論 說 報 告

第27巻第4號 昭和16年4月

中空壓縮材の挫屈に關する理論的研究 (3, 4)*

正會員 横 田 周 平**

要 旨 先に發表せる第 1, 2 篇に於て求めた中空壓縮材に對する安定條件を諸種の組合せ壓縮材及び管柱に就て計算し，次に中空壓縮材主として組合せ壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響を明らかにした。

目 次

3. 諸種の組合せ壓縮材及び管柱に對する安定條件の計算

1. 緒 言

著者は第 2 編に於て中空壓縮材の撓み曲線に對する微分方程式を導いて次の如き式を得た。

$$EI_0\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

但し E: 材料の彈性係數

I_0: 挫屈しない前の壓縮材の斷面の慣性モーメント

P: 中心軸荷重

β^2: 中空壓縮材の內部的機構を示す特性的數値

挫屈の限界點附近の解を求むる事とし $\dfrac{P}{EI_0}=\dfrac{1}{\alpha^2}$ と置き換へれば次の式より出發して良い事になる。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{\alpha^2}\left(1+\frac{\beta^2y^2}{\alpha^4}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(34)$$

α と β とは共に長さのデイメンションを有する。

此の微分方程式を解けば中空壓縮材の挫屈を不安定ならしめざる條件として，換言すれば中空壓縮材が不安定ならざる爲の條件として次の條件が導かれる。

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}\leq\frac{2}{3}$$

---

* (1, 2) は第 27 卷第 3 號に掲載された

** 內務技師 工學士 內務省土木試驗所

α^2 に對しては $\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI_0}\fallingdotseq\frac{\pi^2}{L^2}$ (L: 壓縮材の長さ)

と置いて良い。結局中空壓縮材の安定，不安定の問題はその壓縮材に固有な數値である β^2 を求むる事に歸する。

β^2 を求むるには其の壓縮材を曲げて見てその斷面の慣性モーメントの減少量を出せば良い。即ち曲げられる前には慣性モーメントが I_0 であつたものが曲率 $1/R$ に曲げられて後に I となつたとすれば β^2 は次式で與へられる。

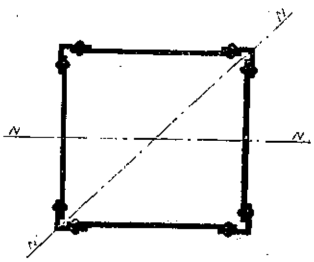
$$\beta^2=\frac{I_0-I}{I_0}R^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

實際に計算して見ると常に R^2 は消え，β^2 は曲げには無關係に中空壓縮材の內部的機構の脆弱性を示す特性的常數として求められる。

本篇に於ては 5 種の骨組型式の組合せ四角柱，組合せ三角柱及び管柱に對して夫々の β^2 を計算しその安定條件を具體的に計算した。

2. 組合せ四角柱に對する計算

圖-14.



斷面が正四邊形で全く對稱的に部材を配置して作つた組合せ四角柱の挫屈を考へるのに先づ大きく分けて 2 つの場合が考へられる。即ち圖-14 に於て N—N を中軸面とする樣な挫屈と N′—N′ を中軸面とする樣な挫屈とである。四角柱の挫屈に於ては此の 2 つの方向の挫屈が兩極端であつて其の他の場合は此の 2 つの場合の中間にあるものと考へる事が出來る。

圖-14 の如き正四角柱に於ては何れの方向に對してもその慣性モーメントは一定不變であるが挫屈は對角線の方向に最も起り易い。此れは常識的にて直ちに豫想せられるが計算に於ても又明瞭に現れて來る。

然しながら從來一般に取扱はれてゐるのは N—N を中軸面とする樣な挫屈（此れは四角柱としては最も挫屈し難い場合ではあるが）であるから先づ此の場合を取扱ふ事とする。橋梁に於ける壓縮材の如く四邊形の相對する邊が溝型鋼或は之に類似の合成部材である樣な場合には N—N を中軸面とする挫屈が最も重要となる。然しながら其の場合に於ても斷面が圖-15 の如く變形する挫屈し方も起り得る。此れは綾片の挫屈に起因する事であつて第 5 篇に於て論ずるであらう。

骨組の種類は圖-16 に於て示す型式を取り上げて之に就て實際に計算を行つた。此の他無數の骨組型式が考へられるが同樣に計算すれば何れの場合でも解決されるであらう。骨組の靜定，不靜定は計算には大して問題とはならない。

圖-15.

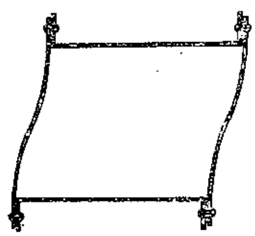
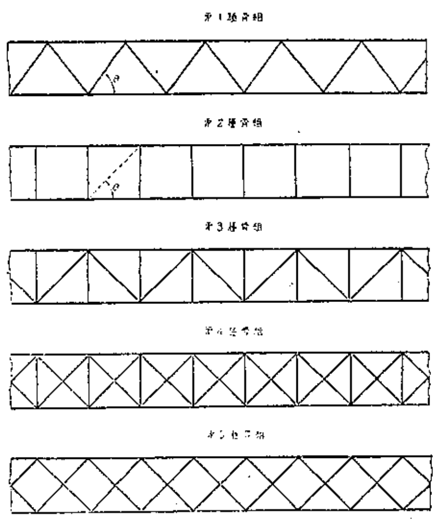


圖-16



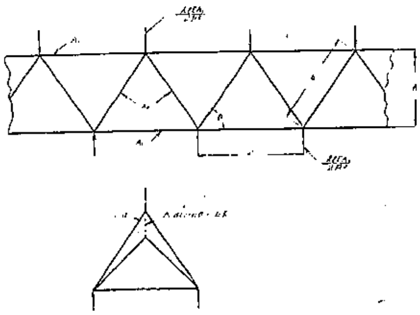
(i) 一側面の方向に挫屈する場合

(a) 第 1 種骨組（ワーレン型骨組）

第 1 種骨組のその骨組面の方向の挫屈に對する安定計算は既に第 2 編に於て詳細に述べたのであるが β^2 を簡單に機械的に計算する立場から此處に整理し直して見る。

第 1 種骨組の組合せ四角柱が曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられた場合各格點には弦材に直角に $\frac{hlEA_f}{2R^2}$ なる力が作用する事は既に述べた。茲に A_f は弦材の斷面積, h は骨組の幅, l は綾片の格間長である。綾片は之等の壓縮力を支へなければならない。

圖-17.



1 本の綾片にかゝる壓縮力を P_a とすれば

$$2P_a\sin\theta=\frac{hlEA_f}{2R^2}$$

$$\therefore\quad P_a=\frac{hlEA_f}{4R^2}\operatorname{cosec}\theta=\frac{h^2EA_f\cos\theta}{2R^2\sin^2\theta}$$

綾片の長さを d とし P_a なる壓縮力を受けての縮みを Δd とすれば

$$\Delta d=\frac{P_a}{EA_a}d=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^2d\cos\theta}{2R^2\sin^2\theta}=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^3\cos\theta}{2R^2\sin^3\theta}$$

綾片の縮みが骨組の幅に如何に影響を及ぼすかは柱の中立軸の長さは曲げの前後を通じて不變である事を考へれば $\Delta d\times\operatorname{cosec}\theta$ で效いて來る事が解る (圖-17 下圖)。即ち骨組の幅の減小を Δh で表はせば

$$\Delta h=\Delta d\operatorname{cosec}\theta=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^3\cos\theta}{2R^2\sin^4\theta}$$

β^2 は (46) 式より

$$\beta^2=\frac{I_0-I}{I_0}R^2=2\frac{\Delta h}{h}R^2=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^2\cos\theta}{\sin^4\theta}$$

此れを (41) の條件式に代入し $\frac{1}{\alpha^2}\doteqdot\frac{\pi^2}{L^2}$ なる關係を用ふれば

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{\pi^2h^2\cos\theta}{L^2\sin^4\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

或は

$$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{3\pi^2h^2\cos\theta}{2L^2\sin^4\theta}$$

細長比を $s=\frac{i}{L}$, $i\doteqdot\frac{h}{2}$ で表はせば

$$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}\qquad\cdots\cdots(47)$$

此れが第 1 種骨組の綾片に對する求むる條件式である。$\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}$ の値は $\theta=60°$ に於て $\frac{8}{9}\doteqdot1$ である。從つて $\theta=60°$ に於て此の條件式の規定する具體的な條件を感得する事が出來るであらう。

第 2 編に於て此の型式の骨組の曲げを解析して得た結果に依れば

$$\Delta h=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^3\cos\theta}{2R^2\sin^4\theta}-\frac{h^3\cos^2\theta}{8R^2\sin^2\theta}$$

であつた。然しながら右邊の第 2 項は第 1 項に比較して一般に非常に小さく, 又此れを省略する事は安全側でもあるから省略して仕舞へば本節の結果と同樣になる。

以下の骨組に對しても本節と同樣な考へ方で機械的に計算して行く事とする。

(b) 第 2 種骨組

第 2 種骨組はラーメンシュターブ (Rahmen Stab) に相當するものであつて, 兩弦材間の支材は綴片と呼ぶ事とする。

柱が曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられた時に格點に加へられる壓縮力は前と同樣に $\frac{hlEA_f}{2R^2}$ であつて綾片 h の受ける壓縮力

P_h は此れに等しい。即ち

$$P_h=\frac{hlEA_f}{2R^2}$$

$$\therefore\quad \Delta h=\frac{A_f}{A_h}\cdot\frac{h^2l}{2R^2}=\frac{A_f}{A_h}\cdot\frac{h^3\cos\theta}{2R^2\sin\theta}$$

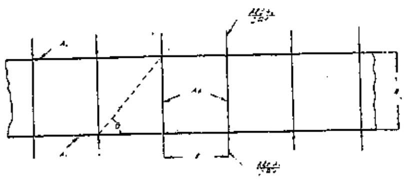
但し $$\frac{h}{l}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

従つて $$\beta^2=2\frac{\Delta h}{h}R^2=\frac{A_f}{A_a}\cdot\frac{h^2\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{A_f}{A_h}\cdot\frac{\pi^2h^2\cos\theta}{L^2\sin\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{3\pi^2h^2\cos\theta}{2L^2\sin\theta}=\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}\qquad\cdots\cdots(48)$$

圖-18.



