論 說 報 告

第26卷第5號 昭和15年5月

固定梁の軸張力實用計算法

准員 櫻井豐三*

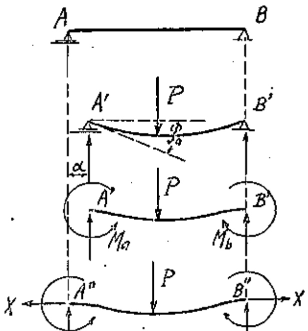
要旨 軸張力を考慮せる固定梁の解法は 10 數年前應部屋博士が提案され，その後 R. Wiederkehr氏が座標原點を少しく變へて同樣な公式を誘導したが，何れも軸張力の算式が超越函數式の爲實用上不便な憾みがあつた。本文はこの困難を除くべく單純梁との關聯に於て簡易なる實用式を誘導し，その解法を例題に就て說明し併せて誤差の程度を示して應用の範圍を明らかにしたものである。尙應部屋博士による理論式並にそれより導かれる簡易式に就てもその概略を記述した。

1. 緒 言

普通單純梁及固定梁として取扱はれるものは構造上一端が可動と見做し得ない場合に對しても，便宜上水平方向の移動可能即ち伸縮することの無い中立軸の存在を假定してゐる。然しながら實際問題として水平變位が全然許されず若しくはその一部が拘束される如き場合は決して少くなく，この場合當然の結果として軸張力が誘發される。玆に謂ふ固定梁とは斯る場合を指すものであつて，薄鐵板を張つた樣な構造物が水壓等を受ける場合に於ては誘發される軸張力の影響は等閑に附すべからざるものである。

今 圖-1 に於て單純梁 AB が荷重 P に依り撓んだ場合を考へると，可動端 A は A′ に α だけ移動し，同時に A 點に於ける彈性曲線の切線は φ_a 丈け廻轉する。同樣に B 點に於ける夫れを φ_b とすると，この移動した位置に於て曲げモーメント M_a 及 M_b を圖の如く働かしめ，φ_a, φ_b を零に導くことは可能である。次に軸張力 X を加へて A′ 端を α だけ左方に移動し A 點の位置まで持つて來ることも出來る譯である。

圖-1.



固定梁とはこの φ_a, φ_b が零若しくは單純梁の廻轉角よりも小にして M_a 及 M_b の誘發を見る場合，又は α が零若しくは單純梁の水平移動量より小にして X の誘發を見る場合及この兩者が同時に生ずる場合を謂ふのである。この場合 $\alpha=0$, $\varphi_a=\varphi_b=0$ なる如き場合を完全固定梁，その他の場合を不完全固定梁と謂ひ，これ等の移動量並びに廻轉角の有無大小の組合せにより種々の異つた興味ある問題を與へる。然もこれ等は後述する如く軸張力の算出に歸着するのであるが，その算式は双曲線函數の形で與へられ實用上非常に不便なるのみならず，正確な値を得ることにも相當困難がある。筆者は以前この問題を少しく取扱つたことがあるが，最近偶々當時とは異る考察より實用式を誘導したので，これ等を一括して御批判を仰ぐことも强ち徒爾ではないと考へて本誌面を拜借した次第である。尙說明の都合上應部屋博士の誘導された理論式を隨處に必要とするので簡單にその大要を記述し，然る後本論に入ることにする。詳細は同博士の著書その他末尾の文獻(1)を御參照願ひ度い。

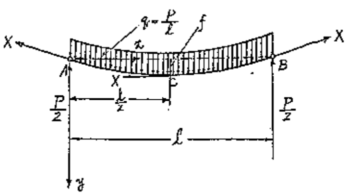
2. 理 論 式

a. 軸張力の存在する梁の彈性曲線(2)

* 工學士 鐵道局技手 名古屋鐵道局工務部保線課

圖-2 に於て梁 AB が荷重 q に依つて彎曲し，軸張力 X が誘發されたものとする。今水平變位が可能にして X が誘導されない場合の彈性曲線半徑を ρ_1 とすると，熟知の次の關係が成立する。

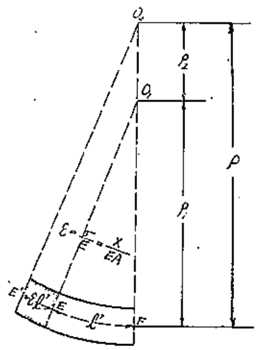
圖-2.



$$\rho_1=\frac{EI}{M}$$

然るにこの場合 X に依り梁は εl 丈け伸長する爲長素 l' を取つて考へると，圖-3 の如く $\varepsilon l'$ 丈け斷面 E が平行に移動し從つて曲率半徑は ρ_2 丈け增大することになる。今 I を梁の斷面二次モーメント，A を斷面積，E を材料のヤング係數とすると

圖-3.



$$\varepsilon=\frac{X/A}{E}=\frac{X}{EA}$$

で表はされる。又圖-3 より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\varepsilon l'}{l'}=\varepsilon=\frac{X}{EA}\qquad\therefore\quad \rho_2=\frac{X}{EA}\rho_1$$

然るに　$\rho=\rho_1+\rho_2=\rho_1\left(1+\dfrac{X}{EA}\right)=\dfrac{EI}{M}\left(1+\dfrac{X}{EA}\right)$

$$=\frac{I}{M}\left(E+\frac{X}{A}\right)=\frac{KI}{M}\qquad 茲に\quad K=E+\frac{X}{A}$$

從つて彈性曲線の微分方程式は

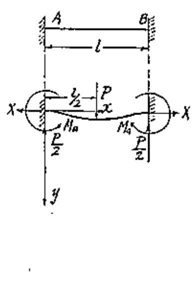
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{KI}\quad\cdots\cdots(1)$$

となるが，普通 X/A は E に比して省略的微量であるから E を使用して差支なく以下述べる場合もこれに依ることにする。

b.　中央に單一荷重を有する完全固定梁

梁 AB が P なる單一荷重を受け，圖-4 の如き狀態に於て平衡にあるものとし，座標原點を A に取り，x 及 y 軸を夫々圖の方向に定めると

圖-4.



$$M=\frac{P}{2}x-M_a-Xy$$

これを (1) 式の M に代入すれば（K の代りに E とする）

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{X}{EI}y+\frac{1}{EI}\left(\frac{P}{2}x-M_a\right)=0$$

これより　$y=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}+\dfrac{P}{2X}x-\dfrac{M_a}{X}$　　茲に　$m=\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

然るに　$x=0$ に於て $y=0$,　$x=l/2$ に於て $dy/dx=0$

なるを以て　$M_a=X(C_1+C_2)$

$$C_1e^{\omega}-C_2e^{-\omega}+\frac{Pl}{4\omega X}=0\qquad 茲に\quad \omega=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{X}{EI}}$$

これより

$$C_1=\frac{1}{2X\cosh\omega}\left\{M_a(\cosh\omega-\sinh\omega)-\frac{Pl}{4\omega}\right\},\ C_2=\frac{1}{2X\cosh\omega}\left\{M_a(\cosh\omega+\sinh\omega)+\frac{Pl}{4\omega}\right\}$$

$$\therefore\quad y=\frac{Pl}{4\omega X\cosh\omega}\left\{\frac{2\omega x}{l}\cosh\omega-\sinh\left(\frac{2\omega x}{l}\right)\right\}+\frac{M_a}{X\cosh\omega}\left\{\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega-\cosh\omega\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_a}{EI}\frac{\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega}{\cosh\omega}-\frac{P\omega}{Xl}\frac{\sinh\left(\frac{2\omega x}{l}\right)}{\cosh\omega}$$

故に (1) 式より

$$M=\frac{Pl\sinh\left(\frac{2\omega x}{l}\right)}{4\omega\cosh\omega}-\frac{M_a\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega}{\cosh\omega}$$

然るに完全固定梁の場合は $x=0$ に對し $\frac{dy}{dx}=0$ なるを以て，これより

$$M_a=\frac{Pl}{4\omega}\tanh\frac{\omega}{2} \quad\cdots\cdots(2)$$

從つてこの値を上記の y 及 M の式に代入すると

$$y=\frac{P}{2X}\left\{x-\frac{l\sinh\frac{\omega x}{l}\cosh\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega x}{l}\right)}{\omega\cosh\frac{\omega}{2}}\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$M=\frac{Pl}{4\omega}\frac{\sinh\left(\frac{2\omega x}{l}-\frac{\omega}{2}\right)}{\cosh\frac{\omega}{2}} \quad\cdots\cdots(4)$$

以上の算式は未知量である ω 及 X を含み，且つ ω は X の函數で P なる荷重に依つて生ずるものであるから，結局軸張力 X の算出が必要となる。而して X は荷重に依る梁の伸長によつて誘發されるものであるから，今この量を Δl とすると(3)

$$\Delta l=\frac{Xl}{EA}$$

一方梁の長さは伸長後 $l+\Delta l$ となるを以て

$$l+\Delta l=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\fallingdotseq 2\int_0^{\frac{l}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx=l+\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx$$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx-\frac{Xl}{EA}=0$$

今この式の $\frac{dy}{dx}$ に (3) 式より求めた値を代入して積分し，$X=\frac{4EI}{l^2}\omega^2$ を用ひて整理すると

$$\frac{2+\cosh\omega-\frac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^6\cosh^2\frac{\omega}{2}}=\frac{1024E^2I^3}{P^2l^6A} \quad\cdots\cdots(5)$$

が得られる。これが中央に單一荷重を有する完全固定梁の軸張力を與へる算式であつて，右邊は梁の材料，寸法及荷重狀態に依つて定まる既知項である。從つてこれが算出に當つては，X が ω の中に含まれる超越函數として與へられてゐるので，右邊の數値を滿足する如き ω を試索的に求めるより外に方法が無い。$0.001\leqq\omega\leqq0.1$ なる ω に對する左邊の値は **表-1** の如くである。

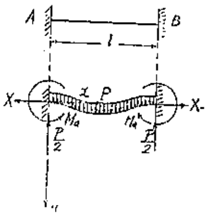
c. 等分布荷重を滿載する完全固定梁

圖-5 より任意の點の曲げモーメントは次式で與へられる。

$$M=\frac{P}{2}x-Ma-Xy-\frac{qx^2}{2}$$

茲に $q=\dfrac{P}{l}$

圖-5.



