_1-\alpha)\sin^2 4\varphi}\quad\cdots\cdots(52)$$

但し，　$k_1=e^{-4a_1}\cosh 4\alpha_1,\quad k_2=e^{-4a_1}+\cosh 4\alpha_1$

$$L_2=\frac{\xi_2\sinh 4\alpha_1\sinh 2\alpha\sin 4\varphi}{(\cosh 4\alpha_1-\cosh 2\alpha\cos 4\varphi)^2+\sinh^2 2\alpha\sin^2 4\varphi}+\tan^{-1}\frac{2e^{4a_1}\cosh 2\alpha\sin 4\varphi-\sin 8\varphi}{e^{8a_1}-2e^{4a_1}\cosh 2\alpha\cos 4\varphi+\cos 8\varphi}$$

$$-\tan^{-1}\frac{2e^{4a_1}\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\sin 4\varphi-\sin 8\varphi}{e^{8a_1}-2e^{4a_1}\cosh 2(2\alpha_1-\alpha)\cos 4\varphi+\cos 8\varphi}\quad\cdots\cdots(53)$$

これらの式は，外周 $\alpha_1=0$ に於て使用できないものであるが，今假りに $\alpha=0$ を許して，各々その値を求めて見ると，

$$\lim_{\alpha\to 0}\Re(L_1)=\frac{8\sinh^2\alpha_1\sinh 4\alpha_1\sin 4\varphi}{(\cosh 4\alpha_1-\cos 4\varphi)^2}\quad\cdots\cdots(54)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\Im(L_1)-=1\quad\cdots\cdots(55)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}L_2=\tan^{-1}\frac{2e^{4a_1}\sin 4\varphi-\sin 8\varphi}{e^{8a_1}-2e^{4a_1}\cos 4\varphi+\cos 8\varphi}-\tan^{-1}\frac{2e^{4a_1}\cosh 4\alpha_1\sin 4\varphi-\sin 8\varphi}{e^{8a_1}-2e^{4a_1}\cosh 4\alpha_1\cos 4\varphi+\cos 8\varphi}\quad\cdots\cdots(56)$$

例題の場合を取つて，$e^{a_1}=2,\ \varphi=0.025$ とおけば，

$$\left.\begin{aligned}&\Re(L_1)=0.0723\,1\\&\Im(L_1)=-1\\&L_2=-1.508\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(57)$$

從つて

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi}{2p}[\sigma_\alpha]_{\alpha=0}-=0.7854\left(=-\frac{\pi}{4}\right)\\&\frac{\pi}{2p}[\sigma\beta]_{\alpha=0}=-0.9982\\&\frac{\pi}{2p}[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=0}=0.5\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(58)$$

輻射應力及圓周應力の曲線は，(49) 式の示す値に近づく。即ち，嚴密式と近似式との間には實用上違ひはないと言つてよい。然るに剪斷應力は，圖-8 に見る通り，その曲線は上昇したまゝ，p/π に近づき，遂に 0 とならない。この點は嚴密式と相違してゐる譯である。

8. 要　結

1 直徑の方向に壓縮される厚肉中空圓筒の應力を，複素函數により，横田方程式を基として，一般的に解いた。其の特別な場合として，孔のない圓筒の應力式，並に，外部から水壓を受ける厚肉中空圓筒の應力式が導き出されることを知つた。解式には，初め，無限級數が含まれてゐたけれども，其の第 m 項までを保存し，以下を近似的に，單一函數で置きかへることに依つて，計算の勞を著しく減らすことが出來た。この近似式は，m を大きく定める程正確な値を與へ，又，肉が厚い程（α_1 が大きい程）m は小さくて足るから，計算が樂になる。而して，その結果は，嚴密式に從つて求めた値に實用上一致することを知ることが出來た。

尙例として，孔徑が外徑の 1/2 なる場合について計算し，最大應力は荷重の作用點に現はれることを確かめ得た。

以上の解法に當つては，久野先生から，御懇切な御教示をいたゞいた。擱筆するに際して，厚く御禮を申上げる次第である。