論 說 報 告

第27卷第5號 昭和16年5月

應用力学
構造物

振動問題に對する相反作用の定理の應用と Rayleigh の原理に就いて

正會員 工 最 上 武 雄*

概 要 相反作用の定理を振動の問題に應用して彈性體の自由振動の振動數を求むる公式を求め，之れは通常の勢力式に依る方法（卽ち Rayleigh の方法）の擴張なる事，及び Rayleigh の原理が此の場合には如何になるかを論じ，又第一次振動のみならず第二次，第三次‥‥の振動の振動數を求め，且つ其等の精度を逐次高めて行く方法を示した.

1) 棒の振動に關する問題は古來既に論じ盡されてゐる樣に思はれる。しかし棒の振動を例として彈性體の振動に關する問題に相反作用定理を應用すれば，通常の勢力式に依る方法（卽ち Rayleigh の方法）を特殊の場合として含む振動數に關する公式が求められ，其の場合に逐次近似も可能である事，又此の公式に於ては所謂 Rayleigh の原理がどうなるかと言ふ事を論じて見たい。

2) 棒の撓み自由振動の方程式が次ぎの如くである事は良く知られてゐる處でるあ。

$$\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

茲に η: 撓み　ρ: 棒の單位長さの質量　E: 棒の材料のヤング係數

I: 棒の斷面の斷面二次モーメント

又は積分方程式の形で書けば

$$\eta=-\int_0^l\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}G(x,s)\,ds \quad \cdots\cdots(2)$$

茲に l: 棒の長さ

$G(x,s)$: 棒の s 斷面に 1 なる靜荷重をかけた時 x 斷面の撓みをあらはす函數

處で

$$\eta=\eta_0e^{i\sigma t} \quad \cdots\cdots(3)$$

とすれば (1), (2) は夫々

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)-\rho\sigma^2\eta_0=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\eta_0=\sigma^2\int_0^l\rho\eta_0G(x,s)\,ds \quad \cdots\cdots(5)$$

となる。

3) 扨て一つの彈性體に $P_1, P_2, \cdots, P_n$ なる力の一系と $P_1', P_2', \cdots, P_n'$ なる力の一系が夫々別々に點 1, 2, ‥‥, n に作用し別々に平衡を保つ時 P_i なる力に依り P_i' の方向に生ずる變位を δ_i, P_i' なる力に依り P_i の方向に生ずる變位を δ_i' とすれば

$$P_1\delta_1'+P_2\delta_2'+\cdots\cdots+P_n\delta_n'=P_1'\delta_1+P_2'\delta_2+\cdots\cdots+P_n'\delta_n \quad \cdots\cdots(6)$$

なる關係がある。これは Maxwell-Betti 又は Rayleigh の相反作用定理として知られてゐるものである。

扨て振幅 $\varphi(x)$, 週期 $2\pi/\sigma$ で振動してゐる一系と，$p(x)/1$ の強度の靜荷重に依り $\eta_1(x)$ なる靜力學的撓みを生じてゐる一系を考へる。勿論端部の條件等境界條件は兩者相等しいものとする。振動してゐる系は $\sigma^2\varphi(x)e^{i\sigma t}\rho\,dx$ なる慣性抵抗を導入すれば靜力學の問題となるから (6) が適用出來て

---

* 工學士 東京帝國大學助教授

$$\int_0^l p(x)\varphi(x)e^{i\sigma t}dx=\int_0^l \sigma^2\varphi(x)e^{i\sigma t}\rho\eta_1(x)dx$$

$$\therefore\quad \int_0^l p(x)\varphi(x)dx=\int_0^l \rho\sigma^2\varphi(x)\eta_1(x)dx=\sigma^2\int_0^l \rho\varphi(x)\eta_1(x)dx \quad\cdots\cdots(7)$$

