

- 48) Determinazioni sperimentali dei coefficienti di scabrezza di grandi gallerie e condotte forzate in cemento armato. En. El., 1935-4.
- 49) Visentini, Risultati di nuove misure eseguite su grandi canali per la determinazione del coefficiente di scabrezza. En. El., 1936-7.
- 50) Bay, Determinazione dei coefficienti di scabrezza per il canale di Turbigo. En. El., 1936-7.]
- 51) Gregorig, Sulle perdite di carico nelle condotte forzate industriali metalliche. En. El., 1936-7.
- 52) Scimemi, Veronese, Il regime uniforme idraulico nelle condotte di acciaio senza saldatura. A. d. L. P., 1936-7.
- 53) Jaeger, Bestimmung der Rauheitszahl für Druckleitungen. Schw. B., 1935 上 14.
- 54) Samarin, Kunstliche Rauigkeit. W. u. W., 1935 H. 4.
- 55) Kimmich, Der Reibungswiderstand in Eternit-Druckrohren. W. u. W., 1938 H. 19/20.
- 56) Gentilini, Determinazione dei coefficienti di scabrezza di un tronco del canale Villorosi. En. El., 1938-5.
- 57) Ricerche sperimentali sulle perdite di carico nei tubi di eternit. En. El., 1938-7.
- 58) Rogers, Friction in hydraulic models. Civil Eng., 1939-6.
- 59) McCaughan, Kutter's  $n$  in Trinity River Floodway. Civil Eng., 1939-10.
- 60) Büllow, Der Abfluss in eisernen Spundwandkanälen. Baut., 1939 H. 17.

以上の中で 43) は理論と実験, 44) は実験, 45) はクッターの公式による粗度係数である。46) は暗渠とトンネルに関するもので抄譯, 48) は  $n$  の測定, 50) は實測, 51) は鐵管の粗度係数の實測, 52) は管, 54) は魚道の様な底に大きい凹凸のある場合に之の影響を粗度の様に取扱つたもの, 57) は抄譯, 59) は實測である。60) は鋼矢板壁水路の粗度である。

## 傾斜荷重を受くる場合のエラスチカ並びに弓に於ける應力解析

正會員 江 藤 禮\*

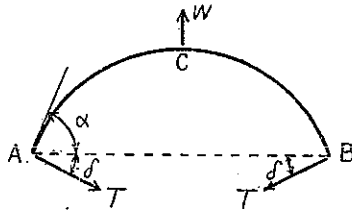
**概要** 弓に矢を番へ之を引き締りたる時に曲材に働く力は弦の斜張力と矢の水平推力の三者である。矢を放てば曲材に貯へられたる歪エネルギーが矢の運動エネルギーに轉換されることは當然である。本文は實際に於ける弓の問題とは離れてゐるが之に對する豫備研究として特殊の場合に就いて静力學的に應力解析を試みた。なほ材は完全弾性で撓み易く且つ如何なる變形に於ても絶対に破損しないと假定する。先づ傾斜荷重を受くる場合のエラスチカに就て考察を行ふ。

### 1. 基本式の誘導

圖-1 に示したのは長さ  $l$  なる水平棒の兩端に水平方向と  $\delta$  の傾角をもつ等大の外力  $T$  を働かせ、中點  $C$  で支へた場合の状態で  $C$  點の反力を  $H$  とする。圖-2 の如く  $C$  點で固定し  $A$  端に外力  $T$  を働かせ、棒が描く曲線上の任意點  $m$  を考へ  $Am$  の長さを  $s$ , 切線の傾角を  $\theta$ , 曲げモーメントを  $M$ , 棒の剛度を  $EI=B$  で表はす。

\* 工學士 神戸高等工業學校教授

圖-1.



