論 說 報 告

第26卷第4號 昭和15年4月

# 微分方程式に依る多張間高層ラーメンの振動解法並にその固有振動週期の實用算定公式

會員 酒 井 忠 明*

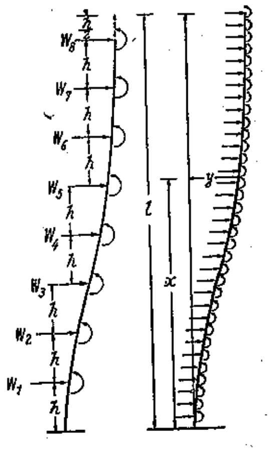
**要 旨** 各柱及桁の剛度が夫々 $K$ 及 $kK$ にして各層に一様なる荷重を擔ふ多張間高層ラーメンの振動問題は，このラーメンに働く震力及桁に依て柱に與へられる曲げモーメントが何れも連續的に柱に加はるものと假定することにより，簡單に取扱ふことが出來るもので，本文は之が解法とこの結果より誘導し得たる多張間高層ラーメンの固有振動週期の實用算定公式に就て述べたものである。

## 1. 多張間高層ラーメンの振動方程式誘導

多張間高層ラーメンの振動問題を取扱ふ場合，特殊な假定を設けざる限り，そのラーメンの柱及桁の剛度が一様にして各層の荷重の大さ等しき場合と雖も實際問題としては層數の極めて少いものを除いては計算不可能である。

茲には柱の剛度が總べて $K$，桁の剛度がすべて $kK$ にして各層に一樣なる荷重を擔ふラーメンを取扱ひ，このラーメンに働く震力は連續的に柱に加はるもと假定し單位高さに對して $q$，桁に依て柱に與へられる曲げモーメントも亦連續的に加はるものとして單位高さに對し $F(x)$ とする。この假定に從つて 1 張間のラーメンに對しては既に水原氏の研究[1]があるが，著者は更に多張間のラーメンに對して研究を進めるものであり又その結果より固有振動週期の實用算定公式をも誘導したものである。

圖-1.



(1)

今 $q$, $F(x)$ を 1 本の柱に對するものとすれば (圖-1),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M$$

茲に $I$ は柱の斷面の慣性モーメントである。從つて，

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}\,dx=-dM$$

然るに，

$$dM=Sdx+F(x)dx$$

茲に $S$ は $x$ 點に於ける剪斷力である。

故に

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この關係を用ひて任意張間の高層ラーメンの振動を簡單に取扱ふことが出來るもので次に 1 張間より 5 張間に至るラーメンの振動方程式を誘導しよう。

1. 1 張間ラーメン (圖-2):

1 張間ラーメンにては左右 2 本の柱は全く同一の振動をなすもので $q$ 及 $F(x)$ を柱 2 本に對するものゝ和と

---

* 工學士 北海道帝國大學助敎授

1) 昭和 4 年萬國工業會議論文集第 7 卷 353～383 頁

すれば (1) 式の關係は，

$$2EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0 \cdots\cdots(2)$$

となる。

又撓角撓度法の一般式より，

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R),\qquad M_{BA}=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)$$

及 $2(M_{AB}+M_{BA})=-Sh$

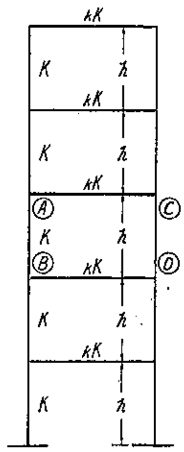
從つて

$$(\theta_A+\theta_B-2R)=-\frac{Sh}{12EK}$$

之に $\theta_A+\theta_B=2\theta$, $R=\dfrac{dy}{dx}$ なる關係を代入して

$$2\theta=2\frac{dy}{dx}-\frac{Sh}{12EK} \cdots\cdots(3)$$

圖-2.



又，

$$F(x)=-\frac{2(M_{AC}+M_{BD})}{2h}$$

之に

$$M_{AC}=6EkK\theta_A,\qquad M_{BD}=6EkK\theta_B,\qquad \theta_A+\theta_B=2\theta$$

なる關係を代入して，

$$F(x)=-\frac{12EkK\theta}{h} \cdots\cdots(4)$$

(4) 式に (3) 式を代入して，

$$F(x)=-\frac{6EkK}{h}\left(2\frac{dy}{dx}-\frac{h}{12EK}S\right)$$

之を (2) 式に代入して，

$$EI\frac{2}{k}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{12EK}{h}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right)S=0$$

之を微分し之に $\dfrac{dS}{dx}=-q$ なる關係を代入すれば，

$$EI\frac{2}{k}\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{12EK}{h}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right)q=0$$

振動中の震力 $q$ は，2 本の柱の單位長に分布するものと考へる荷重を $w$ とすれば

$$q=-\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$

であり之を前式に代入し，尙 $y$ は $x$ と $t$ に關係する故偏微分の形に改めると，

$$EI\frac{2}{k}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right)\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0 \cdots\cdots(5)$$

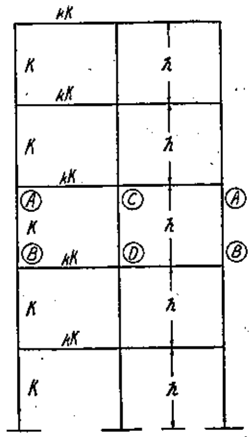
之が 1 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式である。

2. 2 張間ラーメン (圖-3)：

2 張間ラーメンに對しては，$w$, $q$ 及 $F(x)$ を柱 3 本に對するものゝ總和とする。各柱は桁にて連結されてを

り，この桁はラーメンの解法に於て普通一般に假定する樣にその伸縮及彎曲による長さの變化を考へざる故各柱は同一の振動曲線をなすものである。2 張間以上のラーメンにても同樣である。

圖-3.




從つて (1) 式の關係は次の如くなる。

$$3EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

又撓角撓度法の一般式より，

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R), \qquad M_{BA}=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)$$

$$M_{CD}=2EK(2\theta_C+\theta_D-3R), \qquad M_{DC}=2EK(2\theta_D+\theta_C-3R)$$

及 $2(M_{AB}+M_{BA})+M_{CD}+M_{DC}=-Sh$

從つて $2(\theta_A+\theta_B)+\theta_C+\theta_D-6R=-\dfrac{Sh}{6EK}$

之に $\theta_A+\theta_B=2\theta, \quad \theta_C+\theta_D=2\theta', \quad R=\dfrac{dy}{dx}$ なる關係を代入して，

$$4\theta+2\theta'=6\frac{dy}{dx}-\frac{Sh}{6EK} \quad\cdots\cdots(7)$$

次に $F(x)=-\dfrac{2(M_{AC}+M_{BD}+M_{CA}+M_{DB})}{2h}$

之に

$$M_{AC}=2EkK(2\theta_A+\theta_C), \qquad M_{BD}=2EkK(2\theta_B+\theta_D)$$

$$M_{CA}=2EkK(2\theta_C+\theta_A), \qquad M_{DB}=2EkK(2\theta_D+\theta_B)$$

及 $\theta_A+\theta_B=2\theta, \quad \theta_C+\theta_D=2\theta'$ なる關係を代入して，

$$F(x)=-\frac{12EkK(\theta+\theta')}{h} \quad\cdots\cdots(8)$$

次に圖-4 の節點 $r$ 即ち上から第 $r$ 番目の左端節點に於ては，

$$M_{r,r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}), \quad M_{r,r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r), \quad M_{r,r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'})$$

節點 $r'$ 即ち上から第 $r$ 番目の中央節點に於ては，

$$M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}), \quad M_{r',r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r),$$

$$M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r)$$

是等の式を節點 $r$ 及 $r'$ に於ける釣合條件，

$$M_{r,r-1}+M_{r,r+1}+M_{r,r'}=0$$

及 $M_{r',r'-1}+M_{r',r'+1}+2M_{r',r}=0$

に代入すれば，

$$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

及 $\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+2k\theta_r-3R_{r-1}-3R_r=0$

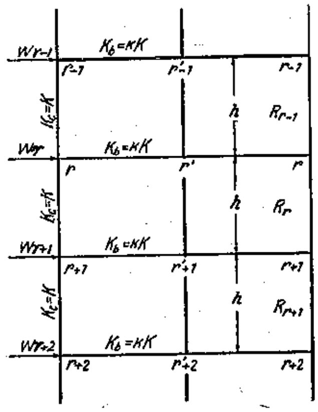
この 2 式から，

$$\theta_{r-1}+4\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}=0$$

この式は Differenzengleichung であり，上下の限界の效果を無視し，近似的に

$$\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r, \qquad \theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$$

圖-4.



とおいて，

$$6\theta_r-(6+3k)\theta_r'=0$$

故に

$$\theta_r'=\frac{2}{2+k}\theta_r$$

故に $\theta_A$ と $\theta_C$ との間及 $\theta_B$ と $\theta_D$ との間にも之と同様なる關係があり從つて又 $\theta$ と $\theta'$ との間にも同様に次の關係が成立する。

$$\theta'=\frac{2}{2+k}\theta \quad\cdots\cdots(9)$$

(6), (7), (8) 及 (9) の 4 式から $F(x)$, $\theta$, $\theta'$ を消去して，

$$EI\frac{2(k+3)}{k(k+4)}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{12Ek}{h}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2(k+3)}{k(k+4)}\right\}S=0$$

この式から 1 張間の時と同様にして 2 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式が次の如く得られる。

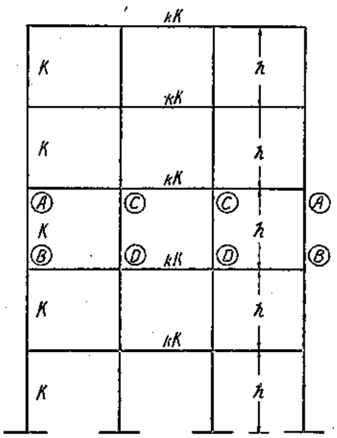
$$EI\frac{2(k+3)}{k(k+4)}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2(k+3)}{k(k+4)}\right\}\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0 \quad\cdots\cdots(10)$$

3.　3 張間ラーメン（圖-5）:

3 張間ラーメンに對しては $w$, $g$, $F(x)$ は柱 4 本に對するものゝ總和とする。然る時は，(1) 式の關係は次の如くなる。

$$4EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0 \quad\cdots\cdots(11)$$

圖-5.