處で $G(x,s)$ の定義に依り

$$\eta_1(x)=\int_0^l p(s)G(x,s)ds \quad\cdots\cdots(8)$$

であるから

$$\sigma^2\int_0^l \rho\varphi(x)\eta_1(x)dx=\sigma^2\int_0^l \rho\varphi(x)dx\int_0^l p(s)G(x,s)ds=\sigma^2\int_0^l p(s)ds\int_0^l \rho\varphi(x)G(x,s)dx$$

$$=\sigma^2\int_0^l p(x)dx\int_0^l \rho\varphi(s)G(x,s)ds \quad\cdots\cdots(9)$$

但し (9) では $G(x,s)=G(s,x)$ の關係が使つてある。(7) と (9) より

$$\varphi(x)=\sigma^2\int_0^l \rho\varphi(s)G(x,s)ds \quad\cdots\cdots(10)$$

を得る。これは (5) と同一の式である。つまり (7) から (5) が導き出されたのである。又問題を眞直梁と限れば

$$p(x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right) \quad\cdots\cdots(11)$$

であるから

$$\int_0^l p(x)\varphi(x)dx=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^l-\int_0^l\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^l-\frac{\partial\varphi}{\partial x}EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\Big|_0^l+\int_0^l EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial \lambda^2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^l-\frac{\partial\varphi}{\partial x}EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\Big|_0^l+\frac{\partial\eta_1}{\partial x}EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_0^l-\int_0^l\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^l-\frac{\partial\varphi}{\partial x}EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\Big|_0^l+\frac{\partial\eta_1}{\partial x}EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_0^l-\eta_1\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\Big|_0^l$$

$$+\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\cdot\eta_1dx \quad\cdots\cdots(12)$$

若し端部の條件が

(i) 兩端自由

(ii) 兩端自由支持

(iii) 一端固定他端自由

(iv) 一端固定他端自由支持

(v) 兩端固定

の場合とし φ と η_1 とが同じ端部の條件に從ふものとすれば

$$\int_0^l p(x)\varphi(x)dx=\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\cdot\eta_1dx=\int_0^l EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}dx=\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi dx \quad (13)$$

これと (7) とを考へ合せて

$$\int_0^l\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\sigma^2\rho\varphi\right\}\eta_1dx=0$$

處で η_1 は端部の條件さへ滿足してゐさへすれば如何なる函數でも差付かへないのだから

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\sigma^2\rho\varphi=0$$

となり。これは (4) と同じ式である。又 (7) と (13) より

$$\sigma^2=\frac{\int_0^l p(x)\varphi(x)dx}{\int_0^l \rho\varphi(x)\eta_1(x)dx} \quad\cdots\cdots(14)$$

$$=\frac{\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\right)\cdot\varphi(x)\,dx}{\int_0^l \rho\eta_1\varphi(x)\,dx} \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$=\frac{\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\cdot\eta_1\,dx}{\int_0^l \rho\eta_1\varphi(x)\,dx} \qquad \cdots\cdots(16)$$

$$=\frac{\int_0^l EI\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx}{\int_0^l \rho\eta_1\varphi(x)\,dx} \qquad \cdots\cdots(17)$$

となる。以上の 4 つの形に振動數を求める式が書ける事が分かる。(17) で $\eta_1=\varphi$ と置けば

$$\sigma^2=\frac{\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \rho\varphi^2 dx}$$

$$=\frac{\int_0^l \frac{1}{2EI}\left(EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \frac{1}{2}\rho\varphi^2 dx} \qquad \cdots\cdots(18)$$

となり此れは通常の勢力式に依る公式（即ち Rayleigh の方法に依る公式）である。故に (14)～(17) は此の公式の擴張と見る事が出來る。

4) 處で (18) の通常の公式（即ち Rayleigh の方法）を使ふ場合であると φ に (4) 又は (5) を滿足する η。以外の函數を使ふ時即ち近似的な函數を使ふ場合には求めた振動數は本當の振動數より大きくなる。

從つて σ^2 は大きくなると言ふ事は一般に言へる事であり證明も出來る[1]。これが所謂 Rayleigh の原理である。しかし其れを擴張した形 (14) では必ずしもさう言つた事は言へるとは限らない。それを見るには

$$\sqrt{\rho(x)}\,\varphi(x)=\zeta(x) \qquad \sqrt{\rho(x)\rho(s)}\,G(x,s)=k(x,s) \qquad \cdots\cdots(19)$$