$T$  の分力:  $T_x = T \cdot \cos \delta$ ,  $T_y = T \cdot \sin \delta$

$$M = -B \frac{d\theta}{ds} = T_x y + T_y x$$

上式を微分し  $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$ ,  $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$  なる関係を用ひれば

$$B \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -T \cdot \sin(\delta + \theta)$$

今  $\phi = \delta + \theta$  と置けば

$$B \frac{d^2 \phi}{ds^2} + T \cdot \sin \phi = 0 \quad (1)$$

上式を積分するのであるが A 點に於ける條件  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ ,  $\theta = \alpha$  によつて積分常数が定められる。その結果は

$$\frac{B}{2} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + T(\cos \psi - \cos \phi) = 0 \quad (1)$$

但し  $\psi = \delta + \alpha$

變數置換として  $s$  の代りに  $u$  を,  $\phi$  の代りに  $\varphi$  を用ふ。

$$u = s \sqrt{\frac{T}{B}} = \frac{s}{\lambda} \quad (2)$$

$$k = \sin \frac{\psi}{2}, \quad \psi \geq \phi$$

(1) 式は

$$\frac{d\phi}{du} = \sqrt{2(\cos \phi - \cos \psi)} = 2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

次に  $k \cdot \sin \varphi = \sin \frac{\phi}{2}$  と置く。之より

$$\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \varphi} = d\varphi = \cos \frac{\phi}{2}$$

$$\frac{d\phi}{du} = 2k \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

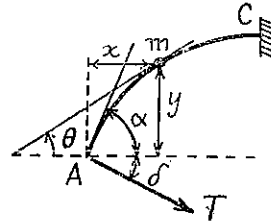
$$du = \frac{d\phi}{2k \cdot \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{d\varphi}$$

$$u = \int_0^\varphi du = \int_{\pi/2}^\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} - K$$

$$\text{但し } K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{d\varphi}$$

即ち  $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} = K + u$

圖-2.



1) この式は [附記] の (1) に記載しあるも、その解説はすべて所謂 Euler's Elastica に就て行はれてゐる。

之より

$$\varphi = am(K+u)$$

$$\frac{d\phi}{du} = 2k \cdot cn(K+u)$$

$$\sin \frac{\phi}{2} = k \cdot sn(K+u)$$

一般に  $\varphi = am u$  なる函数を見るに  $u$  が  $\pm 2K$  だけ變化すれば  $\varphi$  は  $\pm \pi$  だけ變化し  $0 \leq u \leq 2K$  の範圍には  $0 \leq \varphi \leq \pi$  が對應する。今  $|u| \leq K$  とすれば

$$am(K+u) = \pi - am(K-u)$$

$$sn(K+u) = sn(K-u)$$

$$cn(K+u) = -cn(K-u)$$

之より

$$\frac{d\phi}{du} = -2k \cdot cn(K-u) \dots\dots\dots(4)$$

$$\sin \frac{\phi}{2} = k \cdot sn(K-u) \dots\dots\dots(5)$$

中點 C に於ける  $u$  の値を  $v$  なる記號で表はせば  $\theta = 0$  なるため

$$\sin \frac{\delta}{2} = k \cdot sn(K-v) \dots\dots\dots(6)$$

(4), (5), (6) 式が曲線に関する基本式となる譯で  $\psi$  を與へれば  $k$  と  $K$  とは自ら定まり、更に  $\delta$  を與へれば式(9)から  $v$  が求まる。

2. 座標位置, 外力, エネルギーの算定

圖-3 に於て曲線上の任意點  $m$  の直交座標  $x, y$  を求めんには先づ補助座標として外力の方向を  $X$  軸とし、之に直角に  $Y$  軸を選ぶ。今

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{T}} = \frac{l}{2v} \dots\dots\dots(7)$$

と置けば  $dX = \lambda \cdot \cos \phi \cdot du$

然るに  $\cos \phi = 1 - 2k^2 \cdot sn^2(K-u)$

$$\begin{aligned} X &= \lambda \int_0^u \{1 - 2k^2 \cdot sn^2(K-u)\} du \\ &= \lambda \left\{ -u + 2E\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2E[am(K-u)] \right\} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