但し s は柱の細長比である。

此處で第 1 種骨組と第 2 種骨組を比較して見れば次の如くである。

第 1 種及び第 2 種の骨組を有する組合せ壓縮材が同一の安定度に在る爲に要する綾片の總量を比較すれば第 2 種骨組に對しては

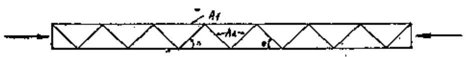
$$A_d\times L\sec\theta\geqq\frac{6\pi^2}{s^2\sin^4\theta}A_fL$$

第 2 種骨組に對しても

$$A_h\times L\tan\theta\geqq\frac{6\pi^2}{s^2}A_fL$$

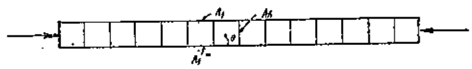
となる。従つて 90° を除く如何なる θ の値に對しても第 1 種骨組の方が第 2 種骨組より餘計の材料を要する。

表-3. $\dfrac{A_d}{A_f}=\dfrac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$ に於ける $\dfrac{A_f}{A_d}$ の數表



細長比 s	$\theta=40°$	45°	50°	55°	60°	65°
10	0.376	0.597	0.904	1.32	1.90	2.70
15	0.847	1.34	2.04	2.98	4.27	6.06
20	1.54	2.39	3.70	5.30	7.60	10.8
25	2.35	3.73	5.65	8.28	11.9	16.8
30	3.39	5.37	8.14	11.9	17.1	24.3
40	6.02	9.55	14.47	21.2	30.4	43.1
50	9.41	14.9	22.6	33.1	47.5	67.4
60	13.5	21.5	32.6	47.7	68.4	97.0
70	18.4	29.2	44.5	64.9	93.1	132
80	24.1	38.2	57.9	84.8	122	172
90	30.5	48.3	73.3	107	154	218
100	37.6	59.7	90.4	133	190	270
110	45.5	72.2	109	160	230	326
120	54.2	86.0	130	191	274	388
130	63.6	100	153	224	321	456
140	73.7	117	177	260	372	528
150	84.7	134	204	298	427	606

表-4. $\dfrac{A_h}{A_f}=\dfrac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$ に於ける $\dfrac{A_f}{A_a}$ の數表



細長比 s	$\theta=40°$	45°	50°	55°	60°	65°
10	1.42	1.69	2.01	2.41	2.92	3.62
15	3.19	3.80	4.53	5.43	6.58	8.15
20	5.67	6.75	8.05	9.64	11.7	14.5
25	8.85	10.6	12.6	15.1	18.3	22.6
30	12.7	15.2	18.1	21.7	26.3	32.6
40	22.7	27.0	32.2	38.6	46.8	57.9
50	35.4	42.2	50.3	60.3	73.1	90.5
60	51.0	60.8	72.4	86.8	105	130
70	69.4	82.7	98.6	118	143	177
80	90.9	108	129	154	187	232
90	115	137	163	195	237	293
100	142	169	201	241	292	362
110	172	204	243	292	354	438
120	204	243	290	347	421	521
130	239	285	340	407	494	612
140	278	331	394	473	573	710
150	322	380	453	543	658	815

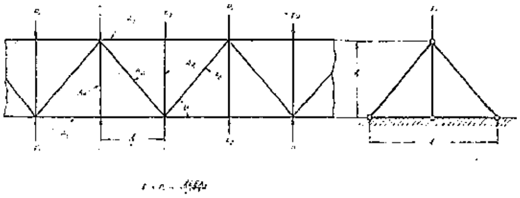
以上の結果のみより判斷すれば第 2 種骨組の方が有利の如く見えるが，此れは中空壓縮材の安定度に對してであつて，限界荷重の點より見れば第 4 篇に於て計算する如く第 2 種骨組は第 1 種骨組に劣るものである。

(47) 式，(48) 式に對する數表は夫々表-3，表-4 に示す如くであつて此れに對するグラフは第 2 篇に於ける圖-11，圖-12 となる。

(c)　第 3 種骨組

第 3 種骨組に於ては荷重の分配が問題となるので多少複雜になる。圖-19 に示される如く各格點には P_1 と P_2 がかかるものとすれば次の關係式が成立する。

圖-19.



$$P_1+P_2=\frac{EA_f hl}{2R^2}$$

$$P_2=P_h$$

$$P_1=P_h+2P_d\sin\theta$$

綾片 d と綾片 h の縮みが相關聯してゐる條件より

$$\frac{P_d d}{EA_d}\operatorname{cosec}\theta=\frac{P_h h}{EA_h}$$

之等の條件より P_h を求むれば

$$P_h=\frac{EA_f A_h h^2\cos\theta}{2(A_h+A_d\sin^3\theta)\sin\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\therefore\quad \Delta h=\frac{P_h h}{EA_h}=\frac{A_f h^3\cos\theta}{2(A_h+A_d\sin^3\theta)\sin\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\beta^2=2\frac{\Delta h}{h}R^2=\frac{A_f h^2\cos\theta}{(A_h+A_d\sin^3\theta)\sin\theta}$$

(41) の條件式は次の如くなる

$$\frac{\pi^2 A_f h^2\cos\theta}{L^2(A_h+A_d\sin^3\theta)\sin\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

或は

$$\frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{3\pi^2 h^2\cos\theta}{2L^2\sin\theta}$$

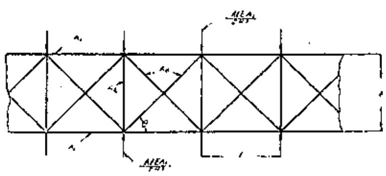
$$\therefore\quad \frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}\qquad\cdots\cdots(49)$$

(49) 式に於て $A_h=0$ と置けば第 1 種骨組となり (47) 式と一致する。$A_d=0$ と置けば第 2 種骨組となり (48) 式と一致する。

(d)　第 4 種骨組

此の場合には綾片に作用する壓縮力 P_d，綴片に作用する壓縮力 P_h の間には次の關係が成立する。

圖-20.



$$P_h+2P_d\sin\theta=\frac{EA_f hl}{2R^2}$$

$$\frac{P_d d}{EA_d}\operatorname{cosec}\theta=\frac{P_h h}{EA_h}$$

$$\therefore\quad P_h=\frac{EA_f A_h h^2\cos\theta}{2(A_h+2A_d\sin^3\theta)\sin\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{P_h}{EA_h}=\frac{A_f h^2\cos\theta}{2(A_h+2A_d\sin^3\theta)\sin\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\therefore\quad \beta^2=2\frac{\Delta h}{h}R^2=\frac{A_f h^2\cos\theta}{(A_h+2A_d\sin^3\theta)\sin\theta}$$

(41) の條件式は次の如く表はされる。

$$\frac{\pi^2 A_f h^2 \cos\theta}{L^2(A_h+2A_d\sin^3\theta)\sin\theta} \leqq \frac{2}{3}$$

或は

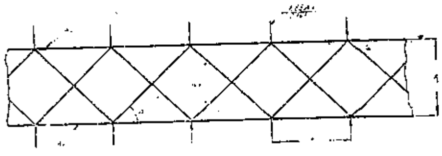
$$\frac{1}{A_f}(A_h+2A_d\sin^3\theta) \geqq \frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta} \qquad \cdots\cdots(50)$$

此れが第 4 種骨組に對する條件式である。$A_d=0$ と置けば (48) 式と完全に一致する。

(e) 第 5 種骨組

此れは複ワーレン型であつて改めて計算する迄もなく第 4 種骨組に於て $A_d=0$ と置けば求められる。

圖-21.



即ち

$$\frac{A_d}{A_f} \geqq \frac{3\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta} \qquad \cdots\cdots(51)$$

此れは第 1 種骨組即ちワーレン型骨組の場合に於て A_d を $2A_d$ に置き換へたものに等しい。從つて表-3 或は圖-11 を利用する事が出來る。

以上は通常電柱等に見られる組合せ四角柱に就ての計算であつたが橋梁等に用ひられる組合せ壓縮材の場合には A_f を弦材の斷面積の半分とすれば (47)～(51) の各式は夫々 1 本の綾片の斷面を決定する條件式となる。

(ii) 對角線の方向に挫屈する場合

斷面が正四邊形をなし部材配置が完全に對稱的である樣な組合せ四角柱に於ては (i) 節に於て假定した一側面の方向の挫屈よりは，對角線の方向の挫屈の方が遙かに可能性が多い。此れは常識的にも直ちに考へられる事であるが實際に四角柱の破壞狀態を觀察しても結論される。

限界荷重としては第 4 篇に於て計算される如く何れの方向に挫屈する場合にも同一であるが，その安定度は對角線の方向に於て著るしく低い爲にかかる結果となるのである。中空壓縮材に於ては限界荷重の他に，挫屈した狀態の安定，不安定，換言すれば壓縮材の安定度の問題が非常に重大である事は本節の計算に於て特に明瞭に現はれる。

對角線の方向に對して安定度の低い原因は，此の方向の挫屈に對する綾片又は綴片の抵抗は其等の曲げ剛さに依存するものであるからである。

以下の計算に於て示される如く此の方向の挫屈に對して (41) の條件式を適用すると綾片又は綴片に對して實際には取り得ない樣な過重な曲げ剛さが要求される。即ち四角柱は對角線の方向の挫屈に對しては其れ程安定度に缺けてゐるのである。

圖-22.

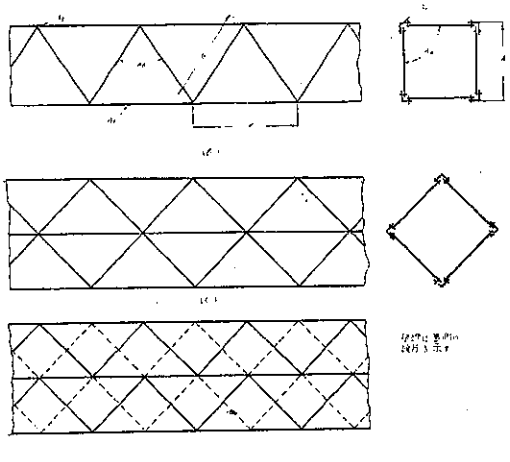
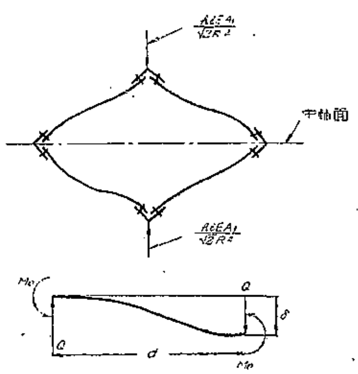


圖-23.