と置いて (10) を書き直せば

$$\zeta(x)=\sigma^2\int_0^l \zeta(s)k(x,s)\,ds \qquad \cdots\cdots(20)$$

$k(x,s)$ は對稱核であるから (20) の固有値を σ_i^2 それに對應する固有函數を $\zeta_i(x)$ とすれば

$$k(x,s)=\sum_i\frac{\zeta_i(x)\zeta_i(s)}{\sigma_i^2} \qquad \cdots\cdots(21)$$

又任意の函數を ζ_i で展開出來るから

$$\frac{p(x)}{\sqrt{\rho(x)}}=\sum_j k_j\zeta_j(x) \qquad \cdots\cdots(22)$$

とすれば ζ_s が直交函數である事に注目し且つ法化されてゐるとすれば

$$\int_0^l \zeta_i(x)\zeta_j(x)\,dx=0 \quad (i\neq j) \qquad \int_0^l \{\zeta_i(x)\}^2 dx=1 \qquad \cdots\cdots(23)$$

であるから (8), (19), (21), (22) より

$$\eta_1(x)=\int_0^l p(s)G(x,s)\,ds=\int_0^l\sum_j k_j\sqrt{\rho(s)}\,\zeta_j(s)\frac{1}{\sqrt{\rho(x)\rho(s)}}\sum_i\frac{\zeta_i(x)\zeta_i(s)}{\sigma_i^2}\,ds$$

---

1) Rayleigh's principle についての詳細は G. Temple & W. G. Bickley "Rayleigh's principle" 又は G. Temple "The theory of Rayleigh's Principle as applied to continuous systems." Proc. Roy. Soc. A (1928). 又この max.-min. の性質については Courant. Hilbert "Methoden der Mathematischen Physik" Bd. 1. p. 344 以下にもあり。又 Rayleigh "Theory of sound" Vol 1, § 88. § 89. 參照。

$$=\sum_i \frac{k_i}{\sigma_i^2}\varphi_i(x),\quad \text{茲に}\quad \sqrt{\rho}\,\varphi_i(x)=\zeta_i(x) \qquad\cdots\cdots(24)$$

今
$$\sqrt{\rho}\,\varphi'=\zeta'=\sum_i c_i\zeta_i \qquad\cdots\cdots(25)$$

なる ζ' を考へると

$$\sigma^2\int_0^l \rho\eta_1\varphi' dx=\sigma^2\int_0^l \zeta'\sqrt{\rho}\,\eta_1 dx=\sigma^2\int_0^l \sum_j c_j\zeta_j\sum_i \frac{k_i}{\sigma_i^2}\zeta_i(x)\,dx=\sigma^2\sum_i \frac{c_ik_i}{\sigma_i^2} \qquad\cdots\cdots(26)$$

又
$$\int_0^l p\varphi' dx=\int_0^l \sum_i \sqrt{\rho}\,k_i\zeta_i\varphi' dx=\sum_i\sum_j\int_0^l k_ic_j\zeta_i\zeta_j dx=\sum_i c_ik_i \qquad\cdots\cdots(27)$$

故に φ の代りに φ' とすれば (14) は

$$\sigma'^2=\frac{\int_0^l p\varphi' dx}{\int_0^l \rho\eta_1\varphi' dx}=\frac{\sum_i c_ik_i}{\sum_i \frac{c_ik_i}{\sigma_i^2}} \qquad\cdots\cdots(28)$$

28) より $\varphi'=\varphi_i$ 即ち $c_i=1,\ c_j=0\ (i\neq j)$ なら $\sigma'^2=\sigma_i^2$ となる事が分かる。若し今 $c_ik_i>0$ の如き ζ', p を選んだとすれば

$$\frac{e_i}{f_i}=\frac{c_ik_i}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_i^2}c_ik_i}=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2}>0\quad \text{且つ}\ e_i>0,\ f_i>0 \qquad\cdots\cdots(29)$$