又撓角撓度法の一般式より，

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R),\quad M_{BA}=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)$$

$$M_{CD}=2EK(2\theta_C+\theta_D-3R),\quad M_{DC}=2EK(2\theta_D+\theta_C-3R)$$

及　$$2(M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC})=-Sh$$

從て，

$$\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D-4R=-\frac{Sh}{12EK}$$

之に　$\theta_A+\theta_B=2\theta$,　$\theta_C+\theta_D=2\theta'$,　$R=\dfrac{dy}{dx}$　なる關係を代入して，

$$\theta+\theta'=2\frac{dy}{dx}-\frac{Sh}{24EK} \quad\cdots\cdots(12)$$

次に

$$F(x)=-\frac{(2M_{AC}+M_{BD}+M_{CA}+M_{DB}+M_{CC}+M_{DD})}{2h}$$

之に　$M_{AC}=2EkK(2\theta_A+\theta_C)$,　$M_{BD}=2EkK(2\theta_B+\theta_D)$,　$M_{CA}=2EkK(2\theta_C+\theta_A)$,

$M_{DB}=2EkK(2\theta_D+\theta_B)$,　$M_{CC}=6EkK\theta_C$,　$M_{DD}=6EkK\theta_D$,

及　$\theta_A+\theta_B=2\theta$,　$\theta_C+\theta_D=2\theta'$

なる關係を代入して

$$F(x)=-\frac{12EkK(\theta+2\theta')}{h} \quad\cdots\cdots(13)$$

3 張間高層ラーメンに於ては $\theta$ と $\theta'$ との間には次の關係がある。

$$\theta'=\frac{6+k}{6+4k}\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

何んとなれば次の如し。

圖-6 の節點 $r$ に於て,

$$M_{r,r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}),\qquad M_{r,r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r),\qquad M_{r,r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'})$$

節點 $r'$ に於て,

$$M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}),\qquad M_{r',r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r),$$

$$M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r),\qquad M_{r',r'}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r'})$$

是等の値を，節點 $r$ 及 $r'$ に於ける釣合條件

$$M_{r,r-1}+M_{r,r+1}+M_{r,r'}=0$$

及　$$M_{r',r-1}+M_{r',r'+1}+M_{r',r'}+M_{r',r'}=0$$

に代入すれば,

$$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

及　$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+(4+5k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

この 2 式から,

$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}=0$$

上下の限界の效果を無視して近似的に,

$$\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r,\qquad \theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$$

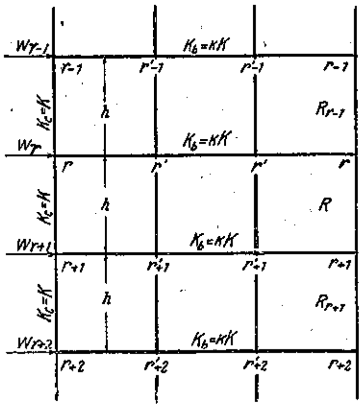
とおけば,

$$(6+k)\theta_r-(6+4k)\theta_{r'}=0$$

之から

$$\theta_{r'}=\frac{6+k}{6+4k}\theta_r$$

圖-6.




從つて又 $\theta$ と $\theta'$ との間に (14) 式の關係が成立するのである。(11), (12), (13) 及 (14) の 4 式から $F(x)$, $\theta$, $\theta'$ を消去すれば,

$$EI\frac{5k+12}{3k(k+3)}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{12EK}{h}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}\left\{1+\frac{5k+12}{3k(k+3)}\right\}S=0$$

故に 3 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式は次の如くなる。

$$EI\frac{5k+12}{3k(k+3)}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\left\{1+\frac{5k+12}{3k(k+3)}\right\}\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

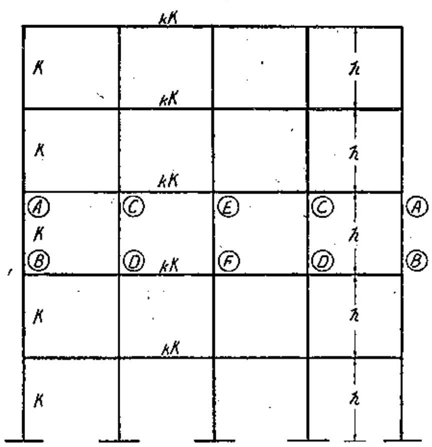
4.　4 張間ラーメン (圖-7)：

4 張間ラーメンに對しては, $w$, $g$, $F(x)$ は柱 5 本に對するものゝ總和とする。然る時は, (1) 式の關係は次の如くなる。

$$5EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

又撓角撓度法の一般式より,

圖-7.



$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R),\quad M_{BA}=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R),\quad M_{CD}=2EK(2\theta_C+\theta_D-3R),$$

$$M_{DC}=2EK(2\theta_D+\theta_C-3R),\quad M_{EF}=2EK(2\theta_E+\theta_F-3R),\quad M_{FE}=2EK(2\theta_F+\theta_E-3R),$$

及 $$2(M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC})+M_{EF}+M_{FE}=-Sh$$

従つて, $$2(\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D)+\theta_E+\theta_F-10R=-\frac{Sh}{6EK}$$

之に $\theta_A+\theta_B=2\theta,\quad \theta_C+\theta_D=2\theta',\quad \theta_E+\theta_F=2\theta'',\quad R=\dfrac{dy}{dx}$ なる關係を代入して,

$$2(\theta+\theta')+\theta''=5\frac{dy}{dx}-\frac{Sh}{12EK}\quad\cdots\cdots(17)$$

次に

$$F(x)=-\frac{2(M_{AC}+M_{BD}+M_{CA}+M_{DB}+M_{CE}+M_{DF}+M_{EC}+M_{FD})}{2h}$$

之に $M_{AC}=2EkK(2\theta_A+\theta_C),\quad M_{BD}=2EkK(2\theta_B+\theta_D),\quad M_{CA}=2EkK(2\theta_C+\theta_A),$

$M_{DB}=2EkK(2\theta_D+\theta_B),\quad M_{CE}=2EkK(2\theta_C+\theta_E),\quad M_{DF}=2EkK(2\theta_D+\theta_F),$

$M_{EC}=2EkK(2\theta_E+\theta_C),\quad M_{FD}=2EkK(2\theta_F+\theta_D),$ 及 $\theta_A+\theta_B=2\theta,\quad \theta_C+\theta_D=2\theta',$

$\theta_E+\theta_F=2\theta''$

なる關係を代入して,

$$F(x)=-\frac{12EkK(\theta+2\theta'+\theta'')}{h}\quad\cdots\cdots(18)$$

4 張間高層ラーメンに於ては $\theta,\ \theta'$ 及 $\theta''$ の間には次の關係[1]がある。

$$\left.\begin{aligned}\theta'&=\frac{2k^2+24k+36}{11k^2+24k+36}\theta\\ \theta''&=\frac{5k^2+24k+36}{11k^2+42k+36}\theta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

何んとなれば次の如し。

圖-8 の節點 $r$ に於て,

$$M_{r,r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r,r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r),\quad M_{r,r'}=2Ek(2\theta_r+\theta_{r'})$$

節點 $r'$ に於て

$$M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r',r'+1}+2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r),$$

$$M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r),\quad M_{r',r''}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r''})$$

節點 $r''$ に於て

$$M_{r'',r''-1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r'',r''+1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_r),$$

$$M_{r'',r'}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r'})$$

是等の値を節點 $r,\ r'$ 及 $r''$ に於ける釣合條件

$$M_{r,r-1}+M_{r,r+1}+M_{r,r'}=0,\quad M_{r',r'-1}+M_{r',r'+1}+M_{r',r}+M_{r',r''}=0$$

及 $$M_{r'',r''-1}+M_{r'',r''+1}+2M_{r'',r'}=0$$

に代入すれば,

$$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+k\theta_{r''}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

$$2k\theta_{r'}+\theta_{r''-1}+4(1+k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

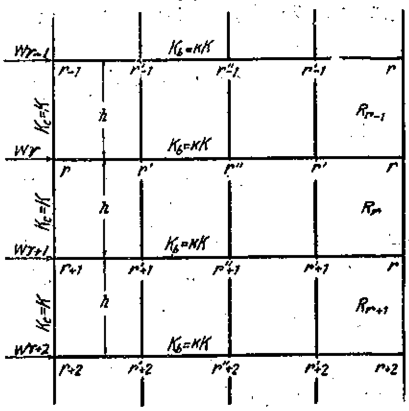
この 3 式中の初めの 2 式から，

$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}-k\theta_{r''}=0$$

後の 2 式から，

$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+2(2+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-\{\theta_{r''-1}+(4+3k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}\}=0$$

圖-8.




限界の效果を無視して近似的に

$$\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r,\qquad \theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'},$$

$$\theta_{r''-1}+\theta_{r''+1}=2\theta_{r''}$$

と置けば上の 2 式は，

$$(6+k)\theta_r-(6+3k)\theta_{r'}-k\theta_{r''}=0,\qquad k\theta_r+(6+2k)\theta_{r'}-(6+3k)\theta_{r''}=0$$

となる。この 2 式から

$$\theta_{r'}=\frac{2k^2+24k+36}{11k^2+42k+36}\theta_r,\qquad \theta_{r''}=\frac{5k^2+24k+36}{11k^2+42k+36}\theta_r$$

從て又 $\theta,\ \theta',\ \theta''$ にも (19) 式の關係が成立するのである。(16), (17), (18) 及 (19) の 4 式から $F(x),\ \theta,\ \theta',\ \theta''$ を消去すれば

$$EI\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{12EK}{h}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{5}\left\{1+\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\right\}S=0$$

依て 4 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式は次の如くなる。

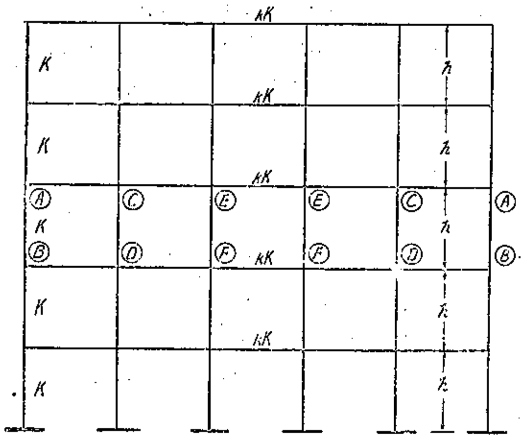
$$EI\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{5}\left\{1+\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\right\}\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0\quad\cdots\cdots(20)$$

5. 5 張間ラーメン (圖-9)：

5 張間ラーメンに對しては，$w,\ q,\ F(x)$ は柱 6 本に對するもの丶總和とする。然る時は (1) 式の關係は次の如くなる。

$$6EI\frac{d^3y}{dx^3}+F(x)+S=0\quad\cdots\cdots(21)$$

圖-9.