(a) 第 1 種骨組

先づ第 1 種骨組を取つて考へるのに，柱が曲げられた場合に弦材が中軸面に向つて押される事は前と同樣であり之に抵抗せんとする力は綾片又は綴片の曲げ剛さに關係して來る。骨組の平面で曲げられる時には綾片は壓縮力に對して抵抗すれば良かつたのであるが今度は充分な曲げ剛さが要求される事になつた。

即ち兩端固定の綾片又は綴片が圖-23 の如く δ だけ變位せしめられた時に生ずる反力 Q で弦材が中軸面の方向に押し着けられるのを支へてゐる。綾片又は綴片に軸壓縮力もかかるのであるがその影響は省略して差支へないであらう。Q を δ の函數として求めれば (52) 式の如くである。

$$Q=\frac{12EI_a}{d^3}\delta \quad \cdots\cdots(52)$$

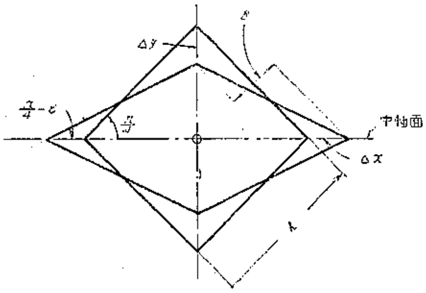
但し　I_a:　綾片の慣性モーメント

　　　d:　綾片の長さ

である。

四角柱が半徑 R の圓弧狀に曲げられて居るとすれば弦材の各格點には夫々 $\dfrac{EA_fhl}{\sqrt{2}R^2}$ が圖-23 の如く作用し正方形の斷面を菱形に變形せんとする。圖-24 に就て此の變形を計算すれば

圖-24.



$$\varDelta x=2h\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\varDelta y=2h\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}\delta&=(\varDelta x+\varDelta y)\sin\frac{\pi}{4}\\&=h\sin\varepsilon\\&\fallingdotseq h\varepsilon\end{aligned}$$

柱が曲げられると斷面がかく變形せられるから其處に慣性モーメントの減少が生ずる。即ち

$$\begin{aligned}I&=2A_fh^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\\&=A_fh^2(1-\sin 2\varepsilon)\\&\fallingdotseq I_0(1-2\varepsilon)\\&=I_0\left(1-\frac{2\delta}{h}\right)\end{aligned}$$

但し $I_0=Ah^2$（曲げられる前の慣性モーメント）

次に格點に於ては圖-22 (b) の如く 4 本の綾片が集中してゐるものと見做す事が出來るから Q に對しては次の式が成立する。實際には圖-22 (c) の如く綾片を施すが力學的には圖-22 (b) と同樣に扱はれる。

$$4Q\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}Q=\frac{EA_fhl}{\sqrt{2}R^2}$$

(52) 式を代入すれば

$$\delta=\frac{A_fhl d^3}{48I_aR^2}$$

從つて

$$I=I_0\left(1-\frac{A_fld^3}{24I_a}\cdot\frac{1}{R^2}\right)$$

$$\therefore\quad \beta^2=\frac{A_fld^3}{24I_a}$$

(41) の條件式より

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2 A_f l d^3}{24L^2 I_a}\leqq\frac{2}{3}$$

或ひは

$$\frac{I_a}{I_0}\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin^4\theta} \quad\cdots\cdots(53)$$

(b) 第 2 種骨組

第 1 種骨組の場合と同様に計算される。計算の順序を示せば次の如くである。

(52) 式より

$$Q=\frac{12EI_h}{h^3}\delta$$

格點に於て

$$\sqrt{2}\,Q=\frac{EA_f hl}{\sqrt{2}\,R^2}$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{A_f h^4 l}{24I_h R^2}$$

$$\beta^2=\frac{2\delta}{h}R^2=\frac{A_f h^4\cos\theta}{12I_h\sin\theta}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2 A_h h^4\cos\theta}{12L^2 I_h\sin\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

従つて

$$\frac{I_a}{I_0}\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin\theta}\quad\cdots\cdots(54)$$

(c) 第 3 種骨組

第 3 種骨組に於ては矢張り荷重の配分が問題となり計算が多少複雑となる。圖-25 の如く格點に荷重がかかつたとし之に對する綾片，綴片の反力を夫々 P_a, P_h とする。P_1, P_2 の方向は骨組の面に 45° をなして居り P_a, P_h は骨組の面に直角に作用してゐる。

之等の諸力の間には次の關係が成立する。

$$P_1+P_2=\frac{EA_f hl}{\sqrt{2}\,R^2}$$

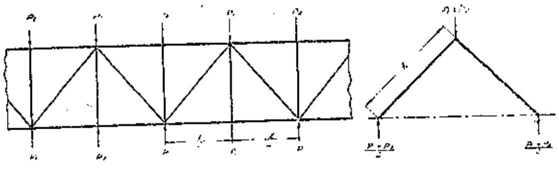
$$P_1=2(P_h+2P_a)\sin\frac{\pi}{4}$$

$$P_2=2P_h\sin\frac{\pi}{4}$$

$$P_h=\frac{12EI_h}{h^3}\delta$$

$$P_a=\frac{12EI_a}{d^3}\delta$$

圖-25.



以上より P_1, P_2, P_h, P_a を消去すれば

$$\delta=\frac{1}{48}\cdot\frac{A_f hl}{\dfrac{I_h}{h^3}+\dfrac{I_a}{d^3}}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\therefore\quad \beta^2=\frac{2\delta}{h}R^2=\frac{1}{24}\cdot\frac{A_f l}{\dfrac{I_h}{h^3}+\dfrac{I_a}{d^3}}$$

$$\therefore\quad \frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2 A_f l}{24L^2\left(\dfrac{I_h}{h^3}+\dfrac{I_a}{d^3}\right)}\leqq\frac{2}{3}$$

或は
$$\frac{1}{I_0}\left(\frac{I_h}{h^3}+\frac{I_d}{d^3}\right)\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2h^3\sin\theta}\quad\cdots\cdots(55)$$

(55) 式に於て $I_h=0$ と置き，(53) 式に $I_d=0$ と置けば (54) 式に夫々一致する。

(d)　第 4 種骨組

第 4 種骨組に於ては第 3 種骨組に於ける I_d を $2I_d$ に置き換へれば良い。即ち求むる條件式は

$$\frac{1}{I_0}\left(\frac{I_h}{h^3}+\frac{2I_d}{d^3}\right)\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2h^3\sin\theta}\quad\cdots\cdots(56)$$

(e)　第 5 種骨組

(56) 式に於て $I_h=0$ と置けば第 5 種骨組に對する條件式を得る。即ち

$$\frac{I_d}{I_0}\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{4s^2\sin^4\theta}\quad\cdots\cdots(57)$$

四角柱の對角線の方向の挫屈を不安定ならしめない爲の條件は全て上述の如く $\frac{I_d}{I_0}$ 或は $\frac{I_h}{I_0}$ が細長比 s と角度 θ との函數として表はされる。即ち綾片又は綴片の慣性モーメントが組合せ四角柱全體の慣性モーメントと對比せしめられるのであるから實際には殆ど施し得ない程過重な慣性モーメントが要求せられてゐる事が解る。

之に對して骨組の平面內で挫屈する場合の條件式に於ては弦材の斷面積に對する綾片又は綴片の斷面積が限定され常識的な見當とも良く一致してゐると思はれる。

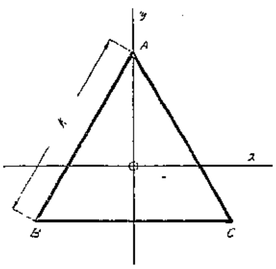
四角柱の對角線の方向の挫屈に對して綾片又は綴片の曲げ剛さで抵抗せんとする事は殆ど不可能と謂つて良く，此の爲にはどうしても對角線の方向に繫材等の如き手段を必要とするであらう。

3. 組合せ三角柱に對する計算

組合せ四角柱は斷面の對角線の方向に對して安定度が非常に低い事は前章 (ii) 節に於て計算に依つて實際に示された通りである。此れは四邊形の不靜定に起因するものであつて，對角線の方向に繫材でも入れて靜定的な斷面とすれば充分な安定度を附與する事が出來るであらう。

之に對して組合せ三角柱は三角形が其れ自身靜定的である爲に安定度に對しては非常に有利である。本章に於ては組合せ三角柱に就てその挫屈を不安定ならしめざる條件を計算する。

圖-26.



三角柱としては正三角形斷面が最も效果的である。正三角形の重心を原點として圖-26 の如く坐標軸を取れば三角柱の挫屈に對しては一側面の方向に挫屈する場合即ち x 軸の方向に挫屈する場合と一側面に直角の方向に挫屈する場合即ち y 軸の方向に挫屈する場合との 2 つの特性的場合とが考へられる。

(i)　一側面の方向に挫屈する場合

此の場合には BC なる骨組面がその平面內で挫屈するのであつて，その他の面は此の方向の挫屈に對しては殆ど作用してゐないと見做す事が出來る。從つて前章 (i) の場合の計算が直ちに此の場合に適用せられる。但し四角柱の場合と三角柱の場合とでは骨組の幅が同じであつても柱の斷面の回轉半徑は異なる。從つて細長比が異つて來る。四角柱に於ける細長比は $\frac{2L}{h}$ であるに對して三角柱に於ては $\frac{\sqrt{6}L}{h}$ である。即ち最後の條件式の右邊が形に於て前章 (i) の場合の $\frac{3}{2}$ 倍となる。5 種の骨組の三角柱に對して一側面の方向の挫屈を不安定ならしめざる爲の條件を列記すれば次の如くである。

第 1 種骨組
$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}\quad\cdots\cdots(58)$$

第 2 種骨組
$$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}\quad\cdots\cdots(59)$$

第 3 種骨組
$$\frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}\quad\cdots\cdots(60)$$

第 4 種骨組 $\frac{1}{A_f}(A_h+2A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$ ……………………………………(61)

第 5 種骨組 $\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin^4\theta}$ ……………………………………(62)

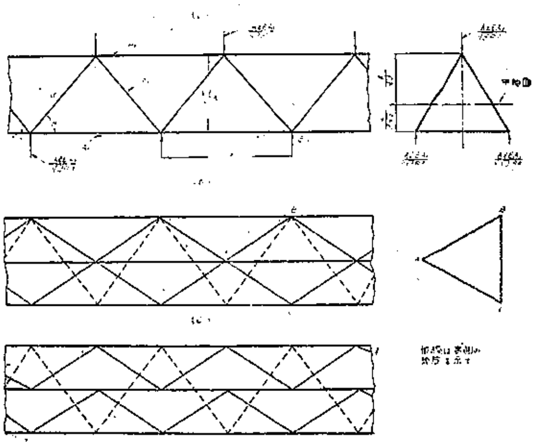
(ii) 一側面に直角の方向に挫屈する場合

結論を先にすれば此の場合の安定條件は結局 (i) の場合と全く同一となる。即ち (58)～(62) の各式が其儘適用されるのであるが，計算過程を示せば次の如くである。

(a) 第 1 種骨組

第 1 種骨組に於ける關係諸量は圖-27 に示される如くであるとし柱が曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられてゐる狀態を考へる。

圖-27.



弦材 A の歪度は $\frac{h}{\sqrt{3}R}$ となり從つて各格點に於て弦材が中軸面の方向に押される力 P_A は次の如く表はされる。

$$P_A=\frac{EA_fhl}{\sqrt{3}R^2}$$

同樣に弦材 B, C が中軸面の方向に押される力は各格點に於て

$$P_B=P_C=\frac{EA_fhl}{2\sqrt{3}R^2}=\frac{P_A}{2}$$

である。之等の力を支へてゐるものが綾片である。

綾片の間隔は l であつて圖-27 (b) の如く施されてゐるとする。三角柱の各面に於て間隔が l でさへあれば綾工の位相のづれは別に問題とはならない。從つて最も考へ易い場合を取つたのである。實際の場合には圖-27 (c) の如く施される。

先づ AB 面，AC 面に於ける綾片の受ける壓縮力を計算する。A 點に 4 本の綾片が集中してゐるとしてその 1 本にかゝる應力を P_d とすれば

$$P_A=\frac{EA_fhl}{\sqrt{3}R^2}=4P_d\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad P_d=\frac{EA_fhl}{6R^2\sin\theta}=\frac{EA_fh^2\cos\theta}{3R^2\sin^2\theta}$$

AB 面，AC 面の綾片は壓縮力を受けるが BC 面の綾片は引張力を受ける。BC 面の各綾片の受ける引張力を P_d' とすれば

$$2P_d'\sin\theta=2P_d\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad P_d'=\frac{1}{2}P_d=\frac{EA_fh^2\cos\theta}{6R^2\sin^2\theta}$$

實際の場合には各綾片には曲げモーメントが加へられるであらうが三角形の靜定性から考へてその影響は省略して差支へないと考へられる。

次に AB 面に就て (AC 面に就ても同樣) その綾片が P_d なる壓縮力を受ける結果最初幅が h であつたものが柱が曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられた後如何程減じたかを求める。綾片 d の彈性的縮み $\varDelta d$ は

$$\varDelta d=\frac{P_dd}{EA_d}=\frac{A_fh^2d\cos\theta}{3A_d\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{R^2}=\frac{A_fh^3\cos\theta}{3A_d\sin^3\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

h の減少量を $\varDelta h$ とすれば

$$\varDelta h=\varDelta d\ \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{\varDelta_f h^3\cos\theta}{3\varDelta_d\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

BC 面に於ては綾片が引張られてゐるからその幅は最初 h であつたものが曲げられて後には h より $\varDelta h'$ だけ大きくなる。

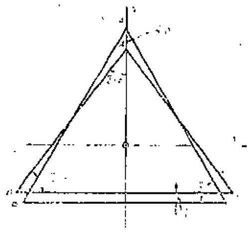
$$\varDelta h'=\frac{\varDelta_f h^3\cos\theta}{6\varDelta_d\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

從つて最初正三角形 ABC であつた斷面が柱が曲げられた爲に圖-28 の如く $\varDelta$A′B′C′ に變形された事になる。此の角變化を ε とする。

$$2\mathrm{A'B'}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varepsilon\right)=\mathrm{B'C'}$$

$$\therefore\quad 2(h-\varDelta h)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varepsilon\right)=h+\varDelta h'$$

圖-28.