となる。又固有値の性質に依り

$$\frac{e_1}{f_1}<\frac{e_2}{f_2}<\cdots\cdots<\frac{e_n}{f_n}<\cdots\cdots$$

であるから
$$\frac{e_1}{f_1}-\frac{e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n+\cdots\cdots}{f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n+\cdots\cdots}$$
$$=\frac{f_1f_2\left(\frac{e_1}{f_1}-\frac{e_2}{f_2}\right)+f_1f_3\left(\frac{e_1}{f_1}-\frac{e_3}{f_3}\right)+\cdots\cdots+f_1f_n\left(\frac{e_1}{f_1}-\frac{e_n}{f_n}\right)+\cdots\cdots}{f_1(f_1+f_2+\ \cdots+f_n+\cdots\cdots)}<0 \qquad\cdots\cdots(30)$$

故に
$$\frac{c_1k_1+c_2k_2+\cdots\cdots\cdots+c_nk_n+\cdots\cdots}{c_1k_1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}c_2k_2+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}c_3k_3+\cdots\cdots}>\frac{c_1k_1}{c_1k_1}=1\qquad \therefore\ \sigma'^2=\frac{\sum_i c_ik_i}{\sum_i \frac{c_ik_i}{\sigma_i^2}}>\sigma_1^2$$

又 $c_1=1,\ c_j=0\ (j=2,3,\cdots\cdots)$ なら $\sigma'^2=\sigma_1^2$ であるから

$$\sigma'^2\geqq\sigma_1^2 \qquad\cdots\cdots(31)$$

又同様に

$c_1=0,\ c_2=0,\cdots\cdots c_{i-1}=0,\ c_i\neq0$ 即ち ζ' が $\zeta_1\sim\zeta_{i-1}$ に直交である様に選んだとすれば（勿論 $c_jk_j>0$ として）

$$\sigma'^2\geqq\sigma_i^2 \qquad\cdots\cdots(32)$$

と云ふ通常公式（即ち Rayleigh の方法）の場合の如き事が言へるのである。

所で c_ik_i が正でなければ (29) の $e_i>0, f_i>0$ と云ふ事が言へなくなるから (30) が言へず．從つて (31) 又は (32) の事柄が常に成立つとは言へなくなる。

圖-1 a.

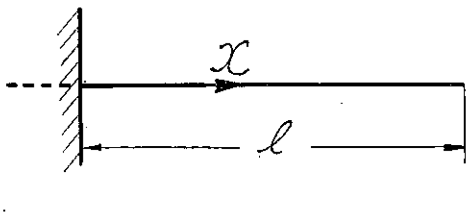
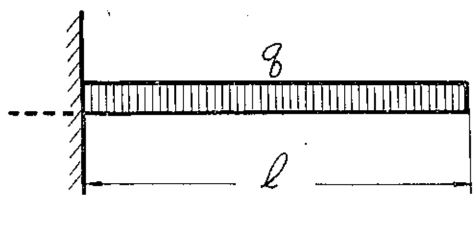


圖-1 b.



例で之れを見て見やう。

圖-1 (a) の如き斷面一樣な片持梁の自由振動について考へて見る。

$p(x)$ としては最も簡單な圖-1 (b) の如き等分布荷重を受けた場合を取ると

$$\eta_1(x)=\frac{ql^4}{2EI}\left(\frac{x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{3l^3}+\frac{x^4}{12l^4}\right)$$

φ として　$x=0$ で $y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=0,$　　$x=l$ で $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$ ……(33)

を滿す最も簡單な式として

$$y_0(x)=\frac{x^2}{24}(6l^2-4lx+x^2)$$

を選ぶ。處が之れは上の η_1 と同じであるからこれでは通常の方法と今の方法と比較が出來ないから (5) 式に依る逐次近似法（後節參照）に依り

$$y_1(x)=\int_0^l \rho y_0(s)\,G(x,s)\,ds=\frac{\rho}{24^2\cdot 70\,EI}(728\,l^6x^2-336\,l^5x^3+28\,l^2x^6-8\,lx^7+x^8) \quad\cdots\cdots(34)$$