次に  $dY = \lambda \cdot \sin \phi \cdot du$

然るに  $\sin \frac{\phi}{2} = k \cdot sn(K-u), \cos \frac{\phi}{2} = dn(K-u)$

$$\begin{aligned} Y &= 2\lambda k \int_0^u sn(K-u) \cdot dn(K-u) \cdot du \\ &= 2\lambda k \cdot cn(K-u) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

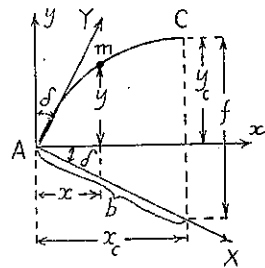
中點 C の座標  $X_c, Y_c$  に対しては  $u$  の代りに  $v$  を用ひればよい。  $X, Y$  を知れば  $x, y$  は次式で與へられる。

$$\begin{cases} x = X \cos \delta + Y \sin \delta \\ y = -X \sin \delta + Y \cos \delta \end{cases} \dots\dots\dots(10)$$

$X$  方向に於て AD の長さを  $b$  とすれば

$$b = \frac{x_c}{\cos \delta} = X_c + Y_c \tan \delta \dots\dots\dots(11)$$

圖-3.



鉛直方向に於て CD の長さを  $f$  とすれば

$$f = y_c + x_c \tan \delta = \frac{Y_c}{\cos \delta} \dots \dots \dots (12)$$

特に  $\delta = 0$  の場合は

$$b = \frac{l}{2} \left\{ \frac{2E \left( \frac{\pi}{2} \right)}{K} - 1 \right\}, \quad f = l \frac{h}{K}$$

次に外力及び反力の大きさは (2) 式により次式で求められる。

$$T = \frac{4B}{l^2} T', \quad W = \frac{4B}{l^2} W' \dots \dots \dots (13)$$

茲に  $T'$  と  $W'$  は係数で  $T' = v^2$ ,  $W' = 2v^2 \cdot \sin \delta$

最後に棒内に貯へられる歪エネルギー  $A$  を算出して見る。

$$A = 2 \int_0^{l/2} \frac{1/2 M^2}{2B} ds = \frac{1}{B} \int_0^{l/2} M^2 ds$$

然るに

$$s = \lambda \cdot u, \quad ds = \lambda \cdot du$$

$$M = -B \frac{d\theta}{ds} = -\frac{B}{\lambda} \frac{d\phi}{du} = \frac{2kB}{\lambda} \operatorname{cn}(K-u)$$