又撓度撓角法の一般式より，

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R),$$

$$M_{BA}=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R),$$

$$M_{CD}=2EK(2\theta_C+\theta_D-3R),$$

$$M_{DC}=2EK(2\theta_D+\theta_C-3R),$$

$$M_{EF}=2EK(2\theta_E+\theta_F-3R),$$

$$M_{FE}=2EK(2\theta_F+\theta_E-3R)$$

及　$2(M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}+M_{EF}+M_{FE})=-Sh$

從つて，

$$\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D+\theta_E+\theta_F-6R=-\frac{Sh}{12EK}$$

之に $\theta_A+\theta_B=2\theta,\quad \theta_C+\theta_D=2\theta'\quad \theta_E+\theta_F=2\theta'',\quad R=\dfrac{dy}{dx}$ なる關係を代入して,

$$\theta+\theta'+\theta''=3\frac{dy}{dx}-\frac{Sh}{24EK}\qquad\cdots\cdots(22)$$

次に

$$F(x)=-\frac{2(M_{AC}+M_{BD}+M_{CA}+M_{DB}+M_{CE}+M_{DF}+M_{EC}+M_{FD}+M_{EE}+M_{FF})}{2h}$$

之に,
$$M_{AC}=2EkK(2\theta_A+\theta_C),\quad M_{BD}=2EkK(2\theta_B+\theta_D),\quad M_{CA}=2EkK(2\theta_C+\theta_A),$$
$$M_{DB}=2EkK(2\theta_D+\theta_B),\quad M_{CE}=2EkK(2\theta_C+\theta_E),\quad M_{DF}=2EkK(2\theta_D+\theta_F),$$
$$M_{EC}=2EkK(2\theta_E+\theta_C),\quad M_{FD}=2EkK(2\theta_F+\theta_D),\quad M_{EE}=6EkK\theta_E,\quad M_{FF}=6EkK\theta_F$$

及
$$\theta_A+\theta_B=2\theta,\quad \theta_C+\theta_D=2\theta',\quad \theta_E+\theta_F=2\theta''$$

なる關係を代入して,

$$F(x)=-\frac{12EkK(\theta+2\theta'+2\theta'')}{h}\qquad\cdots\cdots(23)$$

次に 5 張間高層ラーメンに於ける $\theta,\ \theta'$ 及 $\theta''$ 間の關係を求めん。

**圖-10** の節點 $r$ に於て,

$$M_{r,r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r,r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r),\quad M_{r,r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'})$$

節點 $r'$ に於て,

$$M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r',r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r),$$
$$M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r),\quad M_{r',r''}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r''})$$

節點 $r''$ に於て,

$$M_{r'',r''-1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''-1}-3R_{r-1}),\quad M_{r'',r''+1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_r),$$
$$M_{r'',r'}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r'}),\quad M_{r'',r''}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r''})$$

是等の値を節點 $r,\ r'$ 及 $r''$ に於ける釣合條件,

$$M_{r,r-1}+M_{r,r+1}+M_{r,r'}=0$$
$$M_{r',r'-1}+M_{r',r'+1}+M_{r',r}+M_{r',r''}=0$$

及
$$M_{r'',r''-1}+M_{r'',r''+1}+M_{r'',r'}+M_{r'',r''}=0$$

に代入すれば,

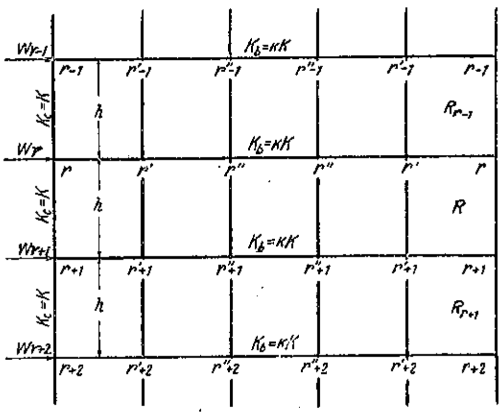
$$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0$$
$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+k\theta_{r''}-3R_{r-1}-R_r=0$$

及
$$k\theta_{r'}+\theta_{r''-1}+(4+3k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_{r-1}-3R_r=0$$

この 3 式の初めの 2 式から,

$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}-k\theta_{r''}=0$$

圖-10.




後の 2 式から,

$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-\{\theta_{r''-1}+4(1+k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}\}=0$$

限界の效果を無視して近似的に

$$\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r,\quad \theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'},\quad \theta_{r''-1}+\theta_{r''+1}=2\theta_{r''}$$

と置けば上の 2 式は，

$$(6+k)\theta_r-(6+3k)\theta_{r'}-k\theta_{r''}=0$$

$$k\theta_r+(6+3k)\theta_{r'}-(6+4k)\theta_{r''}=0$$

となる。この 2 式から

$$\theta_{r'}=\frac{k^2+10k+12}{5k^2+16k+12}\theta_r, \qquad \theta_{r''}=\frac{2k^2+10k+12}{5k^2+16k+12}\theta_r$$

従つて又 $\theta,\ \theta',\ \theta''$ の間にも之と同様の關係が成立するもので次の如し。

$$\left.\begin{aligned}\theta'&=\frac{k^2+10k+12}{5k^2+16k+12}\theta\\ \theta''&=\frac{2k^2+10k+12}{5k^2+16k+12}\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

(21)，(22)，(23) 及 (24) の 4 式から $F(x),\ \theta,\ \theta',\ \theta''$ を消去すれば，

$$EI\frac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{12EK}{h}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{6}\left\{1+\frac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\right\}S=0$$

依て 5 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式は次の如くなる。

$$EI\frac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\left\{1+\frac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\right\}\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0\cdots\cdots(25)$$

6 張間以上の $m$ 張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式は，同一層に屬する總ての節點の廻轉角 $(\theta)$ が相等しいと假定して近似的に簡單に求めることが出來るもので其の結果のみを示せば次の如し。

$$EI\frac{m+1}{mk}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{m+1}{mk}\right)\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0\cdots\cdots(26)$$

以上の多張間高層ラーメンに對する振動の微分方程式は一般に次の形で表はすことが出來る。

$$X\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-Z\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0\cdots\cdots(27)$$

玆に $X,\ Z$ の値は次の如し。

1 張間ラーメンに對しては，

$$X=\frac{EI\dfrac{2}{k}}{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}, \qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}$$

2 張間ラーメンに對しては，

$$X=\frac{EI\dfrac{2(k+3)}{k(k+4)}}{\dfrac{1}{3}\left\{1+\dfrac{2(k+3)}{k(k+4)}\right\}}, \qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{3}\left\{1+\dfrac{2(k+3)}{k(k+4)}\right\}}$$

3 張間ラーメンに對しては，

$$X=\frac{EI\dfrac{5k+12}{3k(k+3)}}{\dfrac{1}{4}\left\{1+\dfrac{5k+12}{3k(k+3)}\right\}}, \qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{4}\left\{1+\dfrac{5k+12}{3k(k+3)}\right\}}\cdots\cdots(28)$$

4 張間ラーメンに對しては，

$$X=\frac{EI\dfrac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}}{\dfrac{1}{5}\left\{1+\dfrac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\right\}},\qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{5}\left\{1+\dfrac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\right\}}$$

5 張間ラーメンに對しては,

$$X=\frac{EI\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}}{\dfrac{1}{6}\left\{1+\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\right\}},\qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{6}\left\{1+\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}\right\}}$$

6 張間以上の $m$ 張間ラーメンに對しては近似的に

$$X=\frac{EI\dfrac{m+1}{mk}}{\dfrac{1}{m+1}\left(1+\dfrac{m+1}{mk}\right)},\qquad Z=\frac{\dfrac{12EK}{h}}{\dfrac{1}{m+1}\left(1+\dfrac{m+1}{mk}\right)}$$

(27) の振動一般式は，慣性モーメントが $\dfrac{X}{E}$ なる棒の彎曲振動と剛性係數 $Z$ なる彈性體の剪斷振動との合成したものである。

## 2. 多張間高層ラーメンの固有振動

(27) の振動方程式を解くには先づ

$$y=u(x)v(t) \qquad \cdots\cdots(29)$$

と置く。玆に $u$ は $x$ のみの函數で定常振動形を決定する固有函數，$v$ は時刻のみに關係する時刻函數である。

(29) 式を (27) 式に代入すれば,

$$\frac{X}{u}\frac{d^4u}{dx^4}-\frac{Z}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{w}{gv}\frac{d^2v}{dt^2}$$

此の兩邊が等しい爲めには，兩邊は各々一つの常數に等しくならなければならない。この常數を $r$ とすれば

$$X\frac{d^4u}{dx^4}-Z\frac{d^2u}{dx^2}=ru \qquad \cdots\cdots(30)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-\frac{gv}{w}r=-p^2v \qquad \cdots\cdots(31)$$

玆に $\qquad p^2=\dfrac{g}{w}r$

(30) 式が固有函數を定めるものである。之を解くには,

$$u=e^{\delta x} \qquad \cdots\cdots(32)$$

と置くことにより

$$(X\delta^4-Z\delta^2-r)e^{\delta x}=0$$

故に $\qquad \delta^2=\dfrac{1}{2X}(Z\pm\sqrt{Z^2+4Xr})$

今

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2X}(\sqrt{Z^2+4Xr}+Z)&=\alpha^2\\ \frac{1}{2X}(\sqrt{Z^2+4Xr}-Z)&=\beta^2\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(33)$$

と置けば,

$$\delta=\alpha,\quad -\alpha,\quad i\beta,\quad -i\beta$$

故に (30) 式の一般解は

$$u=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3e^{i\beta x}+C_4e^{-i\beta x}$$

從つて又次の形で示すことが出來る。

$$u=C_1\sinh\alpha x+C_2\cosh\alpha x+C_3\sin\beta x+C_4\cos\beta x \quad\cdots\cdots(34)$$