なる $y_1(x)$ を求めこれを φ として用ひ (15) 式に依つて見ると

$$\int_0^l \frac{\partial^4\eta_1}{\partial x^4}y_1\,dx=\int_0^l \frac{\rho q}{EI}y_1dx=\frac{4\,366\,l^9q\rho}{24^2\cdot 70\cdot 27(EI)^2}\qquad \int_0^l \eta_1 y_1\,dx=\frac{673\,942}{24^3\cdot 70\cdot 2\,145}\frac{\rho q l^{13}}{(EI)^2}$$

$$\therefore\ \sigma'^2=12.3519\,6\,\frac{EI}{\rho l^4} \quad\cdots\cdots(35)$$

y_1 を φ に用ひて通常公式（即ち Rayl.igh の方法）に依れば

$$\sigma''^2=\frac{\displaystyle\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right)^2dx}{\displaystyle\int_0^l \rho y_1^2dx}=12.3648\,\frac{EI}{\rho l^4} \quad\cdots\cdots(36)$$

となる。正確な値は

$$\sigma^2=12.3623\,6\,\frac{EI}{\rho l^4}\ {}^{2)} \quad\cdots\cdots(37)$$

となり，これで見る如く $\sigma''^2>\sigma^2$ であり Rayleigh の原理があてはまるが $\sigma'^2<\sigma^2$ となつてゐる。計算の手間から行くと (15) に依る方が通常公式よりも幾らか樂な樣である。特に φ に y_0 を用ひる場合には式と同じ値

$$\sigma^2=12.461\,\frac{EI}{\rho l^4}$$

が得られ計算は大分樂である。

5) 通常公式の場合には逐次近似法に依りいくらでも近似度の高い振動數の値を求められる事は知られてゐる事である[3]が，此の擴張された方法でも同樣の事が言へるのである。そしてそれが分かつてゐたから前節の例に於て其の事柄を使つた。今之れを證明する。

(25) の φ' 又は ζ' より次の如き仕方で $\varphi'_{(n)}$ 又は $\zeta'_{(n)}$ を作る。

$$\sqrt{\rho}\,\varphi_{(1)}'=\zeta'_{(1)}=\int_0^l \zeta'\sqrt{\rho(x)\rho(s)}\,G(x,s)\,ds=\int_0^l \sqrt{\rho}\,\varphi' k(x,s)\,ds$$

$$=\int_0^l \sum_i c_i\zeta_i\sum_k \frac{\zeta_k(x)\zeta_k(s)}{\sigma_k^2}ds=\sum_i \frac{c_i}{\sigma_i^2}\zeta_i(x) \quad\cdots\cdots(38)$$

$$\sqrt{\rho}\,\varphi'_{(n)}=\zeta'_{(n)}=\int_0^l \zeta'_{(n-1)}\sqrt{\rho(x)\rho(s)}\,G(x,s)\,ds=\int_0^l \sqrt{\rho}\,\varphi'_{(n-1)}k(x,s)\,ds$$

---

2) Ryleigh "Theory of sound" Vol. 1. p. 278 の表より

3) Temple & Bick'ey 前出

$$=\sum_i \frac{c_i}{\sigma_i^{2n}}\zeta_i(x) \cdots\cdots (39)$$

又は
$$\varphi'_{(n)}=\int_0^l \rho\varphi'_{(n-1)}G(x,s)ds \cdots\cdots (39)'$$

さうすれば (22) と (39) より

$$\int_0^l p\varphi'_{(n)}dx=\int_0^l \sum_j k_j\zeta_j \sum_i \frac{c_i\sigma^{2n}}{\sigma_i^{2n}}\zeta_i dx=\sum_i\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{2n} c_i k_i \cdots\cdots (40)$$

又 (24) と (39) より

$$\sigma^2\int_0^l \rho\varphi'_{(n)}(x)\eta_1(x)dx=\int_0^l \sum_i\sum_j \frac{k_i}{\sigma_i^2}\zeta_i(x)\sigma^2 c_j\frac{1}{\sigma_j^{2n}}\zeta_j(x)dx=\sum_i \frac{c_i k_i}{\sigma_i^{2n+2}}\sigma^2 \cdots\cdots (41)$$