茲に  $v = \frac{l}{2\lambda}$  を用ひれば

$$A = \frac{4l^2 B}{\lambda} \int_0^v \operatorname{cn}^2(K-u) \cdot du$$

$$= \frac{8B}{l} A'$$

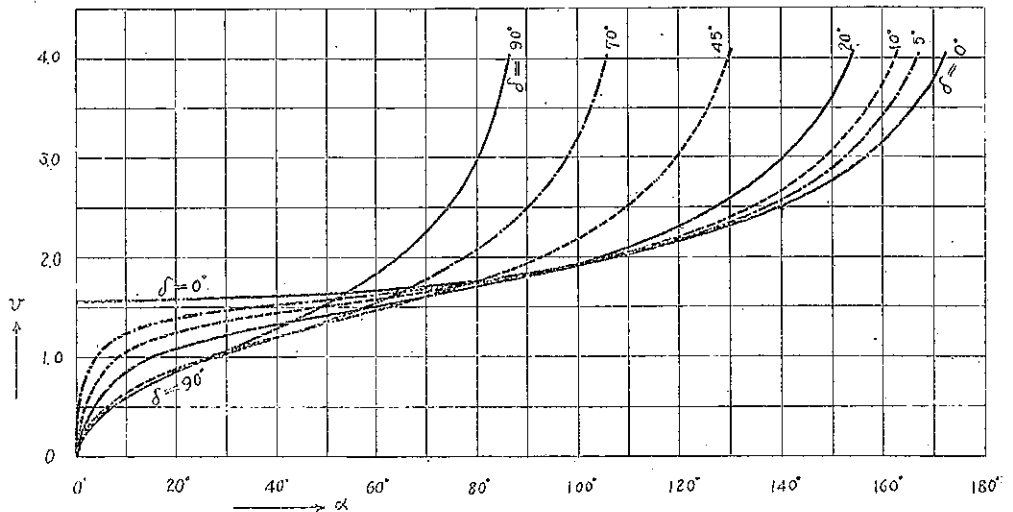
但し  $A'$  は係数で

$$A' = v \left\{ E \left( \frac{\pi}{2} \right) - E[\operatorname{am}(K-v)] - (1-k^2)v \right\} \dots \dots \dots (14)$$

3. 基本式の吟味

棒の全長  $l$  を一定として置く。  $\delta$  及び  $\alpha$  を任意に與へれば基本式によつて曲線の形が定まり、スパン ( $2x_0$ )、半弦長 ( $b$ )、矢束 ( $f$ )、外力 ( $T$ )、反力 ( $W$ )、エネルギー ( $A$ ) 等も之に從屬する。

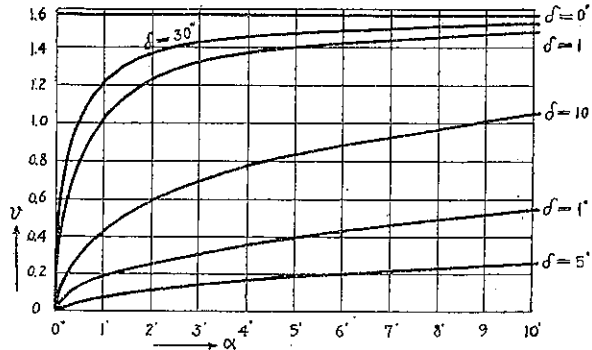
圖-4.



傾角  $\delta$  の範囲は  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  であるが  $\delta$  を一定にして  $T$  を増大すれば端角  $\alpha$  も増大してループを生じ極限に於ては  $\max \alpha = \pi - \delta$  となる。

圖-5.

(6) 式で定められるパラメーター  $v$  は曲線の諸性質を求めるに必要な数値で之も  $\alpha$  と  $\delta$  に從屬しその概要を圖-4 並びに 圖-6 に示す(詳細な数値表は茲に省略)。  $\delta$  が微小なる場合を考ふ。  $\alpha$  が有限の場合は  $v=K$  にして  $\alpha$  も微小となれば  $v$  は減じ  $\alpha$  が  $\delta$  よりも更に高次の微小値となれば  $v=0$  となる。特に  $\delta=0$  の場合には  $\alpha$  の如何に拘はらず  $v=K$  となる。この極限附近に於ける状態を圖-5 に示す。



4. オイラーの限界荷重

特別な場合として棒の両端に働く外力の方向が AB 直線に一致する場合を考へる。この曲線は所謂オイラーのエラスチカ<sup>2)</sup>である。即ち  $\delta=0, W=0$  にして  $\alpha=\alpha_0, T=P$  で表はすならば  $k = \sin \frac{\alpha_0}{2}, \sin \frac{\theta}{2} = k \cdot \sin(K-u)$  を得る。腹に於ては  $\theta=0$  であるから  $\sin(K-u) = \frac{1}{k}$ 、従つて  $u = (2m+1)K$  但し  $m$  は零或は正整数を意味す。理論上からは一般にエラスチカの波<sup>m</sup>は整数個 ( $n$  とす) あつて  $u = 2nK$  が全長  $l$  に對應する。而して次式が成立す。

$$\sqrt{P} = \frac{2nK}{l} \sqrt{B} \dots \dots \dots (15)$$

即ち  $\sqrt{P}$  は  $K$  に正比例する。而て  $K$  は  $\alpha_0$  に従つて變化するが  $\alpha_0=0$  なる場合には  $K = \frac{\pi}{2}$ 、従つて