ε が小なる時は

$$\varepsilon=\frac{\varDelta h+\varDelta h'}{\sqrt{3}\,h}=\frac{\varDelta_f h^2\cos\theta}{2\sqrt{3}\,\varDelta_d\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$\varDelta$ABC, $\varDelta$A′B′C′ を比較して曲げられる前後の高さの減少 δ を求むれば

$$\delta=h\sin\frac{\pi}{3}-(h-\varDelta h)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varepsilon\right)$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2\sqrt{3}}(4\varDelta h+\varDelta h')$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\varDelta_f h^3\cos\theta}{4\varDelta_d\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

最後に慣性モーメントが柱の曲げられる前後でどう變化するかを計算する。曲げられない前の慣性モーメント I_0 は

$$I_0=\varDelta_f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+2\varDelta_f\left(\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\varDelta_f h^2}{2}$$

回轉半徑　　$i=\dfrac{h}{\sqrt{6}}$

曲げられた後の慣性モーメント I は

$$I=\varDelta_f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\delta\right)^2+2\varDelta_f\left(\frac{h}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\delta\right)^2$$

$$\fallingdotseq I_0\left(1-\frac{4\delta}{\sqrt{3}\,h}\right)$$

從つて

$$\beta^2=\frac{4\delta}{\sqrt{3}\,h}R^2=\frac{\varDelta_f h^2\cos\theta}{\varDelta_d\sin^4\theta}$$

(41) の條件式より

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2\varDelta_f h^2\cos\theta}{\varDelta_d L^2\sin^4\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

或は

$$\frac{\varDelta_d}{\varDelta_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$$

但し s は細長比であつて三角柱の場合には $\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{h^2}{6L^2}$ である。上式は (58) 式と全く同じである。

(b)　第 2 種骨組

AB 面或は AC 面に就て考へるのに綴片 h の受ける壓縮力 P_h は

$$2P_h\sin\frac{\pi}{3}=P_A$$

$$\therefore P_h=\frac{P_A}{\sqrt{3}}=\frac{EA_fhl}{3R^2}$$

綴片 h の縮み Δh は

$$\Delta h\doteqdot\frac{P_hh}{EA_h}=\frac{A_fh^3\cos\theta}{3A_hR^2\sin\theta}$$

次に BC 面に就て考へるのに綾片 h の受ける引張力 P_h' は

$$P_h'=\frac{1}{2}P_h=\frac{EA_fhl}{6R^2}$$

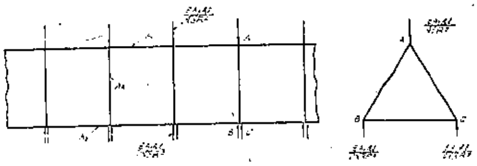
綴片 h の延び $\Delta h'$ は

$$\Delta h'=\frac{A_fh^3\cos\theta}{6A_hR^2\sin\theta}$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{1}{2\sqrt{3}}(4\Delta h+\Delta h')$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,A_fh^3\cos\theta}{4A_h\sin\theta}\cdot\frac{1}{R^2}$$

圖-29.



従つて (a) の場合と同樣に

$$\beta^2=\frac{4\delta}{\sqrt{3}\,h}R^2=\frac{A_fh^2\cos\theta}{A_h\sin\theta}$$

41) の條件式より

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2A_fh^2\cos\theta}{A_hL^2\sin\theta}\leqq\frac{2}{3}$$

或は

$$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$$

此れは (59) 式と全く同じである。

三角柱に於ける第 1 種骨組と第 2 種骨組との比較は四角柱に於ける同じ比較と全く同樣である。

(c) 第 3 種骨組

第 3 種骨組に對しても同樣に計算出來る。結果に於ては (a) の場合と (b) の場合とを機械的に組合せたものと同じになる。(41) の條件式は次の如くなる。

$$\frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$$

此れは (60) 式と全く同じである。

(d) 第 4 種骨組

安定條件の式は次の如くなる。

$$\frac{1}{A_f}(A_h+2A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$$

此れは (61) 式と全く同じである。

(e) 第 5 種骨組

安定條件の式は次の如くなる。

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin^4\theta}$$

此れは (62) 式と全く同じである。

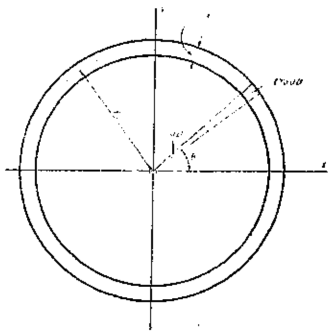
以上で 5 種の骨組型式の組合せ三角柱に對してその綾片又は綴片の斷面を規定する條件式を求むる事が出來た.

その結果は骨組面の方向に挫屈する場合に對しても又骨組面に直角の方向に挫屈する場合に對しても同一の條件式を得た。即ち三角柱の挫屈に對する安定度は方向に無關係である事が解る。此の點は四角柱と全然趣を異にしてゐる。條件式の形としては四角柱の場合と良く類似してゐる。

4. 管柱に對する計算

本章に於ては管を柱として使用する場合，此れが不安定なる挫屈を起さざる爲には，換言すれば柱として安定である爲には，その肉厚が管の半徑に對して如何程でなければならないかを定める條件を求め樣とする。組合せ壓縮材の場合と同じく中空壓縮材に對する基礎方程式に依つて取扱ひ得る事は第 2 編に於て示した。求むる條件式は細長比或は長さと半徑の比のみの函數として求められる筈である。

圖-30.



問題は結局 β^2 の値を求むる事に歸するが，此の爲には組合せ壓縮材の場合にもさうであつた如く管柱の曲げ剛さが曲げに依つて如何に變化するかを調べて見れば良い。

長い管柱が半徑 R の圓弧狀に曲げられたとすれば，その中軸面は伸び縮みがなく，中軸面より外側は引伸され內側は壓縮される。管の半徑（肉厚の中心迄）を r_0，厚さを t，中軸面は x 軸を通るとし極坐標に依つて歪度を出せば偏角 θ を有する點に於ては

$$\frac{r_0\sin\theta}{R^2}$$

であり，管の厚さ t は r_0 に比して小であるとする。從つてその點を中心とする微小部分 $tr_0d\theta$ に作用する引張乃至壓縮力は

$$E\frac{r_0\sin\theta}{R}tr_0d\theta=\frac{Er_0^2t\sin\theta d\theta}{R}$$

半徑 R に曲げられてその斷面 $tr_0d\theta$ に上記の如き引張乃至壓縮力を働かせる爲には半徑 R なる圓に對して求心乃至遠心的に作用する靜水壓の如き力を此の圓弧にかけなければならない（圖-31）。その單位長さ當りにかゝる靜水壓を dq とすれば

$$dq=\frac{Er_0^2t\sin\theta d\theta}{R^2}\cdots(63)$$

即ち管の斷面を取つて考へれば管が半徑 R に曲げられた場合管の表面 $r_0d\theta$ 當りに圖-32 に示される如き壓力を受けてゐる事になる。從つて管の斷面は最初圓形であつても曲げられて後は圖-32 に示される如き力を受けて彈性的に變形する筈であり，變形の仕方は變形が極く僅かであれば楕圓的であらうと豫め推定する事が出來る。

圖-31.

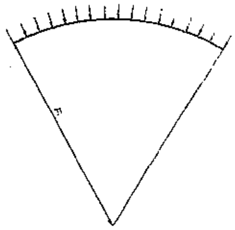
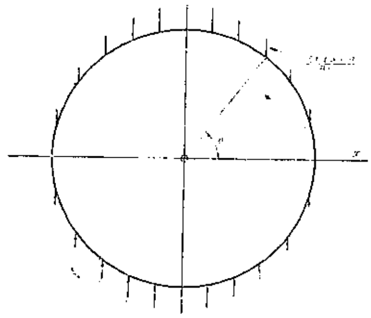


圖-32.



かゝる荷重を受けて厚さ t を有する圓環が如何に變形するかを次に求めて見よう。但し圓環の軸方向の應力に基く歪度に依る變形は小なるものと推定せられるから之は省略して，專ら曲げモーメントに依る圓環の變形を求める。此の變形に依る慣性モーメントの減少を求むれば問題は解決されるのである。

圓環を中軸面で截つて其の上半を取つて考へれば其の切口に於ては圖-33 の如き反力 P と曲げモーメント M_0 を加へなければならない。

P を求むれば

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dq=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Er_0^2t\sin\theta}{R^2}d\theta$$

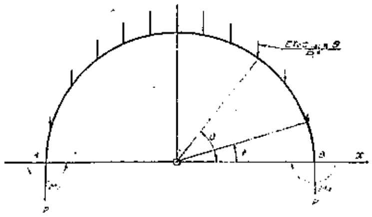
$$=\frac{Er_0^2t}{R^2} \qquad \cdots\cdots(64)$$

θ なる位置に於ける曲げモーメント M を計算すれば

$$M=M_0-Pr_0(1-\cos\theta)+\int_0^\theta dqr(\cos\phi-\cos\theta)$$

$$=M_0-\frac{Er_0^3t}{2R^2}\sin\theta \qquad \cdots\cdots(65)$$

圖-33.