故に (14) に依り

$$\sigma^2=\frac{\sum_i \frac{c_i k_i}{\sigma_i^{2n}}}{\sum_i \frac{c_i k_i}{\sigma_i^{2n+2}}} \cdots\cdots (42)$$

今 $c_1\neq 0$ 即ち第一次振動の場合には

$$\sigma^2=\sigma_1^2\frac{c_1k_1+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{2n}c_2k_2+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)^{2n}c_3k_3+\cdots}{c_1k_1+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{2n+2}c_2k_2+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)^{2n+2}c_3k_3+\cdots} \cdots\cdots (43)$$

處で $\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_n<\cdots$

であり且つ $\sum_i c_ik_i$ が收斂する事は當然であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2=\sigma_1^2 \cdots\cdots (44)$$

又 $c_1=c_2=\cdots=c_{l-1}=0,\ c_l\neq 0$ の場合には同様に

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2=\sigma_l^2 \cdots\cdots (45)$$

である事が證明出來る。即ち (39) の方法で段々精度の高い近似値が求められる。

6) 次ぎに第二次振動の振動の振動數を求むる事を考へやう。前節に於ける方法に依り ζ' より $\zeta'_{(n-1)}, \zeta'_{(n)}$ を求め，この二つより次の如き計算に依り $\zeta'_{(n)}$ を作る。

$$\xi'_{(n)}=\zeta'_{(n-1)}-\lambda\zeta'_{(n)} \cdots\cdots (46)$$

玆に λ は後に決定する常數である。(46) から $\xi'_{(n)}$ は $\zeta'_{(n-1)}, \zeta'_{(n)}$ と同じ端部の條件を滿足する事は直ちに分かる。そこで λ を $\xi'_{(n)}$ と $\zeta'_{(n)}$ とが直交する如く決定する。即ち

$$\int_0^l \xi'_{(n)}\zeta'_{(n)}dx=\int_0^l(\zeta'_{(n-1)}-\lambda\zeta'_{(n)})\zeta'_{(n)}dx=0$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{\int_0^l \zeta'_{(n-1)}\zeta'_{(n)}dx}{\int_0^l\{\zeta'_{(n)}\}^2dx} \cdots\cdots (47)$$

(39) を利用すれば λ は次ぎの如く書ける、

$$\int_0^l \zeta'_{(n-1)}\zeta'_{(n)}dx=\sum_i\frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n-2}} \qquad \int_0^l\{\zeta'_{(n)}\}^2dx=\sum_i\frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n}}$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{\sum_i\frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n-2}}}{\sum_i\frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n}}} \cdots\cdots (48)$$

$$\therefore\ \xi'_{(n)}=\sum_i \frac{c_i}{\sigma_i^{2n-2}}\zeta_i-\lambda\sum_i \frac{c_i}{\sigma_i^{2n}}\zeta_i$$

$$=\sum_j\left\{1-\frac{\sum_i \frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n-2}}}{\sum_i \frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n}}}\frac{1}{\sigma_j^2}\right\}\frac{c_j}{\sigma_j^{2n-2}}\zeta_j \qquad \cdots\cdots(49)$$

$$=\sum_j \mu_j\zeta_j \qquad \cdots\cdots(50)$$

扨て (42) に於て $k_i=c_i$, $n=2n-1$ とすれば

$$\sigma^2=\frac{\sum_i \frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n-2}}}{\sum_i \frac{c_i^2}{\sigma_i^{4n}}} \qquad \cdots\cdots(51)$$