$$\sqrt{P} = \frac{1}{2} \sqrt{B} \dots \dots \dots (16)$$

となる。之は所謂オイラーの限界荷重を與へる式で、この限界荷重以下に於て棒が直線を保つのは當然である。

5. 弓の問題

實際の弓にあつては之に弦を張らない最初の形は一般に直線ではなく、逆に反りを附す。之はエネルギー利用の點から當然である。然し茲には簡單のため直線材の場合を取り扱ひ之に弦を張ればその曲線は[4]に説明したオイラーのエラスチカであつて、弦長を  $2a$  とすれば之が最初のスパンを與へる。矢を番へて引き縮めればスパンが短縮し圖-1 の状態となるが、この場合に  $\delta$  や  $\alpha$  等は勝手に變化する譯でなく一つの制限を受けてゐる。即ち弦長は最初のスパンに等しく常に一定であると言ふ條件が存在する。(11)式に於て  $b$  の代りに  $\beta = \frac{a}{l/2} = \frac{a}{\lambda v}$  を用ひれば之と(6)式とから  $\delta, \alpha$  に對應する  $\beta$  の値が求まる。圖-6 には之を點線で示してあるが  $\beta > 1$  なる場合は實際の弓では考へられず、又  $\beta < 0$  は曲線がループをなす状態でも起り得ない。

圖 7 には  $\gamma = \frac{\alpha_0}{l/2} = \beta \cdot \cos \delta$  及び  $\xi = \frac{f}{l} = \frac{f}{2\lambda v}$  を用ひてスパン及び矢束の變化状態が示される ( $\gamma$  を實線で、 $\xi$  を點線で描く)。

次に圖-1 於て  $T$  は弦の張力を、 $W$  は矢の推力を意味し夫らの大きさは (13) 式で與へられ、之を圖-8 に示す ( $T$  を實線で、 $W$  を點線で示す)。

圖-9 には (14) 式を用ひてエネルギーに關する係數  $A'$  の變化を示す。

例題] 圖表を用ふれば 2 桁程度の概算が出来る。更に精密な數値を必要とする場合には原式によつて計算を行へばよい。たとへば  $l=200 \text{ cm}, 2a=160 \text{ cm}, E=16 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2,$

$$I=0.25 \text{ cm}^4 \text{ とすれば}$$

2) [附記] の (1) 或は (3) を参照

圖-6.