圓環の變形を決定する微分方程式は次の如くである。

$$\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{r_0}=\frac{M}{EI_t} \qquad \cdots\cdots(66)$$

但し

$$r'=\frac{dr}{d\theta} \qquad r''=\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

$$I_t=\frac{t^3}{12}$$ （柱の單位長さを取つて考へる）

左邊の第 1 項は極坐標で表はした曲率の式である。第 2 項は曲げられる前の圓環の曲率であつて此れは常數である。變形の極く僅かな場合を論ずるのであるから第 1 項の r の値は r_0 の前後を僅かに變動するのみである。

上記の微分方程式を解いて截口 A 或は B に於ける切線が y 軸に平行であると謂ふ條件を入れれば M_0 が決定せられる筈である。然しながら微分方程式を上記の儘で解く事は困難であるから最小仕事の原理に依り M_0 を決定する。

$$\frac{1}{4}W=\frac{1}{2EI_t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}M^2ds$$

$$=\frac{1}{2EI_t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_0-\frac{Er_0^3t}{2R^2}\sin^2\theta\right)^2r_0d\theta$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_0}=0$$ と置けば

$$M_0=\frac{Er_0^3t}{4R^2} \qquad \cdots\cdots(67)$$

(67) 式を (65) 式に代入すれば

$$M=\frac{Er_0^3t}{4R^2}(1-2\sin^2\theta)=\frac{Er_0^3t}{4R^2}\cos2\theta \qquad \cdots\cdots(68)$$

(68) 式を (66) 式に代入して解けば圓環の變形が求められる。變形が極く僅かな時には楕圓となるであらう事が豫想せられるから逆に楕圓を假定して其の曲率を求めて見る。

楕圓の方程式は極坐標で表はせば

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1 \qquad \cdots\cdots(69)$$

但し a, b は夫々楕圓の長軸及び短軸の長さの半分であつて圓環の中心線の長さは不變であるとしてゐるから

$$r_0^2=ab \qquad \cdots\cdots(70)$$

なる制約を受けてゐる。

此の楕圓の曲率 $\frac{1}{\rho}$ を計算すれば

$$\frac{1}{\rho}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^4}+\frac{\sin^2\theta}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$ と置けば e^2 は非常に小である故

$$\left.\begin{aligned}\frac{b^2}{a^2}&=1-e^2\\ \left(\frac{b}{a}\right)^n&\doteqdot 1-\frac{n}{2}e^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(71)$$

と置く事が出來る。之等の關係を用ひて上式を近似的に簡易化すれば

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r_0}(1-e^2)^{\frac{3}{4}}(1-e^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\left\{1-e^2(2-e^2)\cos^2\theta\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

e^4 以下を省略すれば

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r_0}\left(1+\frac{3}{4}e^2\cos 2\theta\right)\cdots\cdots(72)$$

此の値を (66) 式に代入し (68) 式を考慮に入れれば

$$\frac{3e^2}{4r_0}\cos 2\theta=\frac{M}{EI_t}=\frac{r_0{}^3t}{4I_tR^2}\cos 2\theta$$

從つて $I_t=\dfrac{t^3}{12}$ であるから

$$e^2=\frac{r_0{}^4t}{3I_tR^2}=\frac{4r_0{}^4}{t^2R^2}\cdots\cdots(73)$$

卽ち微分方程式 (66) の解は (73) 式の如き離心率を有する楕圓となつた譯である。管の場合に於ても組合せ壓縮材の場合と同樣に變形が $\dfrac{1}{R^2}$ に比例してゐる事は注目に値する。此の事は中空壓縮材を通じての特性であり之に依つて中空壓縮材を定義する事も出來るであらう。

以上で R と e^2 の關係が求められた。次に慣性モーメントの變化と e^2 の關係が求められれば，結局管柱が曲げられた爲に慣性モーメントが如何に減少するかが解り，從つて中空壓縮材の基礎方程式に依つて挫屈の安定，不安定が判定せられる。

柱が曲げられる前の慣性モーメントを I_0 とすれば

$$I_0=\frac{\pi}{4}\left\{\left(r_0+\frac{t}{2}\right)^4-\left(r_0-\frac{t}{2}\right)^4\right\}$$

柱が曲げられて後の慣性モーメントを I とすれば

$$I=\frac{\pi}{4}\left\{\left(a+\frac{t}{2}\right)\left(b+\frac{t}{2}\right)^3-\left(a-\frac{t}{2}\right)\left(b-\frac{t}{2}\right)^3\right\}$$

然るに

$$\left.\begin{aligned}a&\doteqdot r_0\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\\ b&\doteqdot r_0\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\end{aligned}\right\}$$

と置き得る故

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{4}\left\{\left(r_0+\frac{t}{2}+\frac{r_0e^2}{4}\right)\left(r_0+\frac{t}{4}-\frac{r_0e^2}{4}\right)^3-\left(r_0-\frac{t}{2}+\frac{r_0e^2}{4}\right)\left(r_0-\frac{t}{2}-\frac{r_0e^2}{4}\right)^3\right\}\\ &\doteqdot\frac{\pi}{4}\left[\left(r_0+\frac{t}{2}\right)^4-\left(r_0-\frac{t}{2}\right)^4-\frac{r_0e^2}{2}\left\{\left(r_0+\frac{t}{2}\right)^3-\left(r_0-\frac{t}{2}\right)^3\right\}\right]\\ &=I_0\left\{1-\frac{12r_0{}^2+t^2}{8(4r_0{}^2+t^2)}e^2\right\}\end{aligned}$$

(73) 式を代入すれば

$$I=I_0\left\{1-\frac{r_0{}^4(12r_0{}^2+t^2)}{2t^2(4r_0{}^2+t^2)}\cdot\frac{1}{R^2}\right\}\cdots\cdots(74)$$

$$\therefore\quad \beta^2=\frac{r_0{}^4(12r_0{}^2+t^2)}{2t^2(4r_0{}^2+t^2)}$$

挫屈が不安定ならざる爲の條件は

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2 r_0^4(12r_0^2+t^2)}{2L^2t^2(4r_0^2+t^2)}\leqq\frac{2}{3} \quad\cdots\cdots(75)$$

(75) 式を $\frac{t^2}{r_0^2}$ に就て解けば

$$\frac{t^2}{r_0^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+30\pi^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2+\frac{9}{16}\pi^4\left(\frac{r_0}{L}\right)^4}-4+\frac{3\pi^2}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\} \quad\cdots\cdots(76)$$

$\frac{r_0}{L}$ が小なる場合は (76) 式は近似的に次の如く表はされる。

$$\frac{t}{r_0}\geqq\frac{3\pi r_0}{2L} \quad\cdots\cdots(77)$$

r_0 に對して t が小なる時は斷面の回轉半徑は近似的に $\frac{r_0}{\sqrt{2}}$ である。從つて (76) 式を細長比 s で表はせば次式を得る。

$$\frac{t^2}{r_0^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+\frac{60\pi^2}{s^2}+\frac{6\pi^4}{4s^2}}-4+\frac{3\pi^2}{2s^2}\right\} \quad\cdots\cdots(78)$$

管柱に關して行つた以上の計算に於ては最初に t を r_0 に比して小であるとして近似的に取扱つてゐる。以下 (76) 式迄は t^2 に關しては近似計算を行つてゐるが t に關しては近似計算を行つてゐない。(78) 式は (76) 式より近似的に求めたものであつて (76) 式の方が正確である。管柱の場合には殊更に細長比の函數とする必要はなく，(76) 式の方が便利であらう。r_0 は管の厚さの中心迄の長さである事は勿論である。

(76) 式に對する數表は**表-5** に示す如くであり，之に對するグラフは **圖-13** に示した。

管柱の安定不安定に關聯して思ひ出されるのは竹の節の存在である。竹の節に於ては外側に膨れ上つてゐる部分は恰も補剛材の如き役割を果し，內側には相等强い膜を有し，尙且つ節の附近に於ては材料が緻密となつてゐる。

表-5.

$$\frac{t^2}{r_0^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+30\pi^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2+\frac{9\pi^4}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4}-4+\frac{3\pi^2}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\}$$

$\frac{r_0}{L}$ 小なるとき

$$\frac{t}{r_0}\geqq\frac{3\pi}{2}\left(\frac{r_0}{L}\right)\left\{1-\frac{3\pi^2}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\}$$

$$\fallingdotseq\frac{2\pi}{2}\left(\frac{r_0}{L}\right)$$

$\frac{L}{r_0}$	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$\frac{r_0}{t}$	2.16	3.21	4.26	5.32	6.38	8.50	10.7	12.7	14.9	17.0	19.1	21.2	23.3	25.5	27.6	29.7

かくの如く三段構へに構へて曲げに依る斷面の變形に抵抗しようとしてゐる。節の存在は植物生理學的に如何なる役割を果してゐるものか判らないが恐らく大した役割は有つてゐないであらう。もしそうであるとすれば節の存在は自己の力學的安定度を增大せんとする目的以外の何物でもない。節の間隔等も必要にして充分な程度の安定度を得る樣に美しい調和を保つて配置されてゐるものと思はれる。

從來の應用力學に於ては曲げに依る斷面の變形は重要視せられなかつた。從つて竹の節の力學的意義は認められなかつた。併しながら竹に節の無い場合を考へれば非常に弱くなり安定を保ち得ないであらう事は常識的にも豫想される。竹の節は中空壓縮材に於ては限界荷重の外に安定，不安定の問題が非常に重要である事を示す良き實例の一つとして擧げる事が出來る。

5. 要　　約

本篇に於ては第 2 篇に於て導いた中空壓縮材の安定條件を諸種の組合せ壓縮材並びに管柱に對して實際に適用

した。組合せ四角柱が一側面の方向に挫屈する場合の安定條件は橋梁等に用ひられる組合せ壓縮材にも適用せられる。

組合せ四角柱に綾片又は綴片に依つて對角線の方向の挫屈に對して充分の安定度を持たせる事は非常に困難である。

組合せ三角柱に對しては骨組面の方向と骨組面に直角の方向との 2 つの特性的方向が認められるが何れの方向に對しても安定度は同一である。此の點は四角柱と大いに異なる點である。

管柱の安定も中空壓縮材に對する基礎方程式に依つて論ずる事が出來る。その結果は (76) 乃至 (78) 式で表はされる本篇の結果は第 4 編の結果と相俟つて總括する。

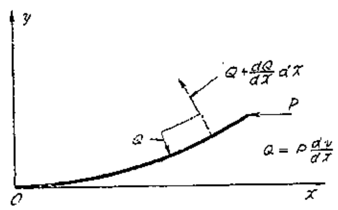
4.　組合せ壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響

1.　壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響に關する一般論

第 3 篇迄に於ては，壓縮材が挫屈した場合の撓曲線は曲げモーメントのみに支配されるとして式を樹て，之に依つて挫屈現象を論じ，結論として中空壓縮材の限界荷重は常にオイレルの限界荷重に等しい事及び中空壓縮材が不安定なる挫屈を起さざる爲の條件を求める事が出來た。上記の所論に於ては剪斷力の影響を全然無視したのであつた。

中空壓縮材特に組合せ壓縮材に於ては剪斷力の影響は非常に大きく，之を無視する事の出來ない事は後に實際に計算される如くである。然しながら都合の良い事には剪斷力の影響は結局限界荷重を低下せしめるだけであつて，中空壓縮材が不安定なる挫屈を起さざる爲の條件には全然關係しない。從つて中空壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響は第 3 篇迄の所論に之を積重ねれば良いのである。

圖-34.