$C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ の比と $\alpha$, $\beta$ とは限界の條件で定めるものであるが，基礎の動かぬ時の振動卽ち固有振動の場合の限界條件は次の如くである。

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i} & x=0 \text{ にて固定卽ち } u=0 & \dfrac{du}{dx}=0 \\ \text{ii} & x=l \text{ にて自由卽ち } \dfrac{d^2u}{dx^2}=0, & X\dfrac{d^3u}{dx^3}-Z\dfrac{du}{dx}=0 \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(35)$$

然るに

$$u=C_1\sinh\alpha x+C_2\cosh\alpha x+C_3\sin\beta x+C_4\cos\beta x$$

$$\frac{du}{dx}=\alpha C_1\cosh\alpha x+\alpha C_2\sinh\alpha x+\beta C_3\cos\beta x-\beta C_4\sin\beta x$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\alpha^2C_1\sinh\alpha x+\alpha^2C_2\cosh\alpha x-\beta^2C_3\sin\beta x-\beta^2C_4\cos\beta x$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\alpha^3C_1\cosh\alpha x+\alpha^3C_2\sinh\alpha x-\beta^3C_3\cos\beta x+\beta^3C_4\sin\beta x$$

又 (33) 式の關係から

$$\alpha^2X-Z=\beta^2X,\qquad \beta^2X+Z=\alpha^2X$$

是等の式を (35) 式に代入し，更に

$$\beta=\lambda\alpha \quad\cdots\cdots(36)$$

と置けば,

$$C_2+C_4=0 \quad\cdots\cdots(37)$$

$$C_1+\lambda C_3=0 \quad\cdots\cdots(38)$$

$$C_1\sinh\alpha l+C_2\cosh\alpha l-C_3\lambda^2\sin\beta l-C_4\lambda^2\cos\beta l=0 \quad\cdots\cdots(39)$$

$$C_1\lambda\cosh\alpha l+C_2\lambda\sinh\alpha l-C_3\cos\beta l+C_4\sin\beta l=0 \quad\cdots\cdots(40)$$

(39) 及(40) の兩式は之に (37) 及 (38) 式の關係を代入すれば,

$$C_1(\sinh\alpha l+\lambda\sin\beta l)+C_2(\cosh\alpha l+\lambda^2\cos\beta l)=0 \quad\cdots\cdots(41)$$

$$C_1(\lambda^2\cosh\alpha l+\cos\beta l)+C_2(\lambda^2\sinh\alpha l-\lambda\sin\beta l)=0 \quad\cdots\cdots(42)$$

(41) 及 (42) の兩式が聯立に解き得るため，卽ち $C_1$ 及 $C_2$ が共に零ならずして振動をなすためには

$$\begin{vmatrix} (\sinh\alpha l+\lambda\sin\beta l) & (\cosh\alpha l+\lambda^2\cos\beta l) \\ (\lambda^2\cosh\alpha l+\cos\beta l) & (\lambda^2\sinh\alpha l-\lambda\sin\beta l) \end{vmatrix}=0$$

なるを要するもので，從つて之から

$$(\sin\alpha l+\lambda\sin\beta l)(\lambda^2\sinh\alpha l-\lambda\sin\beta l)-(\cosh\alpha l+\lambda^2\cos\beta l)(\lambda^2\cosh\alpha l+\cos\beta l)=0$$

或は

$$(1+\lambda^4)\cosh\alpha l\cos\beta l+(\lambda-\lambda^3)\sinh\alpha l\sin\beta l+2\lambda^2=0 \qquad \cdots(43)$$

之卽ち常數 $r$ の滿足すべき條件式である。

(43) 式は又

$$\sinh\alpha l=\frac{e^{\alpha l}}{2}-\frac{e^{-\alpha l}}{2},\qquad \cosh\alpha l=\frac{e^{\alpha l}}{2}+\frac{e^{-\alpha l}}{2}$$

なる關係を代入する時は次の形にても表はすことが出來る。

$$e^{\alpha l}\{(1+\lambda^4)\cos\beta l+(\lambda-\lambda^3)\sin\beta l\}+e^{-\alpha l}\{(1+\lambda^4)\cos\beta l-(\lambda-\lambda^3)\sin\beta l\}+4\lambda^2=0 \qquad \cdots(44)$$

(43) 又は (44) 式を滿足せしむる $r$ の値は無數にあり，種々なる次數の振動があることゝなるが第 $s$ 次振動に對する $r$ 從つて又 $\alpha,\beta,\lambda$ 及固有函數 $u$ を夫々 $r_s,\alpha_s,\beta_s,\lambda_s$ 及 $u_s$ とすれば第 $s$ 次振動の固有函數は (34) 式に (37), (38), 及 (41) の關係を代入して，

$$u_s=C_2\left\{(\cosh\alpha_s x-\cos\beta_s x)-\frac{\cosh\alpha_s l+\lambda_s^2\cos\beta_s l}{\sinh\alpha_s l+\lambda_s\sin\beta_s l}\left(\sinh\alpha_s x-\frac{1}{\lambda_s}\sin\beta_s x\right)\right\}$$

$C_2$ はなんでもよいのであつて今 $\dfrac{C_2}{(\sinh\alpha_s l+\lambda_s\sin\beta_s l)}$ を 1 とおけば

$$\begin{aligned}u_s=&(\sinh\alpha_s l+\lambda_s\sin\beta_s l)(\cosh\alpha_s x-\cos\beta_s x)\\&-(\cosh\alpha_s l+\lambda_s^2\cos\beta_s l)\left(\sinh\alpha_s x-\frac{1}{\lambda_s}\sin\beta_s x\right)\end{aligned} \qquad \cdots(45)$$

(43) 又は (44) 式から $r_s$ 從つて又 $p_s$ が定まれば (31) 式は單弦振動の微分方程式であり $v$ は直ちに

$$v_s=a_s\sin(p_s t+\xi_s) \qquad \cdots(46)$$

又は $$v_s=A_s\sin p_s t+B_s\cos p_s t \qquad \cdots(47)$$

但し $$\sqrt{A_s^2+B_s^2}=a_s,\qquad \frac{B_s}{A_s}=\tan\xi_s$$

從つて第 $s$ 次固有振動週期 $T_s$ は

$$T_s=\frac{2\pi}{p_s}=2\pi\sqrt{\frac{w}{g r_s}} \qquad \cdots(48)$$

(45) 及 (46) 式を (29) 式に代入すれば第 $s$ 次固有振動は次の如くなる。

$$\begin{aligned}y_s=a_s\Big\{&(\sinh\alpha_s l+\lambda_s\sin\beta_s l)(\cosh\alpha_s x-\cos\beta_s x)\\&-(\cosh\alpha_s l+\lambda^2\cos\beta_s l)\left(\sinh\alpha_s x-\frac{1}{\lambda_s}\sin\beta_s x\right)\Big\}\sin(p_s t+\xi_s)\end{aligned} \qquad \cdots(49)$$

第 1 次から第 $n$ 次の振動迄を同時に考へる時は固有振動の式は次の如くなる。

$$\begin{aligned}y=\sum_{s=1}^{n}a_s\Big\{&(\sinh\alpha_s l+\lambda_s\sin\beta_s l)(\cosh\alpha_s x-\cos\beta_s x)\\&-(\cosh\alpha_s l+\lambda^2\cos\beta_s l)\left(\sinh\alpha_s x-\frac{1}{\lambda_s}\sin\beta_s x\right)\Big\}\sin(p_s t+\xi_s)\end{aligned} \qquad \cdots(50)$$

玆に $a_s$ と $\xi_s$ とは振動開始の狀態から決定すべき常數である。

## 3. 多張間高層ラーメンの强制振動

地動を

$$y_0=a_0\cos p_0 t \qquad \cdots(51)$$

とする。地動を受ける時は地動と同一週期にて振動する特殊振動即ち定常振動と發動時の條件で定まる自由振動が相重なつて現はれるものである。

特殊振動を

$$y=u(x)a_0\cos p_0t \quad\cdots\cdots(52)$$

とすれば之を (27) 式に代入すれば，

$$X\frac{d^4u}{dx^4}-Z\frac{d^2u}{dx^2}=r_0u \quad\cdots\cdots(53)$$

玆に　$r_0=p_0^2\dfrac{w}{g}=\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\dfrac{w}{g}$

但し $T_0$ は地動の振動週期とす。

(53) 式の一般解は固有振動の時と同様に

$$u=C_1\sinh\alpha_0x+C_2\cosh\alpha_0x+C_3\sin\beta_0x+C_4\cos\beta_0x \quad\cdots\cdots(54)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0^2&=\frac{1}{2X}(\sqrt{Z^2+4Xr_0}+Z)\\ \beta_0^2&=\frac{1}{2X}(\sqrt{Z^2+4Xr_0}-Z)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(55)$$

下端が基礎に固定，上端は自由なるラーメンが基礎に地動を受けた場合の限界條件は

$$\left.\begin{array}{llll}\text{i} & x=0 \ \text{にて} & u=1, & \dfrac{du}{dx}=0\\ \text{ii} & x=l \ \text{にて} & \dfrac{d^2u}{dx^2}=0, & X\dfrac{d^3u}{dx^3}-Z\dfrac{du}{dx}=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(56)$$

この條件を (54) 式に代入し，更に

$$\beta_0=\lambda_0\alpha_0 \quad\cdots\cdots(57)$$

と置けば，

$$C_2+C_4=1, \qquad C_1+\lambda_0C_3=0$$

$$C_1\sinh\alpha_0l+C_2\cosh\alpha_0l-C_3\lambda_0^2\sin\beta_0l-C_4\lambda_0^2\cos\beta_0l=0$$

$$C_1\lambda_0\cosh\alpha_0l+C_2\lambda_0\sinh\alpha_0l-C_3\cos\beta_0l+C_4\sin\beta_0l=0$$

是等 4 式から積分常數 $C_1$, $C_2$, $C_3$ 及 $C_4$ を決定すれば次の如し。

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_0^4\sinh\alpha_0l\cos\beta_0l+\lambda_0\cosh\alpha_0l\sin\beta_0l)\\ C_2&=\frac{1}{\varDelta}(-\lambda_0^4\cosh\alpha_0l\cos\beta_0l-\lambda_0\sinh\alpha_0l\sin\beta_0l-\lambda_0^2)\\ C_3&=\frac{1}{\varDelta}(-\lambda_0^3\sinh\alpha_0l\cos\beta_0l-\cosh\alpha_0l\sin\beta_0l)\\ C_4&=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_0^3\sinh\alpha_0l\sin\beta_0l-\cosh\alpha_0l\cos\beta_0l-\lambda_0^2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(58)$$