これを彈性曲線の方程式に代入して y を求めると

$$y=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}+\frac{Px}{2X}-\frac{qx^2}{2X}-\frac{Ma}{X}-\frac{qEI}{X^2}$$

茲に $m=\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

b の場合と同樣の環境條件より C_1, C_2 を決定して上式に入れると

$$y=\frac{Px}{2X}\left\{1-\frac{x}{l}\right\}-\left\{\frac{Ma}{X}+\frac{PEI}{X^2l}\right\}\left\{1-\frac{\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega}{\cosh\omega}\right\}$$

茲に $\omega=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

叉曲げモーメントの表式は

$$M=\frac{PEI}{Xl}\left\{1-\frac{\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega}{\cosh\omega}\right\}-\frac{Ma\cosh\left(\frac{2x}{l}-1\right)\omega}{\cosh\omega}$$

表-1.

ω	$\dfrac{2+\cosh\omega-\dfrac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^4\cosh^2\dfrac{\omega}{2}}$	ω	$\dfrac{2+\cosh\omega-\dfrac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^4\cosh^2\dfrac{\omega}{2}}$
0	∞		
0.001	16666.66329	0.051	6.40442
2	4166.66329	52	6.16034
3	1851.84847	53	5.92974
4	1041.66329	54	5.71222
5	666.66329	55	5.50627
6	462.95959	56	5.31126
7	340.13268	57	5.12641
8	260.41329	58	4.95105
9	205.75794	59	4.78453
0.010	166.66329	0.060	4.62626
11	137.73768	61	4.47571
12	115.73737	62	4.33239
13	98.61596	63	4.19584
14	85.03064	64	4.06564
15	74.07070	65	3.94140
16	65.10079	66	3.82277
17	57.66676	67	3.70953
18	51.43696	68	3.60101
19	46.16468	69	3.49729
0.020	41.66329	0.070	3.39799
21	37.78953	71	3.30285
22	34.43189	72	3.21165
23	31.50261	73	3.12417
24	28.93181	74	3.04021
25	26.66329	75	2.95959
26	24.65146	76	2.88213
27	22.85849	77	2.80767
28	21.25513	78	2.73606
29	19.81431	79	2.66714
0.030	18.51515	0.080	2.60080
31	17.33968	81	2.53689
32	16.27227	82	2.47531
33	15.30119	83	2.41595
34	14.41416	84	2.35869
35	13.60207	85	2.30344
36	12.85671	86	2.25010
37	12.17076	87	2.19859
38	11.53864	88	2.14883
39	10.95433	89	2.10074
0.040	10.41329	0.090	2.05424
41	9.91136	91	2.00927
42	9.44485	92	1.96575
43	9.01051	93	1.92364
44	8.60544	94	1.88286
45	8.22708	95	1.84335
46	7.87312	96	1.80508
47	7.54152	97	1.76799
48	7.23042	98	1.73202
49	6.93818	99	1.69714
50	6.66329	100	1.66330
		∞	0

となる。然るに $x=0$ にて $\dfrac{dy}{dx}=0$ なるを以て，前述の y の表式より Ma は次の如く與へられる。

$$Ma=\frac{Pl}{4\omega^2}\left\{\frac{\omega}{\tanh\omega}-1\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

從つて y 及 M の表式は次の如くなる。

$$y=\frac{P}{2X}\left\{x\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{l\sinh\frac{\omega x}{l}\sinh\left(\omega-\frac{\omega x}{l}\right)}{\omega\sinh\omega}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$M=\frac{Pl}{4\omega^2}\left\{1-\frac{\omega\cosh\left(\frac{2\omega x}{l}-\omega\right)}{\sinh\omega}\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

これより前節と同樣の操作をなして次式が得られる。

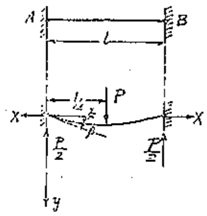
$$\frac{1}{\omega^6\sinh^2\omega}\left\{4\sinh^2\omega+\frac{24\sinh^2\omega}{\omega^2}-\frac{9\sinh 2\omega}{\omega}-6\right\}=\frac{6144\,E^2I^3}{P^2l^6A} \quad \cdots\cdots(9)$$

d. 中央に單一荷重を有する鉸端固定梁 (圖-6)

これは b の場合に比して $Ma=0$ である點が異るのみで，軸張力の計算式は水平變位が零並に兩端の曲げモー

メントが零なる條件より容易に見出される。

圖-6.



$$\frac{2+\cosh 2\omega-\dfrac{3\sinh 2\omega}{2\omega}}{64\omega^6\cosh^2\omega}=\frac{16E^2I^3}{p^2l^6A}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

玆に　　$\omega=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

(10) 式の左邊は $2+\cosh 2\omega-\dfrac{3\sinh 2\omega}{2\omega}\Big/(2\omega)^6\cosh^2\omega$ と書き直されるから，式の形は b の (5) 式と全く同一にして，唯 ω の代りに 2ω が入り來るのみである。從つて例へば **表-1** の 0.1 に對する値は (10) 式の $\omega=0.05$ に對する値を示すことになる。

彈性曲線及曲げモーメントは次式で與へられる。

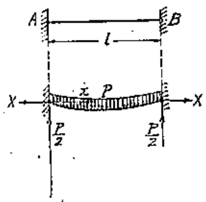
$$y=\frac{P}{2X}\left\{x-\frac{l\sinh\left(\dfrac{2\omega x}{l}\right)}{2\omega\cosh\omega}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$M=\frac{Pl\sinh\left(\dfrac{2\omega x}{l}\right)}{4\omega\cosh\omega}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

e. 等分布荷重を滿載する鉸端固定梁（圖-7）

この場合も同樣にして次の表式を得る。

圖-7.



$$\frac{4\omega^2\cosh^2\omega-24\cosh^2\omega+\dfrac{15\sinh 2\omega}{\omega}-6}{\omega^8\cosh^2\omega}=\frac{6\,144E^2I^3}{P^2l^6A}\cdots\cdots\cdots(13)$$

玆に　　$\omega=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

$$y=\frac{P}{2X}\left\{x-\frac{x^2}{l}-\frac{l}{2\omega^2}\right\}+\frac{Pl\cosh\left(\dfrac{2\omega x}{l}-\omega\right)}{4\omega^2X\cosh\omega}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$M=\frac{Pl}{4\omega^2}\left\{1-\frac{\cosh\left(\dfrac{2\omega x}{l}-\omega\right)}{\cosh\omega}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

3. 理論式の簡易化による考察

a. 概　說

上述せる處に依つて明らかなる如く，固定梁の問題は結局軸張力 X の解法に歸着する。然もこの X は ω の中に含まれる超越函數として與へられる爲，實用上甚だ不便であり，前掲 **表-1** 又はこれを圖表化したものを夫々の場合に對して準備する必要があるのみならず，試索法に依る結果煩雜な理論式を用ひても尙正確な値を得ることが容易でない。從つて實際問題としては，例へば **2-b** の場合にて右邊の値が 6.32145 とすると，**表-1** よりこれに對する ω は 0.051 と 0.052 の間にあることを知り，この間に於ては右邊の値と ω とは比例するものと假定して求める程度で滿足せざるを得ない。ω の値が定まると $\omega=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$ 若しくは $X=\dfrac{4EI}{l^2}\omega^2$ に依つて X が與へられ，これより梁の撓や曲げモーメントを求めることは容易である。

扨て $\sinh\omega$ 及 $\cosh\omega$ は熟知の如く

$$\left.\begin{aligned}\sinh\omega&=\omega+\frac{\omega^3}{3!}+\frac{\omega^5}{5!}+\frac{\omega^7}{7!}+\cdots\cdots\\ \cosh\omega&=1+\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}+\frac{\omega^6}{6!}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