限界荷重に對する剪斷力の影響に就てはティモシェンコ氏挫屈理論第 2 章第 26 節に記述されてゐる。仲，濤川，久田 3 氏共譯書より原文通り引用すれば次の如くである。

“挫屈荷重に關する諸公式を前に導いた際には曲率が曲げモーメントに比例するものとして通常の撓曲線の微分方程式を用ひた。次に挫屈荷重に對する剪斷力の影響を **圖-34** (原著圖-85) に示す樣な簡單な場合に就て考へよう。剪斷力の正の方向を　**-34** に示す樣にとれば，此の力の大きさは

$$Q=P\frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots (79)$$

となる。此の力に依つて起る撓曲線の撓角の變化は rQ/AG となる。ここに A は斷面積，G は剪斷彈性係數，r は斷面の形狀に關係する係數である。矩形斷面の場合には $r=1.2$，圓形斷面の場合には $r=1.11$ となる。剪斷力 Q に基づく撓角の變化の割合は剪斷に依つて生ずる附加的曲率を表すもので次の樣になる。

$$\frac{r}{AG}\cdot\frac{dQ}{dx}=\frac{rP}{AG}\frac{d^2y}{dx^2}$$

撓曲線の全曲率は曲げモーメントに依る曲率に剪斷力に依る曲率を加へたものである。從つて **圖-34** の場合の撓曲線の微分方程式は次の樣になる。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P(\delta-y)}{EI}+\frac{rP}{AG}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

即ち

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EI\left(1-\frac{rP}{AG}\right)}(\delta-y) \qquad \cdots\cdots (80)$$

此の方程式と次式 (剪斷力を考慮しない場合)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(\delta-y)$$

とを比べると右邊の分母に係數 $\left(1-\frac{rP}{AG}\right)$ を持つ點だけが異つてゐる。第12節に於けると同樣の方法を用ふれば荷重 P の挫屈値を定める次式を得る。

$$\frac{P}{EI\left(1-\frac{rP}{AG}\right)}=\frac{\pi^2}{4l^2}$$

之から

$$P_{cr}=\frac{P}{1+\frac{rP}{AG}} \qquad (81)$$

となる。此の式の $P_e=\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ は此の場合の Euler の挫屈荷重である。從つて挫屈荷重は剪斷力の爲に

$$\frac{1}{1+\frac{rP_e}{AG}}$$

なる割合で減少する。單一柱の場合には此の比が殆ど 1 となり，剪斷力の影響を無視する事が出來る。然し組立柱に對する影響は實用上重要な問題であつて考慮しなければならない。

以上の式に於て用ひられてゐる G は材料固有の G であるが中空壓縮材に於て之を1本の中實な柱と見做した場合には之の見かけの剪斷彈性係數はより小さくなるであらう。中空壓縮材に於ては此の見かけの G を計算すれば r/AG に相當する數値が求められ，從つて (81) 式に依つて限界荷重の低下が求められる筈である。

中空壓縮材の挫屈に對する基礎方程式は曲げられるに從つて曲げ剛さが減ずると謂ふ點を加味すれば誘導される。卽ち (80) 式に於ける I を

$$I=I_0\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}$$

但し I_0: 曲げられない前の慣性モーメントと置き換へれば，剪斷力の影響をも考慮して中空壓縮材の撓曲線に對する微分方程式が得られる。

此處で

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI_0\left(1-\frac{rP}{AG}\right)}$$

と置けば剪斷力を考慮しない場合の中空壓縮材に對する基礎方程式と形に於て全然同一となる（著者の座標の取り方では (2) 式に於て $\delta=0$ となる)。但し $1/\alpha^2$ の內容に於て rP/AG なる項が含まれた處が異るのみである。

不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}\leqq\frac{2}{3}$$

である。α としては限界荷重 P_{cr} に於ける値を用ふべきであるが，其の時は

$$\frac{1}{\alpha^2}\fallingdotseq\frac{P_{cr}}{EI_0\left(1-\frac{rP_{cr}}{AG}\right)}=\frac{P_e}{EI_0}$$

但し P_e: オイレルの限界荷重

であるから，兩端鉸支持の中空壓縮材の場合には結局

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\pi^2}{L^2}$$

と置かれる事になる。此の關係も亦剪斷力を無視した場合と全然同一である。

從つて中空壓縮材の挫屈に關して剪斷力を考慮すると謂ふ事はより正確な限界荷重を求むる事であつて，挫屈の安定，不安定の判斷には全然無關係である事が解る。從つて第 3 篇に於て求められた諸結果は剪斷力を考慮する場合に於ても其の儘適用せられるものである。

中空壓縮材に於ては剪斷力に依る曲げ剛さの減少も考へられるが曲げモーメントに依る減少に比較すれば無視し得る。

本篇に於ては剪斷力の影響を考慮に入れて第 3 篇に於て取扱つた諸種の組合せ壓縮材の限界荷重を計算する。

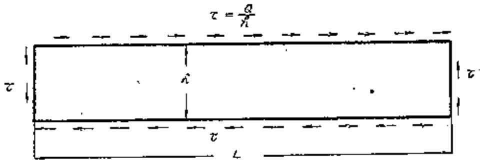
2. 剪斷力の影響を考慮した場合の組合せ四角柱の限界荷重

骨組の種類は 圖-16 に掲げた 5 種とし，一側面の方向に挫屈する場合と對角線の方向に挫屈する場合とを計算する。結論を先に謂へば何れの方向の挫屈に對しても限界荷重は同じである。

(i) 一側面の方向に挫屈する場合

組合せ壓縮材の剪斷抵抗を之と大きさの同じである中實單體の壓縮材に置き換へて考へ，之の剪斷彈性係數を求めんとするのであるが，之は元の組合せ壓縮材から見れば見かけの剪斷彈性係數とも呼ばるべきものであらう。之を求むる爲には純粹に剪斷力のみをかけて見て此れに對する抵抗を吟味すればよい。

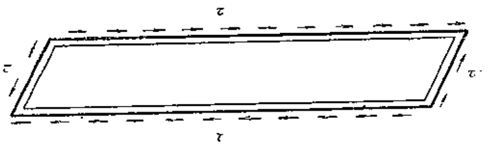
圖-35.



先づ置換した中實單體の壓縮材（紙面に垂直の方向には單位長さとする）を考へ之に純粹に剪斷力のみを作用せしめて見る。圖-35 に於ける如くに長さ L, 幅 h なる壓縮材に外部から強度 τ なる剪斷力のみをかけたとする。之は壓縮材の或る斷面に $Q=\tau h$ なる剪斷力をかけた場合に相當する。然る時は此の壓縮材の內部は何れの點に於ても剪斷應力は τ であつて引張應力，壓縮應力は全然生じない。即ち純粹に剪斷力だけを考へる時は材の纎維に於ても引張或は壓縮力を生じない。從つて材の纎維が伸びたり縮んだりはしない。此の事は以後の考へ方に於て重要な事であると思はれる。

次に骨組の枠だけを考へ，圖-35 の如き剪斷力をかければ明らかに 圖-36 の如く容易に變形するであらう。斯の如き變形を起させない爲には 圖-37 に於ける如く此の枠の內側に逆向きの剪斷應力 τ（外側の剪斷應力と同じ大きさ）を與へなければならない。

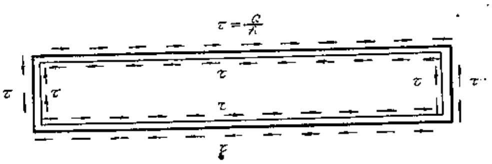
圖-36.



斯くすれば枠に於ける應力度分布は 圖-2 の場合と同樣である。

組合せ壓縮材に於ける綾工は此の內側に於ける剪斷力に對應すべきものである。此處に剪斷力に對する綾工の抵抗が認められる。

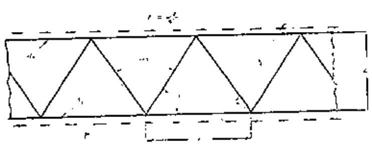
圖-37.



a) 第 1 種骨組

ワーレン型の第 1 種骨組に就て上述の見地から剪斷力に對する綾片 d の抵抗を吟味して見よう。弦材に對しては全體としては引張力も壓縮力も作用して居ないと見做す事が出來る。格點の附近局部的には作用してゐるが此れは無視し得る。即ち弦材には長さの變化は無い。從つて綾工の 1 格間長 l を採つて之の變形を考へるには，圖-39 の如く綾片に力をかけて見れば良い。頂點 A に於ては格間長 l に作用する全剪斷應力の合計 τl が集中してかかる。底點 B 及び C に於ては各隣りの綾片にかゝる

圖-38.



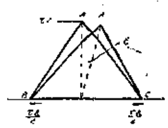
べき力を除けば夫々 $\tau l/2$ づつが $\overrightarrow{CB}$ の方向にかゝる事となる。斯る力系に於て A, B, C 共に移動するのであるが弦材に伸縮がない故迄 BC を固定して考へ A のみ A′ に變位したと考へる事が出來る。然る時は此の組合せ壓縮材は剪斷力 $Q=\tau h$ を受けて ε なる剪斷歪度を受けたのである。次に ε を求めて見よう。

綾片 AB にかかる引張力は $\dfrac{\tau h}{2}\sec\theta$ である。從つて AB の伸びは

$$A'B-AB=\frac{\tau l d}{2EA_d\cos\theta}=\frac{\tau h^2}{EA_d\sin^2\theta}$$

AC の縮みも同量である。

圖-39.



$$\therefore\quad AA'\doteqdot\frac{\tau h^2}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \varepsilon\doteqdot\frac{AA'}{h}\doteqdot\frac{\tau h}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}$$

然るに　$$\tau h=Q=P\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\quad \varepsilon=\frac{Q}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}=\frac{P}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{dy}{dx}$$

ε が一定であれば壓縮材の撓みにはならない。即ち **圖-36** の如く歪むだけである。ε に變化がある時此れが撓みとなる。曲げモーメントに依る撓みに附け加へらるべき剪斷力に依る撓みは

$$\frac{d\varepsilon}{dx}=\frac{P}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}\frac{d^2y}{dx^2}$$

で表はされる。d^2y/dx^2 の係數である。

$$\frac{P}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}$$

は (2) 式に於ける

$$\frac{rP}{AG}$$

に相等する項である。從つて (81) 式と同樣の形で限界荷重を求むれば

$$P_{cr}=\frac{P_e}{1+\dfrac{P_e}{EA_d\sin^2\theta\cos\theta}}\quad\cdots\cdots(82)$$

P_e はオイレルの限界荷重であつて，兩端鉸支持の場合は

$$P_e=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}$$

である。從つて其の場合には

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2I_0}{A_dL^2\sin^2\theta\cos\theta}}\quad\cdots\cdots(83')$$

玆に $I_0=2A_f\left(\dfrac{h}{2}\right)^2$ であり，細長比を $s=\dfrac{2L}{h}$ で表はせば

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\dfrac{A_f}{A_d}}\quad\cdots\cdots(83)$$

此の組合せ壓縮材が骨組の平面に於て不安定な挫屈を起さない爲の條件は

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{6\pi^3\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}\quad\cdots\cdots(47)$$

であつた，此の關係を (83) 式に代入すれば次式を得る。

$$P_{cr} \geqq \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2\theta} \quad \cdots\cdots(84)$$

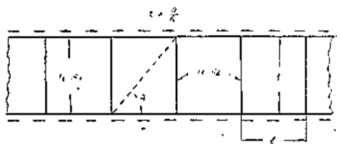
(84) 式に依つて見ても限界荷重は綾片の角度如何に依つてオイレルの限界荷重と零の間を變化する。$\theta \to 0$ なる時は限界荷重はオイレルの限界荷重に近附くが然しながら (47) 式に依れば $\frac{A_d}{A_f} \to \infty$ となり實現不可能であり，又 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ ならしむれば (47) 式に對しては有利であるが (84) 式に於ては $P_{cr} \to 0$ となり又實際的でない。

(47) 式，(84) 式を同時に考慮すれば結局 $\theta = 45 \sim 60°$ 程度が最も適當な處であらう。

(83) 式はティモシェンコ氏著挫屈理論 27 節 (94) 式と同じものであつて，角度の取り方が $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ になつてゐる點が異なるのみである。著者は不安定なる挫屈を起さざる爲の條件を之に加へて考察を一歩進め樣とするのである。

b) 第 2 種骨組

圖-40.