玆に

$$\varDelta=-(1+\lambda_0^4)\cosh\alpha_0l\cos\beta_0l-(\lambda_0-\lambda_0^3)\sinh\alpha_0l\sin\beta_0l-2\lambda_0^2 \quad\cdots\cdots(59)$$

地動の週期がラーメンの固有振動週期と等しくなれば (59) 式は (43) 式の左邊と等しくなり零となる。從つてこの場合の振動曲線の振幅は無限大となり即ち共鳴作用をなす。

かく特殊振動が定まると一般の振動はこの特殊振動に固有振動を加へて

$$y=ua_0\cos p_0t+\sum_{s=1}^{n}u_sa_s\sin(p_st+\xi_s)\cdots(60)$$

茲に $a_s$ 及 $\xi_s$ は振動開始の狀態から定むべき常數である。

## 4. 多張間高層ラーメンの固有振動週期と其の實用算定公式

多張間高層ラーメンの固有振動週期は既に述べた如く (43) 又は (44) 式を滿足する樣な $r$ の値を決定し之を (48) 式に代入して求めることが出來る。この方法に依つて

$$T=CD_sl\sqrt{\frac{w}{gZ}}\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

を滿足せしむる樣な $C$ の値を $E_sl\sqrt{\frac{Z}{X}}$ の種々なる値に對して決定すれば表-1 の如くなる。この $C$ の計算に關しては前掲の水原氏の論文によるところ大なり。

表-1.　$C$ の値

| $E_sl\sqrt{\frac{Z}{X}}$ | $C$ | | |
|---|---|---|---|
| | 第1次振動 | 第2次振動 | 第3次振動 |
| 0.1 | 0.0991 | 0.0993 | 0.0994 |
| 0.2 | 0.1929 | 0.1948 | 0.1952 |
| 0.4 | 0.3514 | 0.3605 | 0.3651 |
| 0.6 | 0.4673 | 0.4900 | 0.4988 |
| 0.8 | 0.5494 | 0.5807 | 0.5984 |
| 1.0 | 0.6090 | 0.6493 | 0.6724 |
| 1.5 | 0.7067 | 0.7587 | 0.7874 |
| 2.0 | 0.7669 | 0.8210 | 0.8503 |
| 3.0 | 0.8389 | 0.8881 | 0.9124 |
| 4.0 | 0.8787 | 0.9208 | 0.9407 |
| 5.0 | 0.9041 | 0.9398 | 0.9569 |
| 10.0 | 0.9533 | 0.9737 | 0.9823 |
| ∞ | 1 | 1 | 1 |

茲に $D_s$ と $E_s$ とは，

$$\left.\begin{array}{lll}\text{第 1 次振動に對しては,} & D_1=4, & E_1=0.4467\,6\\ \text{第 2 次振動に對しては,} & D_2=\frac{4}{3}, & E_2=0.2138\,6\\ \text{第 3 次振動に對しては,} & D_3=\frac{4}{5}, & E_3=0.1273\,0\end{array}\right\}\cdots\cdots(62)$$

なる値とする。

$E_sl\sqrt{\frac{Z}{X}}$ 及 $D_sl\sqrt{\frac{w}{gZ}}$ は之に (28) 式の關係及 $\frac{wh}{g}=M$, $l=(n+0.5)h$ なる關係を代入すれば

$$E_sl\sqrt{\frac{Z}{X}}=E_s(n+0.5)\sqrt{12}\sqrt{\frac{1}{F_m(k)}}\cdots\cdots(63)$$

$$D_sl\sqrt{\frac{w}{gZ}}=\frac{D_s}{\sqrt{12}}(n+0.5)\sqrt{1+F_m(k)}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(64)$$

茲に $F_m(k)$ は桁と柱の剛度比 $k$ に關するもので,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{1 張間ラーメンに對しては,} & F_1(k)=\frac{2}{k}\\ \text{2 張間ラーメンに對しては,} & F_2(k)=\frac{2(k+3)}{k(k+4)}\\ \text{3 張間ラーメンに對しては,} & F_3(k)=\frac{5k+12}{3k(k+3)}\\ \text{4 張間ラーメンに對しては,} & F_4(k)=\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\end{array}\right\}\cdots\cdots(65)$$

5 張間ラーメンに對しては， $F_5(k)=\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}$

6 張間以上の $m$ 張間ラーメンに對しては， $F_m(k)=\dfrac{m+1}{mk}$

$k=1$ 即ち柱及桁の剛度が總べて $K$ なる 1 張間 1 層より 5 張間 5 層までの合計 25 種のラーメンの固有振動週期を以上述べた方法に從つて計算すれば表-2 の如くなる。但しラーメンは何れも各層に一様に $M$ なる質量を擔ふ場合とする。

**表-2. 柱及桁の剛度 $K$ なるラーメンの固有振動週期**

| 層　數 | 振動次數 | 固有振動週期　係數: $\sqrt{\dfrac{Mh^2}{(m+1)EK}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 張間 | 2 張間 | 3 張間 | 4 張間 | 5 張間 |
| 1 層ラーメン | 第 1 次振動 | 2.176 | 2.095 | 2.051 | 2.026 | 2.011 |
| 2 層ラーメン | 第 1 次振動 | 4.115 | 3.915 | 3.816 | 3.761 | 3.728 |
| | 第 2 次振動 | 1.204 | 1.163 | 1.146 | 1.133 | 1.127 |
| 3 層ラーメン | 第 1 次振動 | 6.113 | 5.777 | 5.615 | 5.526 | 5.468 |
| | 第 2 次振動 | 1.870 | 1.791 | 1.750 | 1.727 | 1.713 |
| | 第 3 次振動 | 0.981 | 0.953 | 0.940 | 0.931 | 0.926 |
| 4 層ラーメン | 第 1 次振動 | 8.122 | 7.645 | 7.418 | 7.288 | 7.213 |
| | 第 2 次振動 | 2.548 | 2.422 | 2.362 | 2.328 | 2.306 |
| | 第 3 次振動 | 1.385 | 1.334 | 1.308 | 1.294 | 1.287 |
| 5 層ラーメン | 第 1 次振動 | 10.128 | 9.509 | 9.210 | 9.041 | 8.939 |
| | 第 2 次振動 | 3.233 | 3.064 | 2.978 | 2.931 | 2.901 |
| | 第 3 次振動 | 1.794 | 1.724 | 1.683 | 1.662 | 1.649 |

**表-3. 桁の剛度 $K$ なる 1 張間ラーメンと桁の剛度 $\infty$ なる $m$ 張間ラーメンの固有振動週期**

| 層　數 $n$ | 柱及桁の剛度 $K$ なる 1 張間ラーメン　係數: $\sqrt{\dfrac{Mh^2}{2EK}}$ | | | 柱の剛度 $K$, 桁の剛度 $\infty$ なる $m$ 張間ラーメン　係數: $\sqrt{\dfrac{Mh^2}{(m+1)EK}}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 第 1 次振動 | 第 2 次振動 | 第 3 次振動 | 第 1 次振動 | 第 2 次振動 | 第 3 次振動 |
| 1 | 2.176 | | | 1.732 | | |
| 2 | 4.115 | 1.204 | | 2.887 | 0.962 | |
| 3 | 6.113 | 1.870 | 0.981 | 4.041 | 1.347 | 0.808 |
| 4 | 8.122 | 2.548 | 1.385 | 5.196 | 1.732 | 1.039 |
| 5 | 10.13 | 3.233 | 1.794 | 6.351 | 2.117 | 1.270 |
| 6 | 12.13 | 3.918 | 2.215 | 7.506 | 2.502 | 1.501 |
| 7 | 14.12 | 4.595 | 2.629 | 8.660 | 2.887 | 1.732 |
| 8 | 16.13 | 5.276 | 3.046 | 9.815 | 3.272 | 1.963 |
| 9 | 18.16 | 5.952 | 3.461 | 10.970 | 3.657 | 2.194 |
| 10 | 20.17 | 6.622 | 3.871 | 12.124 | 4.041 | 2.425 |
| 20 | 40.17 | 13.33 | 7.938 | 23.671 | 7.890 | 4.734 |
| 30 | 60.18 | 20.03 | 11.96 | 35.218 | 11.739 | 7.044 |
| 40 | 80.18 | 26.70 | 15.96 | 46.765 | 15.588 | 9.353 |
| 50 | 100.18 | 33.37 | 20.00 | 58.312 | 19.437 | 11.662 |

**表-3** は桁の剛度が $K$ 及 $\infty$ なる場合の 1 層より 50 層に至るラーメンの固有振動週期を示したものである。但し前者のラーメンは 1 張間，後者のラーメンは $m$ 張間のものとす。

次に多張間高層ラーメンの固有振動週期を簡單に求め得る實用算定公式を誘導しやう。

(33) 式を變形して，

$$(\alpha l)^2=\frac{l^2Z}{2X}\left\{1+\sqrt{1+\frac{4Xr}{Z^2}}\right\}$$

$$-(\beta l)^2=\frac{l^2Z}{2X}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4Xr}{Z^2}}\right\}$$

ラーメンが高層なる場合又は桁と柱の剛度比 $k$ があまり小ならざる場合は $\dfrac{4Xr}{Z^2}$ の値は 1 より小なるものである。從つて上式は又，

$$(\alpha l)^2=\frac{l^2Z}{2X}\left\{1+1+\frac{1}{2}\frac{4Xr}{Z^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{4Xr}{Z^2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$-(\beta l)^2=\frac{l^2Z}{2X}\left\{1-1-\frac{1}{2}\frac{4Xr}{Z^2}+\frac{1}{8}\left(\frac{4Xr}{Z^2}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$$

故に $\alpha l$ 及 $\beta l$ は近似的に

$$\left.\begin{aligned}\alpha l&=l\sqrt{\frac{Z}{X}}\\ \beta l&=l\sqrt{\frac{r}{Z}}=\frac{2\pi}{T}l\sqrt{\frac{w}{gZ}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(66)$$

從つて又

$$\lambda=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{wX}{gZ^2}}\quad\cdots\cdots(67)$$