で表はされ ω の小なる範圍に於ては實用上最初の數項のみを取つて充分である。從つてこれを用ひて軸張力計算式の左邊を展開して近似解を求めると，分子の最初の 2～3 項は消失するから，殘留した第 1 項のみを取り，又分母は $\sinh\omega\doteqdot\omega$, $\cosh\omega\doteqdot1$ と置いて實用式が誘導される。殊に最後の假定の如き相當粗雜の樣に見えるが **表-1** に示す如き範圍 ($\omega\leqq0.1$) に對しては充分正確であり，而も斯くして求めた近似値と正確に算出した値との間には極めて規則的な關係が存在するので，これを補正項として使用すると殆ど精密な式と同等なる ω 即ち X の算出が可能である。

又 $\sinh\omega$ 及 $\cosh\omega$ はその定義より

$$\sinh\omega=\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2},\qquad \cosh\omega=\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(16')$$

なるを以て，ω の高値（實用上 $\omega\geqq3$）に對しては $\sinh\omega\doteqdot\cosh\omega$ と見做して差支ない。依つて大なる軸張力即ち大なる ω が與へられる如き場合に對しては，この關係を利用して實用式が得られる。

ω が上述の範圍の中間にある場合は斯くの如き關係は見出されないので，軸張力算式の右邊の對數で與へられる近似式を用ひることとゝし，一應總べての場合に對して數表や煩瑣な計算によることなく ω を算出し得る樣な表式を誘導して見やう。

b.　中央に單一荷重を有する完全固定梁

この場合に對する軸張力の算式は (5) 式にて與へられる。

$$\frac{2+\cosh\omega-\dfrac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^6\cosh^2\dfrac{\omega}{2}}=\frac{1024\,E^2I^2}{P^2l^6A}\equiv f(\omega)\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

玆に　　$\omega=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{X}{EI}}$

今この左邊に (16) の展開式の關係を代入すると，分子の最初の 2 項は消失して

$$\text{左邊}=\frac{\dfrac{\omega^4}{60}+\dfrac{\omega^6}{1\,260}+\dfrac{\omega^8}{6\,480}+\cdots\cdot}{\omega^6+\dfrac{\omega^8}{4}+\dfrac{\omega^{10}}{48}+\cdots\cdot}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{60}+\dfrac{\omega^2}{1\,260}+\dfrac{\omega^4}{4\,680}+\cdots\cdot}{\omega^2+\dfrac{\omega^4}{4}+\dfrac{\omega^6}{48}+\cdots\cdot}$$

となる。從つて ω の小値に對しては

$$f(\omega)\doteqdot\frac{1}{60\omega^2}$$

と見做して差支なく，前掲の **表-1** とは殆ど同一の結果を與へる（例へば $\omega=0.1$ に對し $f(\omega)=1.666\,67$）。故に斯る ω に對しては

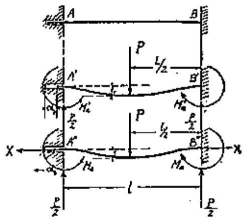
$$\frac{1}{60\omega^2}=\frac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A} \quad \cdots\cdots(17a)$$

或は $\omega=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{X}{EI}}$ を代入して

$$X=\frac{P^2l^4A}{15\,360EI^2} \quad \cdots\cdots(17b)$$

を得る。即ち X はこの式によつて計算され，$\omega\leqq0.1$ 換言すれば $f(\omega)\geqq1.6633\,0$ なる範圍（表-1 參照）に對しては實用上何等の支障が無く 表-1 の如きものを必要としない。今 圖-8 に於て，水平變位可能なる固定梁 AB が中央に單一荷重 P を受けた場合の水平變位 α_0 は次の如く與へられる。

圖-8.



即ち　$M=\frac{-P(l-\alpha_0)}{8}+\frac{P}{2}x$　より

$$y=\frac{P}{16EI}\left\{x^2l(1-\alpha_0)-\frac{4}{3}x^3\right\}$$

變位後も梁の長さは不變なることより

$$l=2\int_0^{\frac{l-\alpha_0}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\int_0^{\frac{l-\alpha_0}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx$$

$$\fallingdotseq l-\alpha_0+\frac{P^2l^5\left(1-\frac{\alpha_0}{l}\right)^5}{15\,360E^2I^2}$$

$$\therefore\quad \alpha_0=\frac{P^2l^5}{15\,360E^2I^2}\left(1-\frac{\alpha_0}{l}\right)^5\fallingdotseq\frac{P^2l^5}{15\,360E^2I^2}$$

故に前述の X の近似値を與へる表式は可動端を有する梁の水平變位即ち $\alpha_0=\frac{Xl}{EA}$ なる關係からも誘導されることが知れる。換言すれば 圖-8 に於て，彈性曲線の形狀を變へることなく梁の A 端を α_0 丈け左方に移動するに要する力が X を與へることになる。斯くの如く P が小即ち X の小なる範圍に於ては 圖-8 の $f\fallingdotseq f_0$ と見做すことが出來，伸長量 α は近似的に α_0 に等しいが X が或る値以上となると $f<f_0$ となり，この關係が成立しなくなる。

例として前揭の文獻 1) 又は 3) に示されてゐる例題をとると

$l=400$ cm　　$A=10.6$ cm²　　$I=170$ cm⁴　　$E=2\,100\,000$ kg/cm²

なる固定梁の中央に單一荷重

$P=100$ kg がかゝると $X=2.9$ kg　　$P=500$ kg がかゝると $X=72$ kg

となり，理論式によると同一の X を與へる。

尙我々は $1/60\omega^2$ と 表-1 に示されてゐる $f(\omega)$ との間に次の如き興味ある關係を見出すことが出來る。

$$\frac{1}{60\omega^2}-f(\omega)=0.0033\,6\sim0.0033\,7$$

即ち兩者の差が $\omega\leqq0.1$ なる範圍に於て殆ど同一であると云ふことは極めて興味あることで，且つこの關係は $\omega=1$ に對しても

$$\frac{1}{60\omega^2}-f(\omega)=0.0166\,67-0.0137\,45=0.0029\,22$$

圖-10.

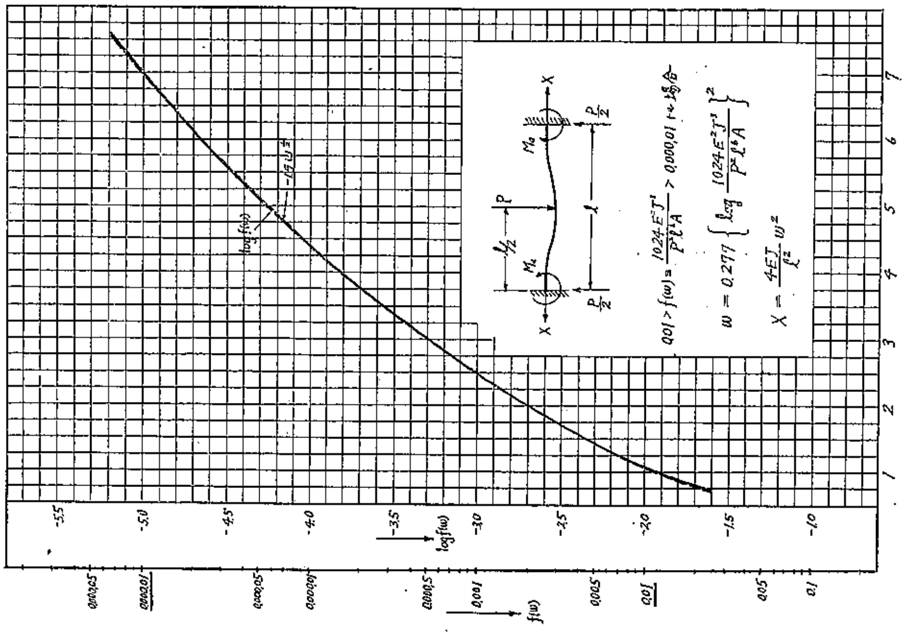
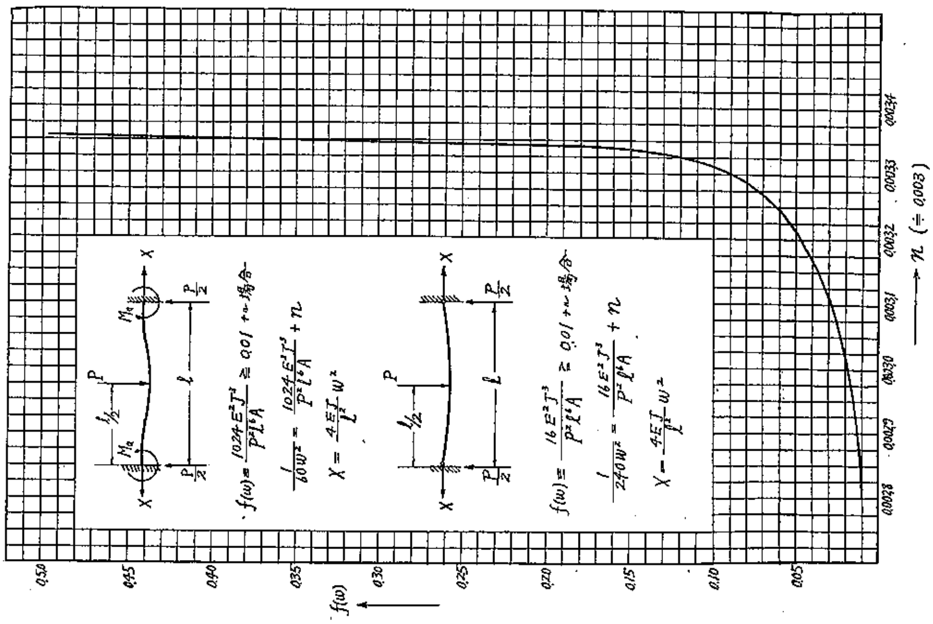


圖-9.