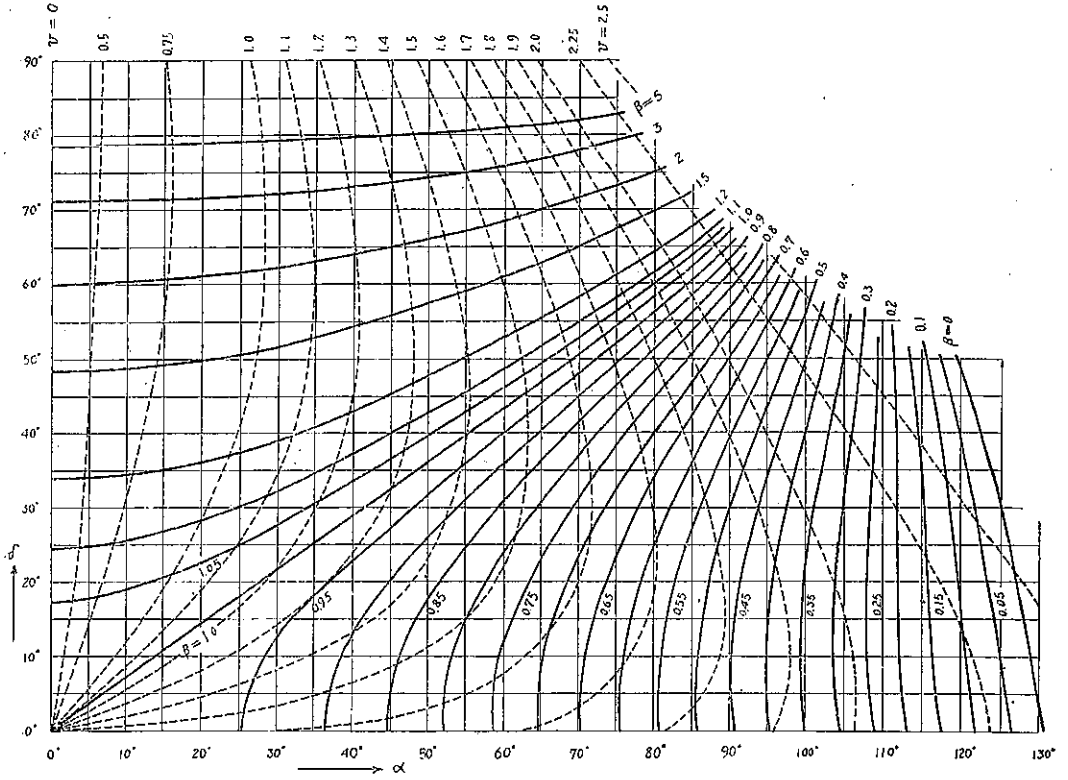


圖-7.

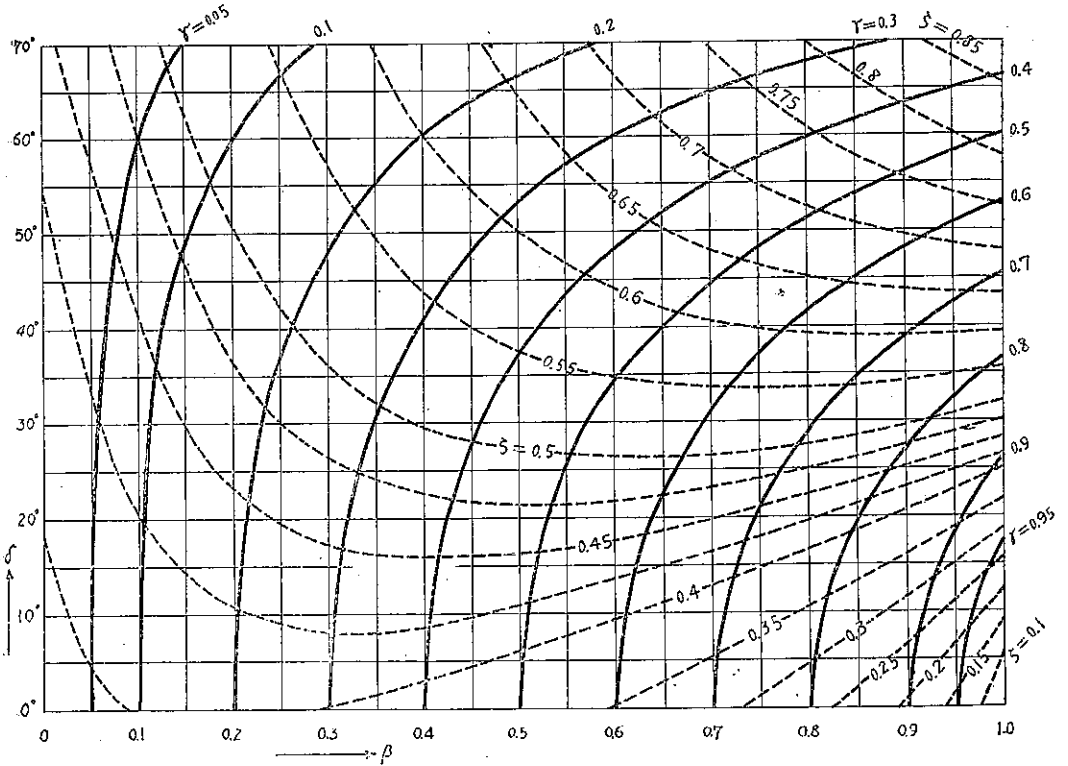


圖-8.