次に固有振動週期を決定すべき (44) の條件式に於て $e^{\alpha l}$ は普通他の項に比して極めて大であり從つて近似的にはこの條件式は

$$(1+\lambda^4)\cos\beta l+(\lambda-\lambda^3)\sin\beta l=0$$

となる。更に又 $\lambda$ も普通 1 より小なる値でありその高次の項を省略すれば，

$$\cot\beta l+\lambda=0\quad\cdots\cdots(68)$$

之に (67) 式の關係を代入して

$$\cot\left(\frac{2\pi l}{T}\sqrt{\frac{w}{gZ}}\right)=-\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{wX}{gZ^2}}\quad\cdots\cdots(69)$$

然るに　$$-\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{wX}{gZ^2}}\doteqdot-\tan\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{wX}{gZ^2}}\right)=\cot\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{wX}{gZ^2}}\right\}$$

故に

$$\frac{2\pi l}{T}\sqrt{\frac{w}{gZ}}=\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{mX}{gZ^2}},\qquad(s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

之から

$$\frac{2l}{\left(s-\frac{1}{2}\right)T}\sqrt{\frac{w}{gZ}}\left(1-\frac{1}{l}\sqrt{\frac{X}{Z}}\right)=1$$

或は

$$\frac{2l}{\left(s-\frac{1}{2}\right)T}\sqrt{\frac{w}{gZ}}=\left(1-\frac{1}{l}\sqrt{\frac{X}{Z}}\right)^{-1}$$

$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{X}{Z}}$ の値も高層ラーメン又は $k$ の比較的小ならざるラーメンに於ては 1 より小なるもので上式は近似的に次の如くなる

$$\frac{2l}{\left(s-\frac{1}{2}\right)T}\sqrt{\frac{w}{gZ}}=1+\frac{1}{l}\sqrt{\frac{X}{Z}}$$

故に

$$T=\frac{\dfrac{2l}{\left(s-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\dfrac{w}{gZ}}}{1+\dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{X}{Z}}}$$

又は

$$T=\frac{2}{s-\frac{1}{2}}\,\frac{l^2\sqrt{\dfrac{w}{gZ}}\sqrt{\dfrac{Z}{X}}}{l\sqrt{\dfrac{Z}{X}}+1}\cdots\cdots(70)$$

然るに又

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{2}{s-\frac{1}{2}}l\sqrt{\frac{w}{gZ}}-\frac{2}{s-\frac{1}{2}}\,\frac{l^2\sqrt{\dfrac{w}{gZ}}\sqrt{\dfrac{Z}{X}}}{l\sqrt{\dfrac{Z}{X}}+1}\right\}=\frac{2}{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{w}{gZ}}\sqrt{\frac{X}{Z}}\cdots\cdots(71)$$

故に高層ラーメンに對しては

$$T=\frac{2}{s-\frac{1}{2}}l\sqrt{\frac{w}{gZ}}-\frac{2}{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{w}{gZ}}\sqrt{\frac{X}{Z}}$$

故に

$$T=\frac{2}{s-\frac{1}{2}}\left(l-\sqrt{\frac{X}{Z}}\right)\sqrt{\frac{w}{gZ}}\cdots\cdots(72)$$

(72) 式に (28) 式の關係及

$$l=(n+0.5)h,\qquad \frac{wh}{g}=M$$

なる關係を代入すれば, $m$ 張間 $n$ 層ラーメンの固有振動週期は,

$$T=\frac{D_s}{\sqrt{12}}\left\{n+0.5-\sqrt{\frac{F_m(k)}{12}}\right\}\sqrt{1+F_m(k)}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(73)$$

式中の $D_s$ 及 $F_m(k)$ は夫々前に示した (62) 及 (65) の式と同じものである。この (73) 式が多張間高層ラーメンの固有振動週期實用算式である。

$k=\infty$ 即ち桁の剛度が $\infty$ なる $m$ 張間ラーメンの固有振動週期は $F_m(k)=0$ にして

$$T=\frac{D_s}{\sqrt{12}}(n+0.5)\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(74)$$

(73) 式の實用算定公式に依る結果は桁と柱の剛度比 $k$ があまり小ならざる場合には 1 層, 2 層の如き低層ラーメンにもよく適合するもので之に關する詳細は次節に述べることゝし, 玆には $k=1$ 即ち柱及桁の剛度が何れも $K$ なる 1 張間 1 層より 5 張間 50 層に至るラーメンの固有振動週期を計算しその結果を 表-4 に示した。第 1 次固有振動週期のみを示したが第 2 次固有振動週期はこの表の値の 1/3, 第 3 次固有振動週期はこの表の値の 1/5 である。桁の剛度が ∞ なる場合には 表-3 に示したものと同じである。

**表-4. 實用算定公式に依る柱及桁の剛度 $K$ なるラーメンの第 1 次固有振動週期**

| 層数 ($n$) | 固有振動週期　係數: $\sqrt{\dfrac{Mh^2}{(m+1)EK}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 張間 | 2 張間 | 3 張間 | 4 張間 | 5 張間 |
| 1 | 2.183 | 2.113 | 2.076 | 2.055 | 2.041 |
| 2 | 4.183 | 3.975 | 3.871 | 3.814 | 3.777 |
| 3 | 6.183 | 5.837 | 5.663 | 5.573 | 5.513 |
| 4 | 8.183 | 7.699 | 7.461 | 7.331 | 7.249 |
| 5 | 10.18 | 9.561 | 9.256 | 9.090 | 8.985 |
| 6 | 12.18 | 11.42 | 11.05 | 10.85 | 10.72 |
| 7 | 14.18 | 13.28 | 12.85 | 12.61 | 12.46 |
| 8 | 16.18 | 15.15 | 14.64 | 14.37 | 14.19 |
| 9 | 18.18 | 17.01 | 16.44 | 16.13 | 15.93 |
| 10 | 20.18 | 18.87 | 18.23 | 17.88 | 17.66 |
| 20 | 40.18 | 37.49 | 36.18 | 35.47 | 35.02 |
| 30 | 60.18 | 56.11 | 54.13 | 53.06 | 52.38 |
| 40 | 80.18 | 74.73 | 72.08 | 70.65 | 69.74 |
| 50 | 100.18 | 93.35 | 90.04 | 88.24 | 87.10 |

$k=1$ なる場合には, 表-2 に示した固有振動週期と 表-4 に示した實用算定公式に依る結果とは 1 層, 2 層の如き低層ラーメンに於てもよく近似せる値を示してゐる。

## 5. 固有振動週期實用算定公式の精度

玆に提案せる多張間高層ラーメンの固有振動週期實用算定公式 (73) の精度を (61) の一般式に依るものと比較して調べると次の如くなる。

(61) 及 (73) の 1 張間ラーメンに對するものは夫々

$$T=\frac{D_s}{\sqrt{12}}C(n+0.5)\sqrt{1+\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{Mh^2}{2EK}} \quad \cdots\cdots (75)$$

$$T=\frac{D_s}{\sqrt{12}}\left(n+0.5-\sqrt{\frac{1}{6k}}\right)\sqrt{1+\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{Mh^2}{2EK}} \quad \cdots\cdots (76)$$

(75) と (76) の兩式の結果を比較するには $C(n+0.5)$ と $\left(n+0.5-\sqrt{\dfrac{1}{6k}}\right)$ の値を比較すればよいので種々なる桁と柱の剛度比 $k$ と層數 $n$ に對する是等の計算結果及その差を示せば表-5, 表-6 及表-7 の如くである。

實用算定公式の精度は桁と柱との剛度比 $k$ 及層數 $n$ により異なりその誤差の程度は表-5, 表-6, 及表-7 に於て明である。$k$ 及 $n$ の大なる程精度も大なるは勿論である。

固有振動週期中最も必要な第 1 次固有振動週期に就て見るに, 1 層ラーメンに於ては $k=1$ 以上の場合, 2 層ラーメンに於ては $k=0.3$ 以上の場合, 3 層ラーメンに於ては $k=0.15$ 以上の場合, 4 層ラーメンに於ては $k=0.1$ 以上の場合, 5 層ラーメンに於ては $k=0.06$ 以上の場合, 6 層ラーメンに於ては $k=0.05$ 以上の場合及 10 層以上のラーメンに於ては $k=0.02$ 以上の場合にその誤差は 1% 内外にすぎない。實用的見地からはこの程度の精度を有すれば充分であらう。

玆には 1 張間ラーメンのみに就て述べたが多張間ラーメンに對しても大體に於て同樣な結果である。

## 表-5. 實用算定公式の精度-1　（第 1 次固有振動週期）

| 層數 ($n$) | 剛度比 ($k$) | $C(n+0.5)$ | $\left(n+0.5-\sqrt{\frac{1}{6k}}\right)$ | 差 (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.835 | 1.060 | 1.053 | −0.6 |
| | 1.484 | 1.149 | 1.165 | 1.3 |
| | 3.340 | 1.258 | 1.277 | 1.5 |
| | 5.938 | 1.318 | 1.332 | 1.1 |
| | 9.278 | 1.356 | 1.366 | 0.7 |
| | 37.11 | 1.430 | 1.433 | 0.2 |
| 2 | 0.301 | 1.767 | 1.755 | −0.7 |
| | 0.534 | 1.917 | 1.942 | 1.3 |
| | 1.202 | 2.097 | 2.128 | 1.5 |
| | 2.138 | 2.197 | 2.221 | 1.1 |
| | 3.340 | 2.260 | 2.277 | 0.7 |
| | 13.36 | 2.383 | 2.388 | 0.2 |
| 3 | 0.153 | 2.473 | 2.458 | −0.6 |
| | 0.273 | 2.684 | 2.718 | 1.3 |
| | 0.613 | 2.936 | 2.979 | 1.5 |
| | 1.091 | 3.075 | 3.109 | 1.1 |
| | 1.704 | 3.164 | 3.187 | 0.7 |
| | 6.816 | 3.336 | 3.344 | 0.2 |
| 4 | 0.093 | 3.180 | 3.160 | −0.6 |
| | 0.165 | 3.451 | 3.500 | 1.4 |
| | 0.371 | 3.775 | 3.830 | 1.5 |
| 4 | 0.660 | 3.954 | 3.997 | 1.1 |
| | 1.031 | 4.069 | 4.098 | 0.7 |
| | 4.124 | 4.290 | 4.299 | 0.2 |
| 5 | 0.062 | 3.887 | 3.862 | −0.6 |
| | 0.110 | 4.218 | 4.271 | 1.3 |
| | 0.248 | 4.614 | 4.681 | 1.5 |
| | 0.442 | 4.833 | 4.886 | 1.1 |
| | 0.690 | 4.973 | 5.008 | 0.7 |
| | 2.760 | 5.243 | 5.251 | 0.2 |
| 6 | 0.044 | 4.594 | 4.564 | −0.6 |
| | 0.079 | 4.985 | 5.048 | 1.3 |
| | 0.178 | 5.453 | 5.532 | 1.5 |
| | 0.316 | 5.712 | 5.774 | 1.1 |
| | 0.494 | 5.877 | 5.919 | 0.7 |
| | 1.976 | 6.196 | 6.210 | 0.2 |
| 10 | 0.017 | 7.420 | 7.373 | −0.6 |
| | 0.030 | 8.052 | 8.155 | 1.3 |
| | 0.067 | 8.809 | 8.937 | 1.5 |
| | 0.121 | 9.227 | 9.328 | 1.1 |
| | 0.189 | 9.494 | 9.562 | 0.7 |
| | 0.757 | 10.00 | 10.03 | 0.2 |