で大差がない。從つてこれ等の値を補正項として用ひるならば,近似式を用ひて而も完全な數値を見出し得る譯である。今この補正項を n とすれば (17a) 及 (17b) 式は一般に次の如くなる。

$$\frac{1}{60\omega^2}=\frac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A}+n \qquad (17)$$

$f(\omega)$ の種々の値に對する補正項 n は 圖-9 に示されてゐる。從つて軸張力の計算に當つては, $f(\omega)=1\,024\,E^2I^3/P^2l^6A$ の値に相當する n を 圖-9 より求めて (17) 式の ω を算出し, 然る後 X が見出されるのであるが, 實際問題として圖示の範圍 ($f(\omega)\geqq 0.01$) に對しては $n\doteqdot 0.003$ と置いて差支ない。

$$\left.\begin{array}{l}\therefore \quad \dfrac{1}{60\omega^2}=\dfrac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A}+0.003\\ \text{但し}\quad \dfrac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A}\geqq 0.01 \text{ なる場合}\end{array}\right\} \qquad (17')$$

次に ω の高値に對しては ($\omega/2\geqq 3$)

$$\cosh\frac{\omega}{2}\doteqdot\sinh\frac{\omega}{2}, \qquad \cosh\omega=\sinh\omega=2\sinh\frac{\omega}{2}\cosh\frac{\omega}{2}\doteqdot 2\sinh^2\frac{\omega}{2}$$

$$\frac{2}{\omega^6\cosh^2\dfrac{\omega}{2}}\doteqdot 0$$

と置くと

$$\frac{2}{\omega^6}\left(1-\frac{3}{\omega}\right)=\frac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A} \qquad (18)$$

(18) 式は次に述べる如く $f(\omega)\leqq 0.000\,01$ に對して用ひるものとする。

$f(\omega)$ の値が 0.00001 と 0.01 の間にある場合に對しては上述の如き簡單式の誘導が不可能であり, 且つ ω の僅少の增加に對し $f(\omega)$ は急激に減少する。例へば

$\omega=1$ に對し $f(\omega)=0.0137$ 　　 $\omega=2$ に對し $f(\omega)=0.002\,11$

$\omega=3$ 〃 $f(\omega)=0.000\,508$ 　　 $\omega=4$ 〃 $f(\omega)=0.000\,152$

の如くで, これを圖表にて示す場合も一枚に收め得ず非常に厄介である。依つて今これ等の $f(\omega)$ の對數(常用對數) を取つて見ると, 圖-10 の實線に示す如き抛物線狀をなして容易に圖上に表示され, 而も $\log f(\omega)$ の値は近似的に

$$\log f(\omega)=-1.9\,\omega^{1/2}$$

と置くことが出來る。圖-10 の點線は $-1.9\,\omega^{1/2}$ を示すもので, 圖示の範圍では兩者は殆ど完全に一致してゐる。

$$\therefore \quad \log\frac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A}=-1.9\,\omega^{1/2}$$

これより

$$\omega=0.277\left\{\log\frac{1\,024E^2I^3}{P^2l^6A}\right\}^2 \qquad (19)$$

(19) 式は 圖-10 に示す如く, $1\,024E^2I^3/P^2l^6A$ が 0.01~0.00001 なる場合に用ひるものとする。

c. その他の場合

同樣な考察をその他の場合に就て施すと, 表-2, 3 に示す如き算式が誘導される。これ等の式中 ω の高値に對する場合には次の如き繰返試索法の使用は計算を著しく容易ならしめる。今例として等分布荷重を滿載する完全固定梁をとると

$$\frac{1}{\omega^6}\left(4-\frac{18}{\omega}+\frac{24}{\omega^2}\right)=\frac{6\,144E^2I^3}{P^2l^6A}\equiv f(\omega)$$

これを

$$\omega=\sqrt[6]{\frac{4-\frac{18}{\omega_n}+\frac{24}{\omega_n^2}}{f(\omega)}}$$

なる形に變形し右邊の $\omega_n\{f(\omega)$ は既知$\}$ を假定して左邊の ω を求め，次にこの値を ω_n に代入し，以下同樣に繰返し $\omega \fallingdotseq \omega_n$ に到つて計算を打切ればよい。而も第一近似値の假定が計算に及ぼす影響も少く，計算尺の使用により容易に求むる結果に到達し得る。

圖-11.

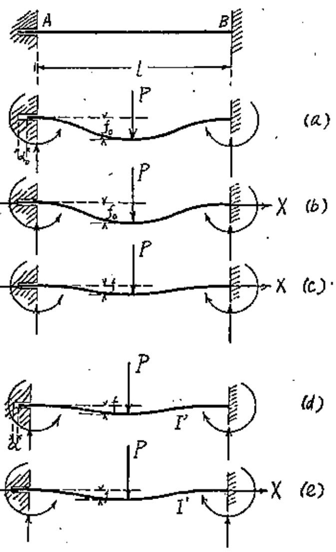
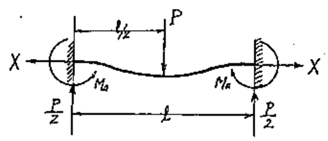
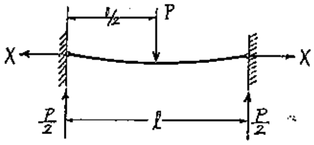


表-2.

$X=\frac{4EJ}{l^2}w^2$	
 $\dfrac{2+\cosh w-\frac{3\sinh w}{w}}{w^6\cosh^2\frac{w}{2}}=\dfrac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}\equiv f(w)$	
$\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}\geqq 0.01$	$\frac{1}{60w^2}=\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}+n$ $(n\fallingdotseq 0.003)$
$0.01>\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}>0.000\,01$	$w=0.277\left\{\log\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}\right\}^2$
$\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}\leqq 0.000\,01$	$\frac{2}{w^5}\left(1-\frac{3}{w}\right)=\frac{1024E^2J^3}{P^2l^6A}$
 $\dfrac{2+\cosh 2w-\frac{3\sinh 2w}{2w}}{64w\cosh^2 w}=\dfrac{16E^2J^3}{P^2l^6A}\equiv f(w)$	
$\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}\geqq 0.01$	$\frac{1}{240w^2}=\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}+n$ $(n\fallingdotseq 0.003)$
$0.01>\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}>0.000\,01$	$w=0.139\left\{\log\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}\right\}^2$
$\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}\leqq 0.000\,01$	$\frac{1}{64w^2}\left(2-\frac{3}{w}\right)=\frac{16E^2J^3}{P^2l^6A}$

<u>例</u>：$f(\omega)=0.000\,243\ (\omega=4)$ に對する ω を上式より求めると

第1近似値を	$\omega_1=1$	とすると	$\omega^6=41\,100$	$\omega=5.86$
	$\omega_2=5.86$	〃	$\omega^6=6\,680$	$\omega=4.33$
	$\omega_3=4.33$	〃	$\omega^6=4\,690$	$\omega=4.08$
	$\omega_4=4.08$	〃	$\omega^6=4\,270$	$\omega=4.00$

以上本節にて述べたものは理論式の簡易化であるが，算式の種類も多くその形も複雜してゐる。しかし次に述べる實用式に到る一つの過程となるものであり，且つ ω の高値に對して正確な値を與へる點にその意義が認められると思ふ。

4. 假想斷面二次モーメントによる實用解法

a. 概　説

今固定梁が中央に單一荷重 P を受けた場合を考へると，梁は水平變位を許さぬ結果軸張力 X が誘發される。

この狀態を少しく分析して見ると，圖-11 に於て水平變位可能なる固定梁 AB は單一荷重 P を受け，(a) 圖の如く可動端が α_0 丈け移動し，梁の中央の撓が f_0 になつて平衡狀態に達する。次に可動端 A に漸次張力 X を加へて行くと，移動量 α_0 及撓 f_0 は徐々に減少し，終に (c) 圖の如く $\alpha_0=0$，撓 $f(f<f_0)$ の狀態に到るであらう。これは前述の水平變位を許さない固定梁の平衡狀態であつて，この場合に於ける張力 X は固定梁に誘發される軸張力に等しいことは論を俟たない。併しこの際梁の斷面二次モーメント I が相當大であつたり，或は誘發される軸張力 X が餘り大きくない場合を考へると，(b) 圖に示す如く X が存在しない場合に於ける撓 f_0 と X が作用した後の f とは大差ないであらうといふことが想像される。從つてこの様な場合には梁は軸張力 X の作用後もその彈性曲線を殆ど變化すること無く，單に α_0 丈け伸長して平衡狀態に達するであらう。即ち玆では軸張力 X は可動端を有する梁の水平移動量から求められる。