第 2 種骨組に就ても同樣の考への下に剪斷力の影響を加味して限界荷重を求むる事が出來る。卽ち

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\left\{\frac{h^2\cos\theta}{12EI_h\sin\theta}+\frac{h^2\cos^2\theta}{24EI_f\sin^2\theta}\right\}} \quad \cdots(85')^*$$

此の場合には綴片 h の慣性モーメント I_h のみならず弦材の慣性モーメント I_f が入つて來る。此の種の構造が不靜定なる爲である。

但し

s: 組合壓縮材全體に關する細長比

s_h: 綴片 h に關する細長比

s_f: 格間長 l に關する弦材の細長比

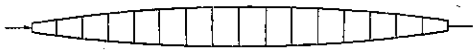
である。此處に於て (48) 式の條件を入れれば

$$P_{cr} \geqq \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{s_h^2}{36}+\frac{\pi^2 s_f^2}{12s^2}} \quad \cdots\cdots(86)$$

$\frac{s_h^2}{36}$，$\frac{\pi^2 s_f^2}{12s^2}$ は通常の場合可成りに大きい數値を示すであらうから，第 2 種骨組に於ては不安定なる挫屈を起さざる爲の條件を滿足する程度に強力な綴片を施しても，その限界荷重 P_{cr} はオイレルの限界荷重 P_e より甚だしく低いであらう。

曲げモーメントのみを考へる時は第 2 種骨組は有利なる如く見えたが，剪斷力の影響を考へる時はその骨組の不靜定性に基く弱點が曝露され限界荷重の著るしき低下が見られる。

圖-41.



此の種の骨組で 圖-41 の如き變斷面組合せ壓縮材を集成すれば剪斷力の影響に依る限界荷重の低下を覆ひ得て有利であらう。此の事はフィーレンディール橋の場合に就ても類似點を見出す。

---

*) ティモシエンコ氏挫屈理論 27 節 (95) 式と同じものである。

第 2 種骨組の四角柱が其の骨組の平面で不安定なる挫屈を起さない爲の條件は

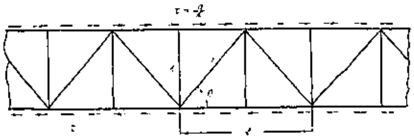
$$\frac{A_h}{A_f} \geqq \frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta} \quad \cdots\cdots(48)$$

であつた。此の條件と關聯して考へるに都合よい樣に (85′) 式を變形すれば

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{\pi^2 s_h^2\cos\theta}{6s^2\sin\theta}\cdot\frac{A_f}{A_h}+\frac{\pi^2 s_f^2}{12s^2}} \quad \cdots\cdots(85)$$

c) 第 3 種骨組

圖-42.



此の場合には綾片 d に比較して綴片 h は剪斷力に對して殆ど抵抗を及ぼさない。從つて剪斷力に對しては第 1 種骨組を全く同樣に取扱はれる。卽ち限界荷重に對しては (83) 式が其儘適用される。

第 3 種骨組の組合せ壓縮材がその骨組の面內で不安定なる挫屈を起さない爲の條件は

$$\frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta} \qquad \cdots\cdots (49)$$

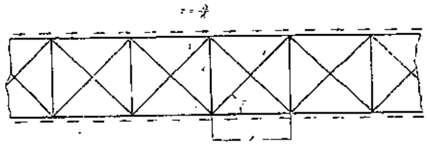
であつた。

此の條件式を (83) 式に代入すれば

$$P_{cr}\geqq\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2\theta+\frac{A_h}{3A_d\sin\theta\cos^2\theta}} \qquad \cdots\cdots (87)$$

之に依つて見れば綴片を用ふるよりは綾片のみの方が有利の樣に見える。然しながら (49) の條件式は綴片を取りやめれば取止めた材料より遙かに多くの材料を綾片に附加しなければならぬ事を示してゐる。經濟的な柱を組立てるには 2, 3 の場合に就て試算を行はなければならない。

圖-43.



d) 第4種骨組

此の場合に於ても綴片は剪斷力に何等の抵抗をも及ぼさない。從つて第 5 種骨組（複ワーレン形）と同樣に取扱はれる。複ワーレン型と同樣であれば限界荷重に對する式は (83) 式に於て A_d を $2A$ と置けば良い。卽ち

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2I_0}{2A_dL^2\sin^2\theta\cos\theta}}$$

$$=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{A_f}{A_d}\cdot\frac{\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}} \qquad \cdots\cdots (88)$$

之に對して不安定なる挫屈を起さない爲の條件は

$$\frac{1}{A_f}(A_h+2A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta} \qquad \cdots\cdots (50)$$

であつた。(50) 式を (88) 式に代入すれば

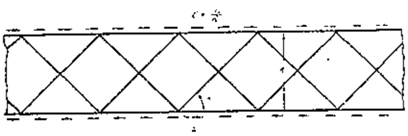
$$P_{cr}\geqq\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2\theta+\frac{A_h}{6A_d\sin\theta\cos^2\theta}} \qquad \cdots\cdots (89)$$

となる。

e) 第 5 種骨組

此の種の骨組の限界荷重に對する式は (88) 式と全く同じである。不安定なる挫屈を起さない爲の條件は (50) 式に於て $A_h=0$ と置けば得られる。此の條件を考慮した限界荷重の式は (89) 式に於て同樣に $A_h=0$ と置けば良い。之は (84) 式と全く同じである。

圖-44.



以上は四角柱の一側面を取つて考へたのであるから，四角柱全體を考へる時は限界荷重は本節に於ける P_{cr} の 2 倍となる。或は又 I_0 として柱全體の慣性モーメントを取れば (83) 式, (85) 式, (88) 式は其儘四角柱の限界荷重を與へる式となる。

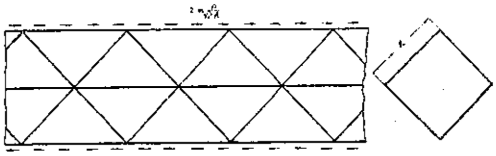
（ii） 對角線の方向に挫屈する場合

斷面が正四邊形をなし部材の配置が全く對稱的である四角柱の對角線の方向の挫屈を考へる。此の場合は四角柱全體を考へるのであるから此の點前節と區別しなければならない。

a) 第 1 種骨組

$$\tau=\frac{Q}{\sqrt{2}h}$$

圖-45.



組合壓縮材が剪斷力 Q のみを受けてゐる狀態は部分的に置換すれば 圖-45 に於ける如く纖維弦材に

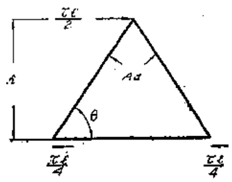
$$\tau=\frac{Q}{\sqrt{2}h}$$

なる剪斷力が作用してゐるものと考へる事が出來る。此の剪斷力は 2 つの骨組側面で支持されるのであるから骨組の一側面を取つて考へれば 圖-46 の如く力がかかるものと見做す事が出來る。此れは 圖-39 の場合と相似であるから骨組の面の剪斷歪度 ε' は次の如く表はされる。

$$\varepsilon'=\frac{\tau h}{2EA_a\sin^2\theta\cos\theta}=\frac{Q}{2\sqrt{2}\,EA_a\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{P}{2\sqrt{2}EA_a\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{dy}{dx}$$

圖-46.



壓縮材全體としての剪斷歪度を ε とすれば

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\varepsilon'$$

でなければならない。

故に

$$\varepsilon=\frac{P}{2EA_a\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{dy}{dx}$$

從つて剪斷力の影響を考慮に入れた場合の限界荷重は

$$P_{cr}=\frac{P_e}{1+\dfrac{P_e}{2EA_a\sin^2\theta\cos\theta}}$$

となる。兩端鉸支持の場合にはオイレルの限界荷重は

$$P_e=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}$$

であるから

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2I_0}{2A_aL^2\sin^2\theta\cos\theta}}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\dfrac{A_f}{A_a}}\quad\cdots\cdots(90)$$

となる。但し

$$I_0=4A_f\left(\frac{h}{2}\right)^2,\qquad \frac{2L}{h}=s$$

である。(90) 式を骨組の平面內で挫屈する場合の (83) 式に比較すれば，四角柱に於ては骨組の平面內で挫屈する場合も對角線の方向に挫屈する場合も限界荷重には變りがない事が解る。

第 1 種骨組を有する組合せ四角柱が對角線の方向に不安定な挫屈を起さない爲の條件は

$$\frac{I_a}{I_0}\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin^4\theta}\quad\cdots\cdots(53)$$

であつた。之を斷面積に對する式に書き改めれば

$$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{\pi^2s_a^2\cos\theta}{2s^2\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots(53')$$

となる。但し s_a は綾片の細長比である。此の條件は式より明らかなる如く著るしく强大な綾片を要求するものであつて實際の場合滿足され相にない。之は又一方より考へれば四角柱が對角線の方向の挫屈に對して非常に弱い事を示すものである。

(53′) 式の條件を (90) 式に代入すれば

$$P_{cr} \geqq \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \frac{1}{1+\dfrac{4}{s_a^2 \cos^2\theta}} \quad \cdots\cdots (91)$$

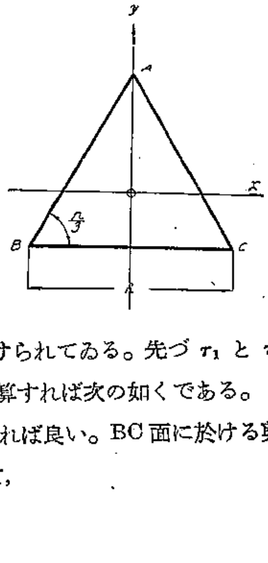
を得る。此れは骨組の平面内で挫屈する場合の (84) 式に相當する式である。

對角線の方向に挫屈する場合の第 2~5 種骨組の四角柱の限界荷重も第 1 種骨組に於けると同樣，骨組面の方向に挫屈する場合の限界荷重と相等しい。即ち第 2 種骨組に對する限界荷重に對しては (85) 式を，第 3 種骨組に對しては (83) 式を，第 4 種及び第 5 種骨組に對しては (88) 式を其儘使用する事が出來る。對角線の方向に不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は第 2 種以下の骨組の場合に於ても既に求められた。之等の條件を限界荷重の式に入れれば夫々の骨組に應ずる式の如き形の式が得られるであらう。

3. 剪斷力の影響を考慮した場合の組合せ三角柱の限界荷重

三角柱の挫屈にも 2 つの特性的方向が考へられる。圖-47 を其の斷面正三角形と考へれば，x 軸の方向に挫屈する場合（一側面の方向に挫屈する場合）と y 軸の方向に挫屈する場合（一側面に直角の方向に挫屈する場合）とである。

圖-47.