## 表-6. 實用算定公式の精度-2　（第 2 次固有振動週期）

| 層數 ($n$) | 剛度比 ($k$) | $C(n+0.5)$ | $\left(n+0.5-\sqrt{\frac{1}{6k}}\right)$ | 差 (%) |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2.332 | 2.052 | 2.233 | 8.8 |
| | 5.247 | 2.220 | 2.322 | 4.6 |
| | 9.328 | 2.302 | 2.367 | 2.8 |
| | 14.57 | 2.349 | 2.393 | 1.9 |
| | 58.30 | 2.434 | 2.447 | 0.5 |
| 4 | 0.720 | 3.694 | 4.019 | 8.8 |
| | 1.620 | 3.996 | 4.179 | 4.6 |
| | 2.879 | 4.144 | 4.259 | 2.8 |
| | 4.499 | 4.220 | 4.308 | 1.9 |
| | 17.99 | 4.382 | 4.404 | 0.5 |
| 6 | 0.345 | 5.337 | 5.805 | 8.8 |
| | 0.776 | 5.773 | 6.037 | 4.6 |
| | 1.380 | 5.985 | 6.152 | 2.8 |
| | 2.156 | 6.109 | 6.222 | 1.9 |
| | 8.625 | 6.329 | 6.361 | 0.5 |
| 8 | 0.202 | 6.978 | 7.591 | 8.8 |
| | 0.454 | 7.549 | 7.894 | 4.6 |
| | 0.807 | 7.827 | 8.046 | 2.8 |
| 8 | 1.261 | 7.988 | 8.137 | 1.9 |
| | 5.044 | 8.276 | 8.318 | 0.5 |
| 10 | 0.132 | 8.620 | 9.378 | 8.8 |
| | 0.297 | 9.325 | 9.752 | 4.6 |
| | 0.529 | 9.668 | 9.939 | 2.8 |
| | 0.826 | 9.868 | 10.05 | 1.9 |
| | 3.305 | 10.22 | 10.27 | 0.5 |
| 15 | 0.061 | 12.73 | 13.84 | 8.8 |
| | 0.139 | 13.77 | 14.39 | 4.6 |
| | 0.243 | 14.27 | 14.67 | 2.8 |
| | 0.379 | 14.57 | 14.84 | 1.9 |
| | 1.517 | 15.09 | 15.17 | 0.5 |
| 20 | 0.035 | 16.83 | 18.31 | 8.8 |
| | 0.078 | 18.21 | 19.04 | 4.6 |
| | 0.139 | 18.88 | 19.40 | 2.8 |
| | 0.217 | 19.27 | 19.62 | 1.9 |
| | 0.867 | 19.96 | 20.06 | 0.5 |

表-7.　實用算定公式の精度-3　（第 3 次固有振動週期）

| 層數 $(n)$ | 剛度比 $(k)$ | $C(n+0.5)$ | $\left(n+0.5-\sqrt{\frac{1}{6k}}\right)$ | 差 % | 層數 $(n)$ | 剛度比 $(k)$ | $C(n+0.5)$ | $\left(n+0.5-\sqrt{\frac{1}{6k}}\right)$ | 差 (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3.358 | 2.976 | 3.277 | 10.1 | 20 | 0.098 | 17.43 | 19.19 | 10.1 |
| | 7.556 | 3.193 | 3.352 | 5.0 | | 0.220 | 18.70 | 19.63 | 5.0 |
| | 13.43 | 3.292 | 3.389 | 2.9 | | 0.391 | 19.28 | 19.85 | 2.9 |
| | 20.99 | 3.349 | 3.411 | 1.9 | | 0.611 | 19.62 | 19.98 | 1.9 |
| | 83.92 | 3.438 | 3.456 | 0.5 | | 2.446 | 20.15 | 20.24 | 0.5 |
| 5 | 1.360 | 4.677 | 5.150 | 10.1 | 30 | 0.044 | 25.93 | 28.56 | 10.1 |
| | 3.060 | 5.018 | 5.267 | 5.0 | | 0.099 | 27.83 | 29.21 | 5.0 |
| | 5.439 | 5.174 | 5.325 | 2.9 | | 0.177 | 28.69 | 29.21 | 2.9 |
| | 8.499 | 5.263 | 5.360 | 1.9 | | 0.272 | 29.18 | 29.72 | 1.9 |
| | 34.00 | 5.403 | 5.430 | 0.5 | | 1.090 | 29.96 | 30.11 | 0.5 |
| 10 | 0.373 | 8.928 | 9.832 | 10.1 | 40 | 0.025 | 34.44 | 37.92 | 10.1 |
| | 0.839 | 9.580 | 10.05 | 5.0 | | 0.056 | 36.95 | 38.78 | 5.0 |
| | 1.492 | 9.877 | 10.17 | 2.9 | | 0.100 | 38.10 | 39.21 | 2.9 |
| | 2.332 | 10.05 | 10.23 | 1.9 | | 0.157 | 38.75 | 39.47 | 1.9 |
| | 9.328 | 10.31 | 10.37 | 0.5 | | 0.627 | 39.78 | 39.98 | 0.5 |
| 15 | 0.171 | 13.18 | 14.51 | 10.1 | 50 | 0.016 | 42.94 | 47.29 | 10.1 |
| | 0.385 | 14.14 | 14.84 | 5.0 | | 0.036 | 46.08 | 48.36 | 5.0 |
| | 0.685 | 14.58 | 15.01 | 2.9 | | 0.064 | 47.50 | 48.89 | 2.9 |
| | 1.070 | 14.83 | 15.10 | 1.9 | | 0.101 | 48.32 | 49.21 | 1.9 |
| | 4.281 | 15.22 | 15.30 | 0.5 | | 0.403 | 49.61 | 49.86 | 0.5 |

第 2 次振動及第 3 次振動の固有振動週期に對する結果は第 1 次振動のものに比較しその精度は良くないが然し是等の次數の週期を必要とする樣な層數の多いラーメンに對しては $k$ が比較的小なる場合にもかなりの精度を有し，實用上茲に提案せる實用算定公式に依る結果は，充分信頼に足るものである。

## 6. 各種の固有振動週期算定法との比較

ラーメン振動の取扱方法は之を大別して

1. 棒の振動を基とするもの
2. 質量が節點に集中せるものと看做すもの
3. ラーメンの特性を摘出して解くもの

となすことが出來やう。

ラーメンを構成する各部材は 1 本の棒であるからラーメンの振動も亦棒の振動を基として解き得るものであるが，その操作は實際問題としては極めて繁雜なもので 1 層の場合を解くにも非常な努力を要するものである。純理論的な丈に實際問題としては高層多張間ラーメンには應用不可能である。此の種のものに妹澤博士，河野氏，野村氏等の研究がある。

質量が節點に集中してゐるものと假定すれば材の中間には慣性力が作用しないのでラーメン理論に依て振動方

程式が容易に得られるのである。即ちラーメン理論に依て任意節點に作用する力と各節點の變位との關係を求め之に基づいて振動方程式を作るのである。不規則なラーメンに對しても振動方程式及固有振動の一般式が明快に表はされるが數字的にその結果を出すことは 4 層以上になると非常に骨の折れるもので實際的問題として取扱ひ得るのは 4 層位迄であらう。但し 1 張間ラーメンに對してはその各部の構造が一様な場合には有限差方程式の積分法を用ひて解くことが出來るものでこれに關しては水原氏の研究がある。

次にラーメンの特性を摘出して解く方法であるが，之はラーメンの變形が主として各層の剪斷力に依て定まるといふ事實からラーメンの振動を剪斷振動體の振動體として取扱つたものでラーメン振動の略解法の多くはこの類に含まれてゐるものである。この種のものに武藤博士，水原氏，河野氏，中村氏等の研究がある。

この方法に依るものは，構造が一様な場合にても，桁の剛度が無限大ならざる場合は各層の剛度一様ならず，從てその取扱ひも簡單にはいかぬが，桁の剛度が無限大なる場合には明快な結果が得られてゐる。

茲には桁と柱の剛度比が 1 なる場合と無限大なる場合を例にとつて，前者の場合は質點系の振動として取扱つた結果を，後者の場合は剪斷振動として取扱つた場合の結果を求め，茲に求めた結果とを比較せん。尙第 1 次固有振動に對してはエネルギー法に依る結果とも比較することにした。

質點系の振動として取扱ふ場合は，ラーメンの基礎を 0 とし質點を下から順次に $1, 2, \cdots r, \cdots n$ で示し

$M_1, M_2, \cdots, M_r, \cdots, M_n$ を各點の質量

$y_1, y_2, \cdots, y_r, \cdots y_n$ を各點の撓み

$\alpha_{sr}$ を $s$ 點に振動方向に單位力が作用した時の $r$ 點の撓みとする (Maxwell の原理に依れば $\alpha_{sr}=\alpha_{rs}$) と，固有振動の方程式は，

$$\left.\begin{array}{l}
y_1=-\alpha_{11}M_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}-\alpha_{21}M_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{r1}M_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{n1}M_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}\\
y_2=-\alpha_{12}M_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}-\alpha_{22}M_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}-\cdots\quad-\alpha_{r2}M_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{n2}M_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}\\
\vdots\\
y_r=-\alpha_{1r}M_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}-\alpha_{2r}M_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{rr}M_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{nr}M_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}\\
\vdots\\
y_n=-\alpha_{1n}M_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}-\alpha_{2n}M_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{rn}M_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}-\cdots\cdots-\alpha_{nn}M_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