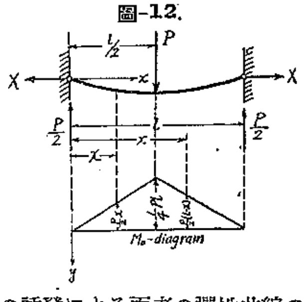
これは既に前節の b に於て述べた處であつて，例へば單一荷重を有する完全固定梁に誘發される軸張力が餘り大でない場合は簡單に

$$X=\frac{P^2l^4A}{15\,360EI^2}\cdots\cdots(17b)$$

で與へられるが，これは可動端を有する固定梁の水平移動量から誘導されるものである。換言すれば軸張力が作用した場合の撓 f と作用しない場合の f_0 とが大差ない場合は，前者の伸長量 α は後者の梁端に於ける水平移動量 α_0 に近似的に等しいと謂ふことである。

然し軸張力 X が或る程度以上大になると，X の存在しない場合の彈性曲線と存在する場合の夫れとは最早同一と見做すことが出來なくなり，固定梁の伸長量は可動端を有する梁の水平移動量で與へることが出來ない。これは (c) 圖の場合であつて，梁の伸長は撓み量が減少することにより α_0 より小なる或る量 α で與へられる。從つて問題は斯る場合に對する α を如何にして簡單に算出するかといふ點に歸着する。そこで次の様な考察から出發しやう。即ち軸張力 X が大なる程梁の撓みは少くなるのであるが，これは別な見地からすると，軸張力 X が斷面二次モーメントを增大する如き作用をなすといふことである。從つて梁自體の I の外に，X に依る斷面二次モーメント的因子を加味し，これを便宜上梁の斷面二次モーメント I' と考へるならば，斯くの如き大なる I' を有する梁に於ては前述の (a) 及 (b) 圖に示すと同一の關係が保たれ，固定梁の伸長量は可動端を有する梁の水平移動量で與へられるであらう。即ち (d) 圖に於て，大なる斷面二次モーメント I' を有する水平移動可能なる梁 AB の變位量 α は (c) 圖の I' なる完全固定梁の伸長量を與へる譯で，X の誘發による兩者の彈性曲線の差異は殆んど無いことになる。

圖-12.



本實用式は上述の如き考察より假想斷面二次モーメント I' を求め，斯る I' を有する水平移動可能なる梁の變位量より得られた軸張力 X の算式である。誤差も實用的に許容し得る程度に止り，前節のものに比して式の形も簡單であり計算も容易である。

b. 中央に單一荷重を有する鉸端固定梁

圖-12 に示す如き鉸端固定梁の平衡狀態に於て，任意の點 (x, y) の曲げモーメントは次式で與へられる。

$$M=\frac{P}{2}x-Xy\qquad\left(x=0\sim\frac{l}{2}\right),\qquad\qquad M=\frac{P}{2}(l-x)-Xy\qquad\left(x=\frac{l}{2}\sim l\right)$$

今未知量 X に依る以外の曲げモーメント即ち單純梁としての夫れを M_0 と置くと

$$M=M_0-Xy$$

従つて彈性曲線の微分方程式は次の様になる。

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}-Xy+M_0=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

今單純梁の曲げモーメント M_0 を

$$M_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

と置くと

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l M_0\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

然るに

$x=0\sim\frac{l}{2}$ に對し $M_0=\frac{P}{2}x$　　　$x=\frac{l}{2}\sim l$ に對し $M_0=\frac{P}{2}(l-x)$

なるを以て，この値を上式に代入して A_n を求めると

$$A_n=\frac{P}{l}\left\{\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$

$$=\frac{2Pl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

故に彈性曲線の微分方程式は下の如くなる。

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}-Xy+\frac{2Pl}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

今 n 番目の部分解を次の様に置き

$$y_n=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

この項のみを考へ，他を零と置いて上式に代入する。然る時は $\sin\frac{n\pi x}{l}$ は各項に共通であるから，これを消去して B_n を求めると

$$B_n=\frac{2Pl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2EI}{l^2}+X}$$

故に求むる解はこれ等の總和なるを以つて y は下の如く與へられる。

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{2Pl}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2EI}{l^2}+X}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad\cdots\cdots(21)$$

従つて梁の中央に於ける撓 f は次の如くなる。

$$f=\frac{2Pl}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^2}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2EI}{l^2}+X}$$

$$=\frac{2Pl}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\frac{\pi^2EI}{l^2}+X}+\frac{1}{9\left(\frac{9\pi^2EI}{l^2}+X\right)}+\frac{1}{25\left(\frac{25\pi^2EI}{l^2}+X\right)}+\cdots\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

然るにこれは非常に收斂のよい級數であるから，實用上第 1 項を取れば充分である。故に

$$f=\frac{2Pl}{\pi^2\left(\frac{\pi^2EI}{l^2}+X\right)} \cdots\cdots(22')$$

(22) 及 (22′) 式に於て $X=0$ と置けば，單純梁の撓 f_0 を與へることは論を俟たない。一方中央に單一荷重を有する單純梁の撓は直接微分方程式を解いて求めた場合には熟知の如く

$$f_0=\frac{Pl^3}{48EI} \cdots\cdots(23)$$

で與へられるが，(22′) 式にて $X=0$ と置くと

$$f_0=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}=\frac{Pl^3}{48.7EI} \cdots\cdots(23')$$

となり殆んど一致し，實用上第 2 項以下を省略して差支ないことを示してゐる。

又單純梁の可動端の水平移動量 α_0 は負荷して撓んだ後も梁の長さが不變なることより

$$\alpha_0=\frac{P^2l^5}{960E^2I^2} \cdots\cdots(24)$$

で與へられる。而も f_0 と α_0 の間には (23) 及 (24) 式より次の如き簡單な關係が成立する。

$$\alpha_0=\frac{12}{5l}f_0^2=\frac{2.4}{l}f_0^2 \cdots\cdots(25)$$

今 (22′) 式に於て

$$\frac{\pi^2EI}{l^2}+X=\frac{\pi^2EI'}{l^2}$$

と置けば，I' は X の影響を加味した假想斷面二次モーメントにして

$$I'=I+\frac{l^2}{\pi^2E}X \cdots\cdots(26)$$

となり，(22′) 式即ち鉸端固定梁の撓の表式は

$$f=\frac{2Pl}{\pi^2\left(\frac{\pi^2EI}{l^2}+X\right)}=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI'}=\frac{Pl^3}{48.7EI'} \cdots\cdots(27)$$

と書換へられる。從つて (27) 式は I' なる斷面二次モーメントを有する單純梁の撓を與へると同時に (22′) 式より I なる鉸端固定梁の撓をも表はすものである。但しこの式は級數の第 2 項以下を省略してゐるので實際より少しく小さい f を與へる。これより (25) 式を用ひて梁端の水平變位 α は容易に求められるのであるが，より眞に近附かしむる意味から (23) 式の I に直接 I' を代入すると

$$f=\frac{Pl^3}{48EI'}=\frac{Pl^3}{48E\left(I+\frac{l^2}{\pi^2E}X\right)} \cdots\cdots(28)$$

從つて水平變位 α は (25) 式より

$$\alpha=\frac{P^2l^5}{960E^2I'^2}=\frac{P^2l^5}{960E^2\left(I+\frac{l^2}{\pi^2E}X\right)^2} \cdots\cdots(29)$$

(29) 式は $I'=I+\frac{l^2}{\pi^2E}X$ なる斷面二次モーメントを有する單純梁の水平變位を示す表式で，前述の考察より斯くの如き大なる I' を有する單純梁の移動量 α は鉸端固定梁の伸長量に等しいと見做して差支ない。從つて

$$X=\frac{EA}{l}\alpha$$

より
$$X=\frac{P^2l^4A}{960E\left(I+\frac{l^2}{\pi^2E}X\right)^2} \quad \cdots\cdots (30)$$

又は
$$X\left(I+\frac{l^2}{\pi^2E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{960E} \quad \cdots\cdots (30')$$

圖-13 は以上の關係を示すもので，(a) 圖は斷面二次モーメント I なる單純梁の負荷後の狀態であり，(b) 圖は鉸端固定梁と同一の f を與へる如き大なる斷面二次モーメント I' を有する單純梁の變形狀態である。從つて斯る剛性の大なる單純梁の水平移動量 α は近似的に (c) 圖の鉸端固定梁の伸長量を與へる。(30) 及 (30′) 式はこれより誘導された軸張力の計算式である。今 (30) 式に於て

圖-13.

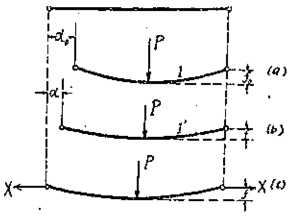


表-3.