(i) 一側面の方向に挫屈する場合

三角柱が 圖-47 に於ける BC の方向に挫屈する場合の剪斷力の影響に就て先づ計算する。此の場合縱維弦材は B と C の位置に在り其の間の剪斷力の傳達には BC BAC の 2 つの徑路がある。此の 2 つの徑路を通つて傳達される剪斷應力度を夫々 τ_1, τ_2 とする。但し τ_1, τ_2 は次の關係式を滿足しなければならない。

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \qquad Q = \tau h \quad \cdots\cdots (92)$$

但し Q は壓縮材の或る點に於ける剪斷力であつて (79) 式に依り軸荷重と結び付けられてゐる。先づ τ_1 と τ_2 が如何なる割合になつてゐるかを求めなければならない。先づ第 1 種骨組に就て計算すれば次の如くである。

第 1 種骨組に於て BC の骨組面を考へれば 圖-39 に於ける τ を τ_1 に置き換へれば良い。BC 面に於ける剪斷歪度を ε とすれば此れは BC の方向に挫屈する場合の三角柱の剪斷歪度であつて，

$$\varepsilon = \frac{\tau_1 h}{EA_a \sin^2\theta \cos\theta}$$

となる。次に BA 面（AC 面に就ても同樣）を考へその骨組面の剪斷歪度を ε' となれば同樣に

$$\varepsilon' = \frac{\tau_2 h}{EA_a \sin^2\theta \cos\theta}$$

を得る。

ε と ε' の間には次の關係が存在する。

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\tau_1}{2} = \tau_2 \quad \cdots\cdots (93)$$

(92), (93) 兩式より

$$\tau_1 = \frac{2Q}{3h} \qquad \tau_2 = \frac{Q}{3h}$$

從つて三角柱の剪斷歪度は次の如く表はされる。

$$\epsilon=\frac{2Q}{3EA_a\sin^2\theta\cos\theta}=\frac{2P}{3EA_a\sin^2\theta\cos\theta}\frac{dy}{dx}$$

以上より剪斷力の影響を考慮に入れた場合の限界荷重は次の如くなる。

$$P_{cr}=\frac{P_e}{1+\dfrac{2P_e}{3EA_a\sin^2\theta\cos\theta}} \quad\cdots\cdots(94)$$

兩端鉸支持の場合

$$P_e=\frac{\pi^2EI_0}{L^2},\qquad I_0=\frac{A_fh^2}{2}$$

である。之等の關係式を (94) 式に代入すれば

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\dfrac{A_f}{A_a}} \quad\cdots\cdots(95)$$

を得る。但し細長比 s は $s=\dfrac{\sqrt{6}L}{h}$ である。(95) 式は形に於て (83) 式或は (90) 式と全然同一である。第 2 種以下の骨組に對しても四角柱の場合と全然同形である事が豫想されたので第 2 種以下の骨組に對する計算は省略する。第 1 種骨組の三角柱が不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は

$$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta} \quad\cdots\cdots(58)$$

であつた。此の條件式を (95) 式に代入すれば次式を得る。

$$P_{cr}\geqq\frac{\pi^2EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{9}\tan^2\theta} \quad\cdots\cdots(96)$$

(96) 式を (84) 式と比較すれば，不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は三角柱の方が四角柱（骨組の面内で挫屈する場合）より過重なだけ限界荷重の低下率は三角柱の方が小さい。

第 2 種以下の骨組の組合せ三角柱に對しても同樣に剪斷力の影響を考慮に入れて x 軸の方向の挫屈に對する限界荷重を求むる事が出來る。之等を形に於て既に求めた四角柱の限界荷重の式と同一である。卽ち第 2 種骨組に對しては (85) 式を，第 3 種骨組に對しては (83) 式或は (95) 式を，第 4 種，第 5 種骨組に對しては (88) 式を其儘使用する事が出來る。四角柱と三角柱の場合に於ける細長比の相異は既に式中に於て考慮されてゐる。

第 2～5 種骨組の三角柱が不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は夫々第 3 篇 (59), (60), (61), (62) 式で表はされた。之等の條件式をその對應する限界荷重の式に代入すれば各骨組に對して (96) 式と同樣な式が導かれる。

(ii) 一側面に直角の方向に挫屈する場合

圖-47 に於て y 軸の方向に挫屈する場合の剪斷力の影響に就て計算する。此の場合纎維弦材は A 及び B, C であつて其の間の剪斷力の傳達は AB, AC の 2 つの骨組面に依つて同等に傳へられる。第 1 種骨組に就て AB 面（AC 面に就ても同じ）を取つて考へれば **圖-39** に於て τ を $\tau/2$ に置き換へれば良い。但し此の場合の τ は次式に依つて與へられる。

$$\tau=\frac{2Q}{\sqrt{3}h}$$

Q は (79) 式に依つて軸荷重と結び付けられる。骨組面の剪斷歪度を ε' とすれば ε' は次式で表はされる。

$$\varepsilon'=\frac{Q}{\sqrt{3}EA_a\sin^2\theta\cos\theta}$$

之を y 軸の方向の剪斷歪度 ε に換算すれば

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\frac{2Q}{3EA_a\sin^2\theta\cos\theta}=\frac{2P}{3EA_a\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{dy}{dx}$$

となる。此の式は x 軸の方向に挫屈する場合と全然同じである。從つて限界荷重も x 軸の方向に挫屈する場合

の (94) 或は (95) 式と全然同じとなる。

y 軸の方向の挫屈に對して，挫屈を不安定ならしめざる條件は x 軸の方向の挫屈の場合と同様である。第 1 種骨組に對しては (58) 式の條件式が成立する。此の條件式を限界荷重の式に入れれば同様に (96) 式を得る。

三角柱の場合に於ては x 軸の方向の挫屈に於ても y 軸の方向の挫屈に於ても限界荷重，安定條件共に同一である事が解る。第 2 種以下の骨組に就て一々計算する必要はないであらう。

4. 約

第 4 篇に於ては剪斷力の影響を考慮に入れて組合せ壓縮材の挫屈現象を解析した。その結果は次の 2 項目に要約される。

(1) 組合せ壓縮材の限界荷重は所謂オイレルの限界荷重より低下する。

中實壓縮材に於ては此の低下は殆ど問題にならぬ程度であるが組合せ壓縮材に於ては弦材の斷面積に比較して綾片の斷面積が非常に小である爲に兩弦材間の剪斷力の傳達に於て中實壓縮材に於けるより遙かに大なる剪斷歪度を示し，此の爲に限界荷重は非常に大なる影響を蒙り，曲げモーメントのみに着目した場合の限界荷重即ちオイレルの限界荷重より著るしく低下する。剪斷力の影響を考慮した場合の限界荷重が正しい限界荷重を與へるであらう。

(2) 中空壓縮材としての安定の問題に對しては剪斷力の影響を考慮すると否とは何等の關聯をも有しない。即ち限界荷重と安定度の問題とは全然別個の問題である。

5. 第 3 篇及び第 4 篇の總括

組合せ四角柱と組合せ三角柱の限界荷重と安定條件とを總括すれば 表-6 に示す如くである。

表-6 (a) 組 合 せ 四 角

	限 界 荷 重	不安定なる挫屈を起さざる爲の條件	
		骨組の平面内で挫屈する場合	對角線の方向に挫屈する場合
第 1 種 骨 組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_d}}$	$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$	$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{\pi^2 s_d^2\cos\theta}{2s^2\sin^2\theta}$
第 2 種 骨 組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2 s_h^2\cos\theta}{6s^2\sin\theta}\cdot\frac{A_f}{A_h}+\frac{\pi^2 s^2}{12s^2}}$	$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$	$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{\pi^2 s_h^2\cos\theta}{2s^2\sin\theta}$
第 3 種 骨 組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_d}}$	$\frac{1}{A_f}(A_h+A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$	$\frac{A_d}{A_f}\left(\frac{A_h}{A_d s_h^2}+\frac{2\sin\theta}{s_d^2}\right)\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin\theta}$
第 4 種 骨 組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_d}}$	$\frac{1}{A_f}(A_h+2A_d\sin^3\theta)\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$	$\frac{A_d}{A_f}\left(\frac{A_h}{A_d s_d^2}+\frac{2\sin\theta}{s_d^2}\right)\geqq\frac{\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin\theta}$
第 5 種 骨 組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_d}}$	$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{3\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$	$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{\pi^2 s_d^2\cos\theta}{4s^2\sin\theta}$

限界荷重は四角柱に於ても同じ形の式で與へられ，且つ各〻 2 つの特性的方向に對しても變りはない。

安定條件は三角柱に於ては 2 つの特性的方向に對して相異はないが四角柱に於ては著るしい相異がある。

四角柱の限界荷重は何れの方向に對しても理論的には同一であるにも拘らず，實際には對角線の方向に著るしく弱いと謂ふ事實は，中空壓縮材の問題は限界荷重だけでは解決出來ず，安定度と謂ふ事が重大な問題となつて來る事を實證してゐるものと見る事が出來る。

以上著者の取扱つた組合せ壓縮材は部材を對稱的に配置した等斷面四角柱，三角柱であつて通常電柱等に多く見られる様なものを對象とした。橋梁等の構造物に於ける壓縮材の場合には溝型の強力な弦材を綾片又は綴片で結

表-6 (b). 組合せ三角柱

	限界荷重	不安定なる挫屈を起さざる爲の條件
第1種骨組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_a}}$	$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$
第2種骨組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2 s_h^2\cos\theta}{6s^2\sin\theta}\cdot\frac{A_f}{A_h}+\frac{\pi^2 s_f^2}{12,^2}}$	$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$
第3種骨組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_a}}$	$\frac{1}{A_f}(A_h+A_a\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$
第4種骨組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_a}}$	$\frac{1}{A_f}(A_h+2A_a\sin^3\theta)\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta}$
第5種骨組	$\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{s^2\sin^2\theta\cos\theta}\cdot\frac{A_f}{A_a}}$	$\frac{A_a}{A_f}\geqq\frac{9\pi^2\cos\theta}{2s^2\sin^4\theta}$

合するのが通常であるが，此の場合に對しては四角柱が“一側面の方向に挫屈する場合”の式を適用すれば良い。

剪斷力の影響を考慮した場合の管柱の限界荷重は中實壓縮材の場合に準じて

$$P_{cr}=\frac{P_e}{1+\frac{rP_e}{2\pi r_0 tG}}$$

として良いであらう。管柱の場合には組合せ壓縮材と異つて剪斷力の傳達に對して充分な材料を有してゐるので剪斷力の影響を考慮に入れても限界荷重は所謂オイレルの限界荷重より大して低下しないであらう事が常識的にも豫期される。

之に對して管柱が不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は

$$\frac{t^2}{r_0^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+30\pi^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2+\frac{9\pi^4}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4}-4+\frac{3\pi^2}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\}$$

r_0/L 小なる時は略

$$\frac{t}{r_0}\geqq\frac{3\pi}{2}\left(\frac{r_0}{L}\right)\left\{1-\frac{3\pi^2}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\}$$

である。

剪斷力の影響は結局組合せ壓縮材に就て重要視せらるべきものであつて，中空壓縮材全般に關する問題ではないと言ふ事が出來る。