故に $k_i=c_i$ の如き荷重の分布に依り $p(x)$, $\eta_1(x)$ を決めたとし且つ $c_1\neq 0$ とすれば（つまり通常公式に依り第一次振動の振動數を求めたとすれば）(51) の右邊は充分 σ_1^2 に近迫する。又 (48) より λ の値も充分に σ_1^2 に近迫する。依つて $\xi'_{(n)}$ の右邊中括弧の中は $j=1$ に對して零となる事が分かる（つまり $\mu_1=0$）。故に

$$\xi'_{(n)}=\xi'_{(n-1)}-\sigma_1^2\zeta'_{(n)} \qquad \cdots\cdots(52)$$

なる $\xi'_{(n)}$ を ζ' の代りに用ふれば前節の方法に依り第二次振動の振動數が幾らでも良い精度で求められる事は (45) に於て示される如く明らかな事である。

此の樣にすれば第一次振動の振動數を逐次近似法に依り求める場合の途中の計算がそつくり其のまゝ第二次振動の振動數を求める際に利用する事が出來るし，求めた第一次振動の振動數の精度が高まると求め樣とする第二次振動の振動數の精度は自動的に高まる。即ち (14) と (52) より

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^l p(x)\{\zeta'_{(n-1)}-\sigma_1^2\zeta'_{(n)}\}dx}{\int_0^l \rho(x)\eta_1(x)\{\zeta'_{(n-1)}-\sigma_1^2\zeta'_{(n)}\}dx}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^l p(x)\zeta'_{(n-1)}dx-\sigma_1^2\int_0^l p(x)\zeta'_{(n)}dx}{\int_0^l \rho(x)\eta_1(x)\zeta'_{(n-1)}dx-\sigma_1^2\int_0^l \rho(x)\eta_1(x)\zeta'_{(n)}dx},\quad \zeta'_{(i)}=\sqrt{\rho}\,\varphi'_{(i)} \qquad \cdots\cdots(53)$$

この分母，分子に出て來る積分は第一次振動の振動數を求める際に計算するものであるからである。

例　4 節の例の場合を取り

$$\zeta'_{(n-1)}=\frac{1}{24}(6l^2x^2-4lx^3+x^4)$$

$$\zeta'_{(n)}=\frac{\rho}{24^2\cdot 70\cdot EI}(784l^6x^2-336l^5x^3+28l^2x^6-8lx^7+x^8)$$

$$p=1 \qquad \eta_1=\frac{l^4}{24EI}\left(6\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+x^4\right) \qquad \sigma_1^2=12.3623\,6\frac{EI}{\rho l^4}$$

とすれば

$$\int_0^l p\zeta'_{(n-1)}dx=\frac{l^5}{20},\qquad \int_0^l p\zeta'_{(n)}dx=\frac{4\,366\,l^9\rho}{24^2\times 70\times 27\times EI}$$

$$\int_0^l \rho\eta_1\zeta'_{(n-1)}dx=\frac{273\rho l^9}{24\times 2\,835EI},\qquad \int_0^l \rho\eta_1\zeta'_{(n)}dx=\frac{673\,942\rho^2 l^{13}}{24^3\times 70\times 2\,145(EI)^2}$$

$$\therefore\ \sigma_2^2=\frac{0.0500\,000-12.3623\,6\frac{4\,366}{576\times 70\times 27}}{\frac{273}{24\times 2\,835}-12.3623\,6\frac{673\,942}{13\,824\times 2\,145\times 70}}\frac{EI}{\rho l^4}$$

$$=\frac{0.0500\,000-0.0495\,792}{0.0040\,1234\,5-0.0040\,1138\,7}\frac{EI}{\rho l^4}$$

$$=\frac{0.0004\,208}{0.0000\,0085\,8}\frac{EI}{\rho l^4}$$

$$=490.4\frac{EI}{\rho l^4}\quad\cdots\cdots\cdots(54)$$

正確な値は

$$\sigma_2^2=(4.6940\,98)^4\frac{EI}{\rho l^4}=485.5215\,3\frac{EI}{\rho l^4}\text{ [4)]}\quad\cdots\cdots\cdots(55)$$

であるから (54) は大體 1/100 の精度になつてゐる。これは勿論前節の方法でもつと良い精度にする事が出來る。

尙ほ第三次，第四次‥‥の振動の振動數をも同樣の手段に依り求められる。

4) Rayleigh "Theory of sound" Vol. I. p. 278 の表より。