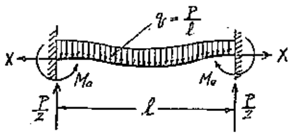
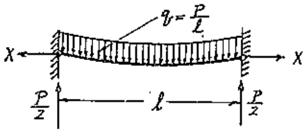
$X=\frac{4EJ}{l^2}w^2$	
 $\frac{4\sinh^2 w+\frac{24\sinh^2 w}{w^2}-\frac{9\sinh 2w}{w}-6}{w^6\sinh^2 w}=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\equiv f(w)$	
$\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\geqq 0{,}035$	$\frac{8}{315w^2}=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}+n$ $(n\doteqdot 0{,}005)$
$0{,}035>\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}>0{,}000{,}5$	$w+45w^{\frac{1}{2}}+25\log\frac{f(w)}{1.45}=0$
$\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\leqq 0{,}000{,}5$	$\frac{1}{w^6}\left(4-\frac{18}{w}+\frac{24}{w^2}\right)=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}$
 $\frac{4w^2\cosh^2 w-24\cosh^2 w+\frac{15\sinh 2w}{w}-6}{w^5\cosh^2 w}=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\equiv f(w)$	
$\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\geqq 2{,}00$	$\frac{204}{315w^2}=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}+n$ $(n\doteqdot 0{,}45)$
$2{,}00>\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}>0{,}003$	$w+32w^{\frac{1}{2}}+12{,}5\log\frac{f(w)}{1.45}=0$
$\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}\leqq 0{,}003$	$\frac{1}{w^6}\left(4-\frac{24}{w^2}+\frac{30}{w^3}\right)=\frac{6144E^2J^3}{P^2l^6A}$

表-4.

ω	$\frac{2+\cosh 2\omega-\frac{3\sinh 2\omega}{2\omega}}{64\omega^6\cosh^2\omega}$	$\frac{1}{240\omega^2\left(1+\frac{4}{\pi^2}\omega^2\right)^2}$
0.5	0.0137	0.0137
1	0.00211	0.00211
2	0.000152	0.000152
3	0.0000218	0.0000215
4	0.0000478	0.0000467
5	0.0000140	0.0000135
6	0.00000502	0.00000479
7	0.00000209	0.00000197
8	0.000000969	0.000000903
9	0.000000490	0.000000452
10	0.000000266	0.000000243
12	0.0000000916	0.0000000822
14	0.0000000371	0.0000000329
16	0.0000000169	0.0000000149
18	0.00000000842	0.00000000736
20	0.00000000452	0.00000000392

$$X=\frac{4EI}{l^2}\omega^2$$

と置くと

$$\frac{1}{240\omega^2\left(1+\frac{4}{\pi^2}\omega^2\right)^2}=\frac{16E^2I^3}{P^2l^6A}\cdots\cdots(31)$$

が得られる。これに對する理論式は

$$\frac{2+\cosh 2\omega-\frac{3\sinh 2\omega}{2\omega}}{64\omega^6\cosh^2\omega}=\frac{16E^2I^3}{P^2l^6A}\cdots\cdots(10)$$

であるが，この兩式を ω の大なる場合 ($\omega=0.5\sim20$) に就て比較すると表-4 の如くである。普通梁として取扱はれる程度の $\omega\leqq0.1$ のものに對しては，$1/240\omega^2$ のみにても十分であることは既に述べた通りである。誤差は表-4 に見る如く ω が大になると共に增加するが，軸張力に如何なる差異を生ずるかに就ては後に一括して述べることにする。

c. 中央に單一荷重を有する完全固定梁

この場合も b と同樣に M_0 を Fourier の級數で表はして方程式を解き，次に境の條件即ち $x=0$ に於て $\frac{dy}{dx}=0$ なることより y の表式を得ることは出來るが，支點曲モーメントの算式の收斂が悪い爲 y も b の場合の如く第 1 項のみを取ることが出來ない。依つて次の樣な考察を進めることにする。

即ちこの場合は梁端が埋込まれてゐるから負荷後は當然梁に彎曲點を生ずるが，その位置は軸張力の有無大小により餘り變ることが無いであらうといふことは容易に想像される。依つて今水平變位可能なる固定梁の彈性曲線を直接求めると

$$y=\frac{P}{16\,EI}\left(x^2l-\frac{4x^3}{3}\right)\cdots\cdots(32)$$

であるから，これより彎曲點の位置は $x=l/4$ で與へられ，この假定の下に於ては問題は圖-14. の下に示す如き鉸端固定梁の解法に歸着する。故に (30) 及 (31) 式の l の代り $l/2$, ω の代り $\omega/2$ を代入すると，夫々次の (33) 及 (34) 式を得る。

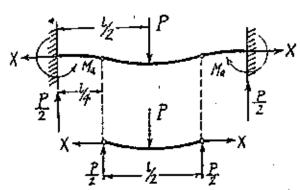
$$X=\frac{P^2l^4A}{15\,360E\left(I+\frac{l^2}{4\pi^2E}X\right)^2}\cdots\cdots(33)$$

又は

$$X\left(I+\frac{l^2}{4\pi^2E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{15\,360\,E}\cdots\cdots(33')$$

$$\frac{1}{60\omega^2\left(1+\frac{1}{\pi^2}\omega^2\right)^2}=\frac{1\,024\,E^2I^3}{P^2l^6A}\cdots\cdots(34)$$

圖-14.



而もこれ等の各式は

$$I'=I+\frac{l^2}{4\pi^2E}\cdots\cdots(35)$$

なる斷面二次モーメントを有する水平移動可能なる固定梁の變位量からも容易に誘導されるものである。

一方理論式によると單一荷重を有する完全固定梁の任意の點に於ける曲げモーメントは次式で與へられる。

$$M=\frac{Pl}{4\omega}\,\frac{\sinh\left(\frac{2\omega x}{l}-\frac{\omega}{2}\right)}{\cosh\frac{\omega}{2}}\cdots\cdots(4)$$

これより彎曲點の位置を求めると同様に $x=l/4$ となり，彎曲點は軸張力の如何によつてその位置を變ずることが無いことを示し，前述の考察が眞であることを裏書してゐる。實際この場合に對する X の表式は

$$\frac{2+\cosh\omega-\frac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^6\cosh^2\frac{\omega}{2}}=\frac{1\,024\,E^2I^3}{P^2l^6A}\cdots\cdots(5)$$

であるが，これは鉸端固定梁に對する (10) 式の l に $l/2$，ω に $\omega/2$ を代入して得られるもので，結局鉸端固定梁の軸張力算式に外ならない。(5) 式と (34) 式とを $\omega=0.5\sim20$ に就て比較すると表-5 の如くである。

d.　等分布荷重を滿載する鉸端固定梁

圖-15.

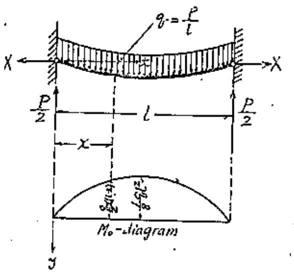


表-5.

ω	$\dfrac{2+\cosh\omega-\frac{3\sinh\omega}{\omega}}{\omega^6\cosh^2\frac{\omega}{2}}$	$\dfrac{1}{60\omega^2\left(1+\frac{1}{\pi^2}\omega^2\right)^2}$
0.5	0.0634	0.0634
1	0.0137	0.0137
2	0.0021 1	0.0021 1
3	0.0005 08	0.0005 08
4	0.0001 52	0.0001 52
5	0.0000 539	0.0000 537
6	0.0000 218	0.0000 215
7	0.0000 0971	0.0000 0961
8	0.0000 0478	0.0000 0467
9	0.0000 0251	0.0000 0244
10	0.0000 0140	0.0000 0135
12	0.0000 0050 2	0.0000 0047 9
14	0.0000 0020 9	0.0000 0019 7
16	0.0000 0009 69	0.0000 0009 03
18	0.0000 0004 90	0.0000 0004 52
20	0.0000 0002 66	0.0000 0002 43

圖-15. より任意の點 (x, y) の曲げモーメント M は

$$M=\frac{q}{2}x(l-x)-Xy$$
$$=M_0-Xy$$

茲に　$M_0=\frac{q}{2}x(l-x)$

單純梁としての曲げモーメント M_0 を前同様

$$M_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(n=1,2,3\cdots\cdots)$$

と置くと

$$A_n=\frac{q}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2Pl}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$$

$$\therefore\quad M_0=\frac{2Pl}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$$\therefore\quad EI\frac{d^2y}{dx^2}-Xy+\frac{2Pl}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\frac{\sin n\pi x}{l}=0$$

今　　$y_n = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

とし，他の項を零として B_n を求めると

$$B_n = \frac{2Pl}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)\frac{1}{\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}+X}$$

$$\therefore\quad y = \frac{2Pl}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\frac{1}{\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}+X}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad\cdots\cdots(36)$$

從つて

$$f = \frac{2Pl}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi}{2}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}+X} \quad\cdots\cdots(37)$$

$$\doteqdot \frac{4Pl}{\pi^3}\frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}+X} \quad\cdots\cdots(37')$$