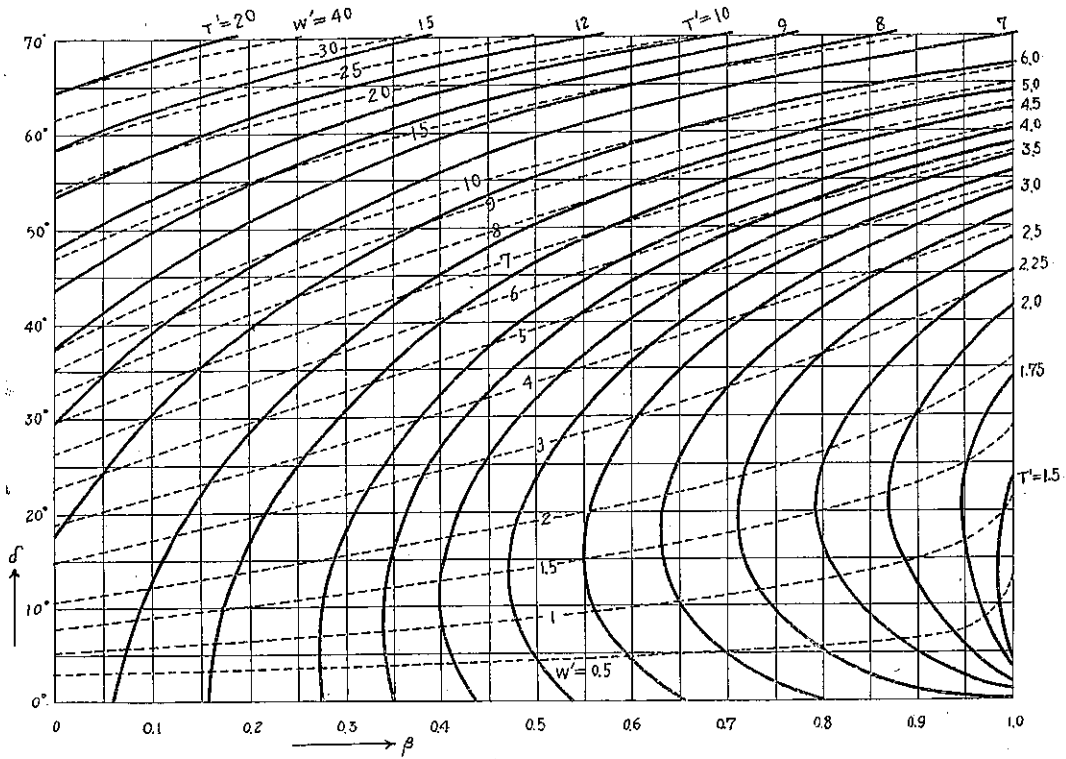
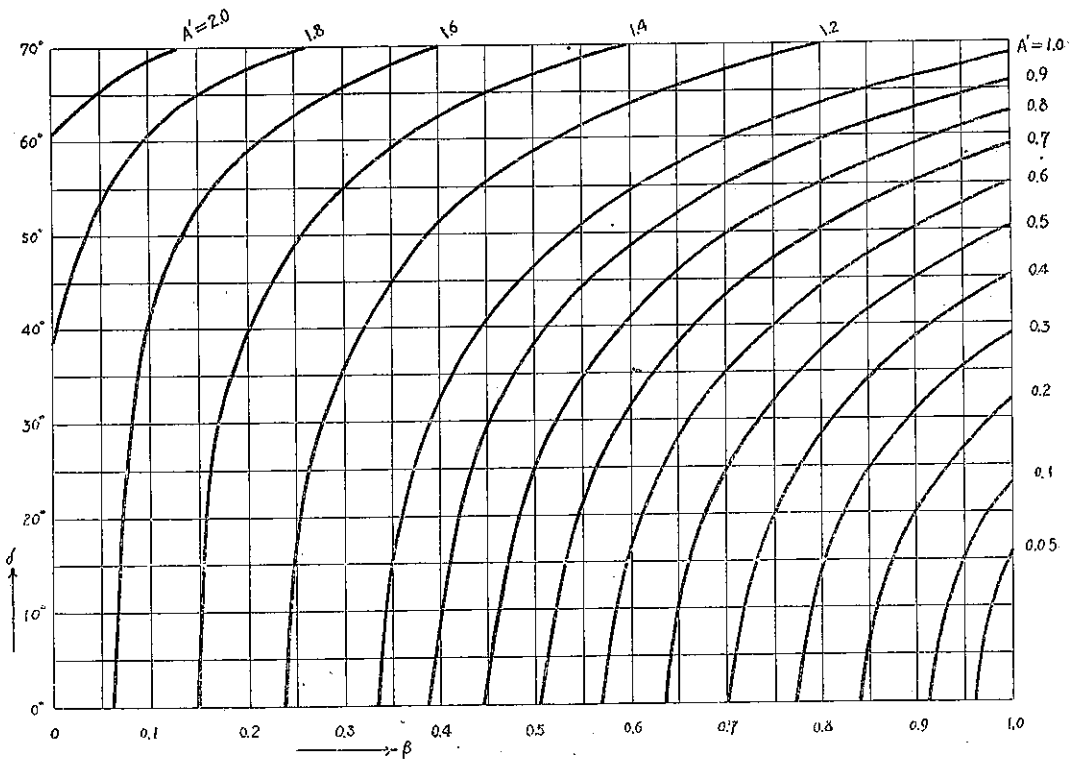