でありその固有振動週期を決定すべき條件式は，次の如く表はされるものである。

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11}M_1-\dfrac{T^2}{4\pi^2} & \alpha_{21}M_2 & \cdots\alpha_{r1}M_r & \cdots\alpha_{n1}M_n\\
\alpha_{12}M_1 & \alpha_{22}M_2-\dfrac{T^2}{4\pi^2} & \cdots\alpha_{r2}M_r & \cdots\alpha_{n2}M_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\alpha_{1r}M_1 & \alpha_{2r}M_2 & \cdots\alpha_{rr}M_r-\dfrac{T^2}{4\pi^2} & \cdots\alpha_{nr}M_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\alpha_{1n}M_1 & \alpha_{2n}M_2 & \cdots\ \alpha_{rn} & \cdots\alpha_{nn}M_n-\dfrac{T^2}{4\pi^2}
\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(78)$$

各層に一様な質量 $M$ を擔ふ層數の少いラーメンに對して (78) 式を解けば，

1 層ラーメンに對しては，

$$x=\alpha_{11}M_1\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

2 層ラーメンに對しては,

$$x^2-x(\alpha_{11}+\alpha_{22})M+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{12})M^2=0 \quad\cdots\cdots(80)$$

3 層ラーメンに對しては,

$$x^3-x^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})M+x(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{12}-\alpha_{23}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{13})M^2-(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$$
$$+2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{13}\alpha_{13}-\alpha_{33}\alpha_{12}\alpha_{12})M^3=0 \quad\cdots\cdots(81)$$

但し茲に $x$ は $\dfrac{T^2}{4\pi^2}$ を表はす。

今桁及柱の剛度が何れも $K$ なる 1 張間 1 層より 5 張間 3 層までのラーメンに對する $\alpha_{sr}$ を計算すれば表-8 の如くなる。この値を (79), (80) 及 (81) 式に夫々代入して之を解き固有振動週期を求むれば表-9 の如くなる。

震力が柱に連續的に加はるものと假定して求めた表-2 に示す結果と，質點系の振動として取扱つて求めた表-9 との結果を比較するに極めてよく近似せる値を示してゐる。僅かに 3 層の低いラーメンに於ても，2 張間から 5 張間のラーメンの第 1 次固有振動週期の如きはその差は僅かに 0.1% であり，高層ラーメンに對しては更に低率

表-8.　$\alpha_{sr}$ の 値

| 層　数 | $\alpha_{sr}$ | $\alpha_{sr}$ の 値　係 数: $\dfrac{h^2}{36EK}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 張 間 | 2 張 間 | 3 張 間 | 4 張 間 | 5 張 間 |
| 1 層ラーメン | $\alpha_{11}$ | 2.1429 | 1.3750 | 1.0000 | 0.7871 | 0.6488 |
| 2 層ラーメン | $\alpha_{11}$ | 2.0727 | 1.3255 | 0.9705 | 0.7663 | 0.6330 |
| | $\alpha_{12}$ | 2.7272 | 1.6848 | 1.2117 | 0.9471 | 0.7772 |
| | $\alpha_{21}$ | 2.7272 | 1.6848 | 1.2117 | 0.9471 | 0.7772 |
| | $\alpha_{22}$ | 6.2729 | 3.8178 | 2.7177 | 2.1122 | 1.7271 |
| 3 層ラーメン | $\alpha_{11}$ | 2.0715 | 1.3252 | 0.9704 | 0.7662 | 0.6330 |
| | $\alpha_{12}$ | 2.7158 | 1.6816 | 1.2100 | 0.9459 | 0.7765 |
| | $\alpha_{13}$ | 2.7990 | 1.7174 | 1.2317 | 0.9613 | 0.7883 |
| | $\alpha_{21}$ | 2.7158 | 1.6816 | 1.2099 | 0.9459 | 0.7764 |
| | $\alpha_{22}$ | 6.1593 | 3.7546 | 2.6809 | 2.0866 | 1.7080 |
| | $\alpha_{23}$ | 6.9910 | 4.1892 | 2.9676 | 2.2995 | 1.8770 |
| | $\alpha_{31}$ | 2.7990 | 1.7174 | 1.2316 | 0.9613 | 0.7882 |
| | $\alpha_{32}$ | 6.9910 | 4.1893 | 2.9676 | 2.2995 | 1.8769 |
| | $\alpha_{33}$ | 10.7257 | 6.4020 | 4.5215 | 3.4984 | 2.8527 |

表-9.　質點系振動として求めた固有振動週期　　柱及桁の剛度: $K$

| 層　数 | 振動次數 | 固 有 振 動 週 期　係 數: $\sqrt{\dfrac{Mh^2}{(m+1)EK}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 張 間 | 2 張 間 | 3 張 間 | 4 張 間 | 5 張 間 |
| 1 層ラーメン | 第 1 次振動 | 2.168 | 2.127 | 2.094 | 2.077 | 2.066 |
| 2 層ラーメン | 第 1 次振動 | 4.087 | 3.918 | 3.826 | 3.776 | 3.743 |
| | 第 2 次振動 | 1.266 | 1.252 | 1.240 | 1.233 | 1.229 |
| 3 層ラーメン | 第 1 次振動 | 6.071 | 5.769 | 5.612 | 5.526 | 5.471 |
| | 第 2 次振動 | 1.879 | 1.823 | 1.791 | 1.772 | 1.760 |
| | 第 3 次振動 | 1.085 | 1.079 | 1.072 | 1.070 | 1.068 |

の差にすぎぬものと考へられる。即ち多張間高層ラーメンの振動問題を考へる場合，その取扱ひを簡單にするため震力が柱に連續的に加はるものと假定することは，實際問題として少しも差支へなきことが解る。

尙表-10 はエネルギー法[2]に依て求めた結果を示したものである。第1次固有振動の週期のみより求められないが，その結果は，その計算法の簡易なるに拘はらず相當信頼度の高いものである。

**表-10.　エネルギー法に依る固有振動週期**

桁及柱の剛度：$K$

| 層　數 | 固有振動週期　係數 $\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 張 間 | 2 張 間 | 3 張 間 | 4 張 間 | 5 張 間 |
| 1 | 2.168 | 2.128 | 2.094 | 2.077 | 2.065 |
| 2 | 4.067 | 3.900 | 3.808 | 3.758 | 3.724 |
| 3 | 6.035 | 5.735 | 5.579 | 5.493 | 5.438 |
| 4 | 8.022 | 7.583 | 7.362 | 7.240 | 7.162 |
| 5 | 10.013 | 9.314 | 9.146 | 8.989 | 8.888 |

次に桁の剛度が無限大なる場合には，有限の質量が等間隔に分布された剪斷振動體と考へてその振動問題を解き得るもので $m$ 張間 $n$ 層ラーメンの振動週期は次の式にて表はされるものである[3]。

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\operatorname{cosec}\frac{2s-1}{2(2n+1)}\pi \quad\cdots\cdots(82)$$

$$s=1,\ 2,\ 3,\cdots$$

又さきに著者がエネルギー法より誘導した固有振動週期の式[4]は桁の剛度が無限大なる場合には

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+2n+1}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}} \quad\cdots\cdots(83)$$

で是等兩式に依る結果を示せば表-11 の如くなる。

(74) 式なる實用算定公式に依る結果は表-3 に示したものと同じであるがその結果は又表-11 の結果と良く近似してゐる。5 層ラーメンに於てはその第 1 次振動週期の差は 0.3%，10 層ラーメンに於ては 0.1% に過ぎない。

**表-11.　剪斷振動の理論及エネルギー法に依る固有振動週期**

柱の剛度：$K$　桁の剛度：$\infty$　係數 $\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$

| 層　數 | 剪斷振動の理論に依る週期 | | | エネルギー法に依る週期 |
|---|---|---|---|---|
| | 第 1 次振動 | 第 2 次振動 | 第 3 次振動 | 第 1 次振動 |
| 1 | 1.814 | | | 1.814 |
| 2 | 2.935 | 1.121 | | 2.925 |
| 3 | 4.075 | 1.455 | 1.007 | 4.056 |
| 4 | 5.223 | 1.814 | 1.184 | 5.194 |
| 5 | 6.372 | 2.183 | 1.385 | 6.335 |
| 6 | 7.524 | 2.557 | 1.596 | 7.478 |
| 7 | 8.676 | 2.935 | 1.814 | 8.623 |
| 8 | 9.829 | 3.314 | 2.035 | 9.768 |
| 9 | 10.982 | 3.694 | 2.258 | 10.913 |
| 10 | 12.136 | 4.076 | 2.482 | 12.059 |
| 20 | 23.677 | 7.908 | 4.763 | 23.523 |
| 30 | 35.222 | 11.752 | 7.046 | 34.992 |
| 40 | 46.768 | 15.597 | 9.368 | 46.463 |
| 50 | 58.315 | 19.445 | 11.674 | 57.933 |

## 結　論

各柱及桁の剛度が夫々 $K$ 及 $kK$ にして各層に一樣な荷重を擔ふやうな多張間高層ラーメンの振動問題は，このラーメンに働く震力及桁に依て柱に與へられる曲げモーメントが何れも連續的に柱に加はるものと假定することにより，簡單に取扱ふことが出來るもので，その振動方程式の一般式は (27) 式に依て表はされその解は固有振動に對しては (50) 式，强制振動に對しては (60) 式である。

---

[2), 3), 4)] 酒井忠明――エネルギー法より誘導したる高層ラーメンに對する固有振動週期の實用算式，土木學會誌本號 463 頁參照

又固有振動週期は (43) 又は (44) 式を解いて求めることが出來るものである。**表-1** はこの式から計算したものでこの表から求めた値を (61) 式に代入して固有振動週期を求めることが出來る。

桁と柱の剛度比 ($k$) があまり小ならざる普通の構造物に對して簡單に (73) なる實用算式からしてその固有振動週期を求めることが出來る。

以上の方法に於てはその計算の難易は張間數及層數の多寡には無關係で何れもその計算は容易であり而もその信頼度も極めて大で玆に述べた方法は構造一樣なる多張間高層ラーメンの振動問題を取扱ふ上に於て最も實用的な方法なることを著者は信ずるものである。