一方等分布荷重を滿載する單純梁の撓は熟知の如く

$$f_0 = \frac{5Pl^3}{384EI} = \frac{Pl^3}{76.8EI} \quad\cdots\cdots(38)$$

であり，可動端の水平變位 α_0 は次式で與へられる。

$$\alpha_0 = \frac{17P^2l^6}{40\,320E^2I^2} \quad\cdots\cdots(39)$$

從つて f_0 と α_0 との間には次の關係が成立する。

$$\alpha_0 = \frac{6\,528}{2\,625\,l}f_0^2 = \frac{2.49}{l}f_0^2 \quad\cdots\cdots(40)$$

(37′) 式に於て $\frac{\pi^2 EI}{l^2}+X = \frac{\pi^2 EI'}{l^2}$

卽ち

$$I' = I + \frac{l^2}{\pi^2 E}X \quad\cdots\cdots(41)$$

と置けば

$$f = \frac{4Pl^3}{\pi^5 EI'} = \frac{Pl^3}{76.5\,EI'} \quad\cdots\cdots(42)$$

(42) 式は I' なる斷面二次モーメントを有する單純梁の撓を示すと同時に，(37) 式より明らかなる如く I なる斷面二次モーメントを有する鉸端固定梁の撓をも與へるものである。而もこの式は級數の第一項のみを取つたものであるから，直接求めた單純梁の撓の式と少し異つてゐる。依つて我々は (38) 式の I に直接 I' を代入すると

$$f = \frac{5Pl^3}{384\,EI'} = \frac{5Pl^3}{384E\left(I+\frac{l^2}{\pi^2 E}X\right)} \quad\cdots\cdots(43)$$

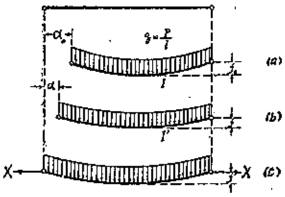
となり，これを (40) 式に用ひると

$$X = \frac{17P^2l^4A}{40\,320E\left(I+\frac{l^2}{\pi^2 E}X\right)^2} \quad\cdots\cdots(44)$$

又は
$$X\left(I+\frac{l^2}{\pi^2 E}X\right)^2=\frac{17P^2l^4A}{40\,320E} \qquad \cdots\cdots(44')$$

(44) 又は (44′) は等分布荷重を滿載する鉸端固定梁に對する軸張力の算式である。圖-16 は上述の關係を示すもので (42) 又は (43) 式より得られる撓 f は I' なる斷面二次モーメントを有する (b) 圖の如き單純梁の撓であつて，鉸端固定梁の夫れと同一のものである。從つて (b) 圖に於ける水平變位 α は (c) 圖の固定梁の伸長量と考へて差支ない。今 (44) 式の X に

圖-16.



$$X=\frac{4EI}{l^2}\omega^2$$

を代入すると次式が得られる。

$$\frac{204}{315\omega^2\left(1+\frac{4}{\pi^2}\omega^2\right)^2}=\frac{6\,144E^2I^3}{P^2l^6A} \qquad \cdots\cdots(45)$$

これに相當する理論式は次の如くであるが，

$$\frac{4\omega^2\cosh^2\omega-24\cosh^2\omega+\frac{15\sinh 2\omega}{\omega}-6}{\omega^8\cosh^2\omega}=\frac{6\,144E^2I^3}{P^2l^6A} \qquad \cdots\cdots(13)$$

この兩者を $\omega=0.5\sim20$ に對して比較すれば表-6 の如く實用的には殆ど完全に一致してゐる。

表-6.

ω	$\dfrac{4\omega^2\cosh^2\omega-24\cosh^2\omega+\frac{15\sinh 2\omega}{\omega}-6}{\omega^8\cosh^2\omega}$	$\dfrac{204}{315\omega^2\left(1+\frac{4}{\pi^2}\omega^2\right)^2}$
0.5	2.136	2.136
1	0.328	0.328
2	0.0236	0.0236
3	0.0033 5	0.0033 4
4	0.0007 25	0.0007 23
5	0.0002 10	0.0002 09
6	0.0000 744	0.0000 741
7	0.0000 306	0.0000 304
8	0.0000 141	0.0000 140
9	0.0000 0705	0.0000 0700
10	0.0000 0379	0.0000 0376
12	0.0000 0129	0.0000 0128
14	0.0000 0051 6	0.0000 0051 1
16	0.0000 0023 3	0.0000 0023 1
18	0.0000 0011 6	0.0000 0011 4
20	0.0000 0006 16	0.0000 0006 09

e. 等分布荷重を滿載する完全固定梁

この場合も c と同一の考察より水平變位を許す固定梁の彈性曲線式を用ひて直接梁端の移動量を求めると

$$\alpha_0=\frac{P^2l^5}{60\,480\,E^2I^2}\quad\cdots\cdots(46)$$

が得られる。而も荷重によつて c の場合と略々同一形狀の彈性曲線を生ずる譯であるから，この場合の I' も近似的に

$$I'=I+\frac{l^2}{4\pi^2E}\quad\cdots\cdots(47)$$

で與へられる。依つて (46) 式の I にこの I' を代入すると

$$\alpha=\frac{P^2l^5}{60\,480E^2\left(I+\dfrac{l^2}{4\pi^2E}X\right)^2}\quad\cdots\cdots(48)$$

これより X の算式は次の形で與へられる。

表-7.

ω	$\dfrac{4\sinh^2\omega+\dfrac{24\sinh^2\omega}{\omega^2}-\dfrac{9\sinh 2\omega}{\omega}-6}{\omega^6\sinh^2\omega}$	$\dfrac{8}{315\,\omega^2\left(1+\dfrac{1}{\pi^2}\omega^2\right)^2}$
0.5	0.0966	0.0966
1	0.0209	0.0210
2	0.0032 6	0.0032 2
3	0.0007 91	0.0007 74
4	0.0002 43	0.0002 32
5	0.0000 869	0.0000 818
6	0.0000 352	0.0000 328
7	0.0000 163	0.0000 146
8	0.0000 0810	0.0000 0712
9	0.0000 0432	0.0000 0372
10	0.0000 0244	0.0000 0206
12	0.0000 0089 3	0.0000 0073 2
14	0.0000 0037 7	0.0000 0030 0
16	0.0000 0017 7	0.0000 0013 8
18	0.0000 0009 04	0.0000 0006 90
20	0.0000 0004 94	0.0000 0003 70

$$X=\frac{P^2l^4A}{60\,480E\left(I+\dfrac{l^2}{4\pi^2E}X\right)^2}\quad\cdots\cdots(49)$$

又は $$X\left(I+\frac{l^2}{4\pi^2E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{60\,480E}\quad\cdots\cdots(49')$$

(49) 式の X の代りに ω を置換へると次式を得る。

$$\frac{8}{315\omega^2\left(1+\dfrac{1}{\pi^2}\omega^2\right)^2}=\frac{6\,144E^2I^3}{P^2l^8A}\quad\cdots\cdots(50)$$

これに對應する理論式は下の如くで表-7 は $\omega=0.5\sim20$ に對する兩式の値を比較したものである。

$$\frac{4\sinh^2\omega+\dfrac{24\sinh^2\omega}{\omega^2}-\dfrac{9\sin 2\omega}{\omega}-6}{\omega^6\sinh^2\omega}=\frac{6144E^2I^3}{P^2l^6A} \quad\cdots\cdots(9)$$

f. 誤差

前述した處によつて明らかなる如く實用式は一般に ω の或る値に對し，$f(\omega)$ の値が理論式に比して小さく而もその差は ω が大になると共に增加してゐる。實際問題は $f(\omega)$ が既知であつてそれより ω 即ち軸張力 X を求めるのであるが，その際 $f(\omega)$ に於ける以上の差が ω 及 X に對し如何なる誤差を生ぜしめるかを明らかにする必要がある。ω が小さい場合に對しては表-4～7 によつて明らかなる如く殆ど完全に一致してゐるから，ω の大なる場合に對して一應檢討して見やう。ω で表はした算式の一般形は

$$f=\frac{1}{a\omega^2(1+b\omega^2)^2} \quad\cdots\cdots(51)$$

で代表されるから

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial\omega}\Delta\omega=-\frac{2}{a}\left\{\frac{1+3b\omega^2}{\omega^3(1+b\omega^2)^3}\right\}\Delta\omega$$

$$\therefore\ \Delta\omega=-\frac{a}{2}\left\{\frac{\omega^3(1+b\omega^2)^3}{1+3b\omega^2}\right\}\Delta f \quad\cdots\cdots(52)$$

從つて Δf なる値が ω に如何なる誤差を與へるかは (52) 式から近似的に求められる。

例として最も誤差の大なる等分布荷重を滿載する完全固定梁の $\omega=20$ に對する場合を考へると，表-7 より

$$\Delta f=0.0000\,0003\,70-0.0000\,0004\,94=-0.0000\,0001\,24$$

$$a=\frac{315}{8}=39.375 \qquad b=\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{9.86} \qquad 1+b\omega^2=41.4$$

$$\therefore\ \Delta\omega=-\frac{39.375}{2}\left(\frac{20^3\times41.4^3}{1+\dfrac{3\times20^2}{9.86}}\right)\times(-0.0000\,0001\,24)=1.13$$