圖-9.



$$\beta = 0.8, \quad B = EI = 4 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}, \quad \frac{4B}{l^2} = 4 \text{ kg}, \quad \frac{8B}{l} = 16 \times 10^2 \text{ kgcm}$$

圖表により

$\delta = 0^\circ$ の場合	$\gamma = 0.8$	$\xi = 0.260$	$T' = 2.75$	$W'' = 0$	$A' = 0.26$
$\delta = 10^\circ$ "	0.785	0.342	2.36	0.82	0.28
$\delta = 20^\circ$ "	0.755	0.430	2.22	1.51	0.33
$\delta = 30^\circ$ "	0.695	0.520	2.32	2.32	0.42

弦の張力は  $T = \frac{4B}{l^2} \cdot T' = 4T'$  kg により夫々 11.0, 9.4, 8.9, 9.3 となり矢の推力は  $W = \frac{4B}{l} W''$  kg により夫々 0, 3.3, 6.0, 9.3 となる。

次に  $\delta = 0^\circ$  と  $\delta$  のある値に於ける歪エネルギーの差の全部が矢の運動エネルギー ( $V$  なる記號で表はす) に轉換するものと假定すれば次の様になる。

$$\delta = 10^\circ \text{ の場合 } V = \frac{8B}{l} (0.28 - 0.26) = 3 \times 10^2 \text{ kgcm}$$

$$\delta = 20^\circ \text{ " } \quad \quad \quad (0.33 - 0.26) = 11 \times 10^2$$

$$\delta = 30^\circ \text{ " } \quad \quad \quad (0.42 - 0.26) = 26 \times 10^2$$

なほ弓と矢の動力學に關する考究は他の機會に譲ることとする。

【附記】 エラスチカに關聯ある參考文獻の二、三を示せば次の通りである。

- (1) Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1927, 401 頁
- (2) A. G. Greenhill, The Applications of Elliptic Functions, 1892, 87 頁
- (3) Handbuch der Physik, Bd VI. Mechanik der Elastischen Körper, 1928, 189 頁
- (4) G. H. Halphen, Traité des Fonctions elliptiques et de leurs applications, Tome II, 1888, 192 頁  
Chapitre V. La courbe élastique plane sous pression normale uniforme

なほ數値計算を行ふに當つては次の書籍によつた。

A. M. Legendres Tafeln der Elliptischen Normalintegrale, 1831.