從つて　$f=0.0000\,0003\,70$ に對する正しい ω は

$\omega=21.13$

故に　$X=\dfrac{4EI}{l^2}\omega^2$ なるを以て X の誤差は

$$1-\frac{21.13^2}{20^2}=-0.12$$

即ち眞値より約 12% 小なる軸張力を與へることになる。

又中央に單一荷重を有する鉸端固定梁に就て $\omega=20$ の場合を檢討すると，表-5 より

$$\Delta f=0.0000\,0000\,0392-0.0000\,0000\,0452=0.0000\,0000\,0060$$

$$a=240 \qquad b=\frac{4}{\pi^2}=\frac{4}{9.86} \qquad 1+b\omega^2=163$$

$$\therefore\ \Delta\omega=-\frac{240}{2}\left(\frac{20^3\times163^3}{1+\dfrac{3\times4\times20^2}{9.86}}\right)\times(-0.0000\,0000\,0060)=0.51$$

從つて　$f=0.0000\,0000\,0392$ に對する正しい値は

$\omega=20.51$

故に X に及ぼす誤差は

$$1-\frac{20.51^2}{20^2}=-0.05$$

即ち約 5% 小なる軸張力を與へることになる。

上述せる處によつて明らかなる如く，本實用式に依るときは $\omega=20$ 程度にてもたかだか 1 割の誤差に過ぎない。從つて ω の小なる場合は元より 10 以上にも及ぶ大なる場合に對しても，特に正確を要する場合の外は充分滿足すべき結果を與へる。然も實際問題として相當薄い版に對しても $\omega=10$ 以上になることは餘り無く，且つ斯る大なる ω を生ずる場合に對しては，初の出發點である彈性曲線の微分方程式そのものから再吟味する必要があらう。即ち最早剛性を有しない可撓鋼索の如き狀態に近い譯で，元より梁端に負の曲げモーメントを生ずる完全固定梁の如きは考へられない。從つて以上の諸式が果して ω の如何なる値まで成立するかは理論及實驗の兩方面より更に追究する必要があらう。

g. 計算例

本實用式によるときは ω を用ひることなく直接軸張力 X が求められるが，その算式の一般形は

$$X(a+X)^2=b \cdots\cdots(53)$$

で示され問題は三次方程式の解法に歸着する。今 (53) 式を次の如く書換へる。

$$X=\sqrt{\frac{b}{X_n}}-a \cdots\cdots(53')$$

これより X_n を假定して左邊の X を求め，次にその値を X_n に代入し以下漸次繰返して行けばよい。尙ほ X と X_n とは互に逆比例の關係にあるから眞値は常にその中間にある譯で，第二近似値以下は X と X_n の平均を取る方がより速かに求むる結果に到達せしめる。第一近似値の假定は X が小なりと思はれる場合に對しては (53) 式にて括弧內の X を零とし，大なりと豫想されるときは反對に斷面二次モーメントに關係する a を無視すればよい。次に例として R. Wiederkehr 氏が計算したものと比較して見やう[2)]。

$A=1.0\ \mathrm{cm}^2$　　$I=0.0833\ \mathrm{cm}^4$　　$E=2\,100\,000\ \mathrm{kg/cm}^2$

$l=200\ \mathrm{cm}$　　$P=20\ \mathrm{kg}$

(a) 中央に單一荷重を有する鉸端固定梁

$$X\left(I+\frac{l^2}{\pi^2E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{960E}\cdots(30')\quad より$$

$$X\left(0.0833+\frac{200^2}{9.86\times2\,100\,000}X\right)^2=\frac{20^2\times200^4\times1.0}{960\times2\,100\,000}$$

$$\therefore\ X(43+X)^2=85\,192\,870$$

$$X=\sqrt{\frac{85\,192\,870}{X_n}}-43$$

今斷面二次モーメント I に關係する項である 43 を無視すると

$$X^3=85\,192\,870 \qquad \therefore\ X=435\ \mathrm{kg}$$

第一近似値を　$X_1=435\ \mathrm{kg}$　とすれば　$X=400$

次に　$X_2=\frac{435+400}{2}=417$　とすれば　$X=408$

$X_3=\frac{417+408}{2}=412$　とすれば　$X=412\ \mathrm{kg}\ (411\ \mathrm{kg})$

(b) 中央に單一荷重を有する完全固定梁

$$X\left(I+\frac{l^2}{4\pi^2 E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{15\,360E}\cdots\cdot(33')$$ より

$X(172+X)^2=85\,192\,870$

$\therefore\quad X=\sqrt{\dfrac{85\,192\,870}{X_n}}-172$

172 を無視すると　$X=435$

故に　$X_1=435$ とすれば $X=271$　$X_2=353$ とすれば $X=320$

$X_3=336$ 〃 $X=332$　$X_4=334$ 〃 $X=333$ kg　(330 kg)

(c) 等分布荷重を滿載する鉸端固定梁

$$X\left(I+\frac{l^2}{\pi^2 E}X\right)^2=\frac{17P^2l^4A}{40\,320E}\cdots\cdot(44')$$ より

$X(43+X)^2=34\,479\,634$

$\therefore\quad X=\sqrt{\dfrac{34\,479\,634}{X_n}}-43$

前同樣に 43 を無視し

$X_1=322$ とすれば $X=284$　$X_2=303$ とすれば $X=295$

$X_3=299$ 〃 $X=297$　$X_4=297$ 〃 $X=298$ kg　(294 kg)

(d) 等分布荷重を滿載する完全固定梁

$$X\left(I+\frac{l^2}{4\pi^2 E}X\right)^2=\frac{P^2l^4A}{60\,480E}\cdots\cdot(49')$$ より

$X(172+X)^2=21\,636\,284$

$\therefore\quad X=\sqrt{\dfrac{21\,636\,284}{X_n}}-172$

同樣に　$X_1=276$ とすれば $X=108$　$X_2=192$ とすれば $X=164$

$X_3=178$ 〃 $X=177$ kg　(180 kg)

括弧内は Wiederkehr 氏の計算結果である。これ等の計算は總べて計算尺の使用によつて行つたもので僅々 5 分足らずで求むる結果が得られる。

以上の如く可動端を有する梁との關聯に於て固定梁の考察を進めるときは，任意の載荷狀態に對しても非常に簡單な形で解決されるのでないかと考へてゐるが，これ等に關しては後日の研究に俟つことゝしこれを以て本報告の終りとする。傾撓や支點曲げモーメント等も總べて I' なる斷面二次モーメントを有する水平移動可能なる梁として求められるのであるが本文中には多く省略した。

擱筆するに當り學生時代以來常に御鞭撻を辱しくしてゐる鷹部屋福平先生に對し深く感謝の意を表する次第である。

(1) 參考文獻

1) F. Takabeya: Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft, Berlin, Julius Springer, 1924.

Do. Memoirs, Kyushu Imperial University, Japan, 1922.

A. Ono: On the Application of Variational Equations to Statical Problems of Elasticity. Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Japan, 1924.

K. Hayashi: Über die Anwendung des Satzes von der virtuellen Verschiebung in der Festigkeitslehre, Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Japan, 1924.

Fr. Bleich: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, Julius Springer, 1924, S. 355.

F. Takabeya: Étude des pieces encastrées aux deux extremités par consideration spéciale de la force longitudinale, Paris, Béranger, 1926.

F. Takabeya: Étude sur la force longitudinale de la pièce encastrée, les murs étant complèment dociles aux déplacements angulaires, Memoirs of the College of Engineering, Hokkaido Imperial University, Japan, 1926.

F. Takabeya: Étude de la force longitudinale et du moment de flexion aux extrémitès de la pièce complètment encastrée, Memoirs, Hokkaido Imperial University, 1926.

2) R. Wiederkehr: Der Gespaunte Träger, Schweizerlische Technische Zeitschrift, 25. Nov. 1926.

J. Trüb: Beitrag zur Berechnung der Spannungen in ebenen Behälterwandungen, Der Bauingenieur, 28. Dez. 1928.

3) 鷹部屋福平: 高級桁梁論, 岩波. 昭和 4 年

O. Belluzzi: Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati, Annali dei Lavori Pubblici, P. 14, Anno. 1929.

O. Belluzzi: Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati, Renliconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, P. 54, Roma, 1929 (VII)

F. Takabeya: Zur Berechnung der Spannungen in ebenen, eingespannten Flachblechen, Verhandlungen des 3. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik. Teil II. 1930. S. 71.

B. Tartaglia: Poduzne sile ukljestenih i Kontinuiranih nosaca sa nepopustljivim potporama u horizontalnom smjem, 1933.

(2) M. Toll, Die steife Kettenlinie. V. D. I. 1897, S. 855.

(3) Δl の計算は假想働の原理を應用しても求め得るが玆には省略する。1) 參照。