

論 說 報 告

第 26 卷 第 3 號 昭和 15 年 3 月

不完全弾性構造用材よりなる抗壓材の安定

會 員 結 城 朝 恭*

要旨 不完全弾性構造用材よりなる抗壓材が、軸圧力を受け、之れが眞直である場合の應力を考察し、抗壓材の安定に就て考究を試みたるものである。

1. 緒 言

本文には完全に弾性ならざる抗壓材の安定を研究せんとして行つた著者の試験並に考察を述べんとするものである。材料としては、檜、鉛材を取扱つた。偶々、Fritsche 教授の論文¹⁾を昭 14. 9. 13. に田中豊先生より指示された。該論文は本論文と類似の點があると思ふが著者の考察とは異つてあるようである。

2. 不完全弾性界に於ける挫屈現象

(1) Euler の理論式は非常に長い抗壓材の σ_k が σ_P (或は弾性限界) 以下である程度の細長い柱に良く適合するものなることは周知の事實である。

(2) Engesser-Kármán は塑性領域に於ける挫屈に就て、 T_k を Euler 式の E に置換して、 σ_k を求め得ることを提唱した。

(3) 不完全弾性構造用材よりなる眞直な抗壓材が軸圧力を受ける際に、著者が抗壓材の試験をした際、 $\sigma_k > \sigma_P$ の場合でも、柱が僅かに撓み出すや直ちに挫屈する傾向を見受けたのである。従つてこの際尙 Euler 現象が残留するものゝ様に觀察された。著者はこの時の σ_k 及 $1/\delta_k$ を求めて見て、兩者の關係に就て近似的考察を興へたのである。

3. 抗壓材安定に関する著者の考察

(1) 挫屈軸應力と細長比との關係：今 2 つの範圍に分けて考察することにしよう。

A: $\sigma_s > \sigma_k > \sigma_P$ の場合

B: $\sigma_B > \sigma_k > \sigma_s$ の場合

茲に σ_k = 挫屈軸應力, σ_P = 單純壓縮比例限界, σ_s = 單純壓縮降伏點, σ_B = 單純壓縮破壞強さ。

Tammann はよく研磨したる金屬に壓力を加へると結晶粒の或物から迂りが始まり順次迂り難い結晶に及び、遂に全部の結晶粒が同時に流動し始めるのを實驗した²⁾。圖-1 は鋼の $\sigma_D \sim \epsilon$ にして、 $\sigma_k > \sigma_P$ の場合に或るものは ϵ_s 迄滑り、他は $\epsilon_P \leq \epsilon \leq \epsilon_s$ にして、弾性を保有するものとする時には、A の場合を考察し得べく、更らに全部の σ が σ_s に達したる後は、B の場合を考察し得るのである。

A の場合：圖-1~2 で σ_E は恰も $\sigma_B < \sigma_P \leq \sigma_s$ なる場合に於ける Euler 値にして σ_k を與へるものであるが、今の場合は圖の如くに $\sigma_P < \sigma_B < \sigma_s$ であるから $\sigma_B > \sigma_k$ である。 σ が σ_P を越えて引張る時には結晶面に沿ふて

* 仙臺高等工業學校教授

1) J. Fritsche: Das Formänderungsgesetz des Baustahls im bildsamen Bereich. Die Bautechnik. 14. 7. 1939. Heft 30. 110 頁, 圖-2, 1.

滑動して滑り面が次第に増加する³⁾。今 壓縮の場合にも同じ現象を呈するものと推察しよう。若し假に、圖-1の A 點に於て次の (1) 式の示す p 丈が σ_s に達し、これ丈が粒間の入り或は回轉を生ずるものとする時には、結局未だ降伏點 σ_s に至らざる $(1-p)$ 部分の應力は

$$\epsilon_1'/\epsilon_s' = p^n \dots\dots\dots (1)$$

$\sigma_E - p\sigma_s$ となるから平均應力即ち挫屈軸應力 σ_k は (2) 式の値を採ることになる。

$$(a) \quad \sigma_k = (\sigma_E - p\sigma_s) / (1-p) \dots\dots\dots (2)$$

假りに p 丈が σ_s に達し、残りは σ_P にして、この中間に於ける値を採るものが無いやうな場合を假定すると (b) の如くなる。

$$(b) \quad \sigma_k = \sigma_s \cdot p + \sigma_P(1-p) \dots\dots\dots (3)$$

次に細長比の取扱を説明してみよう。 $\sigma_P > \sigma_E > \sigma_P$ なる σ_E が Euler 理論の σ_k で表はされた場合の細長比を $(l/i)_E$ とする。即ち $(\frac{l}{i})_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}}$ とする。然るに實は材料は比例限 σ_P より弾性~塑性となり、圖の A 點での l/i は (4) 式の様に考察される。

$$l/i = (l/i)_E(1+p^n) \dots\dots\dots (4)$$

但し n は實驗係數とする。尙近似式として、 p が小さい場合には、(5) 式で表はされる。これを p の 1 般値に對して用ひる時には、今の場合、 $\sigma_k \leq \sigma_s$ と見做したことになる。

$$l/i = (l/i)_E \cdot (1-p^m) \dots\dots\dots (5)$$

B の場合：圖-1~2 E_1 の如きものを畫き、 $\epsilon_\beta', \epsilon_s'$ 等は圖に於ける歪量を

$$q = \epsilon_\beta' / \epsilon_s' \dots\dots\dots (6)$$

示すものとする。D 點に於て、 q 丈が σ_β の應力に達するものと假定する、

$$(a) \quad \sigma_k = (\sigma_E - q \cdot \sigma_\beta) / (1-q) \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式を考察し得る。 q 丈 σ_β に達し、残りは σ_s にある時には (8) 式となる。

$$(b) \quad \sigma_k = q \cdot \sigma_\beta + \sigma_s(1-q) \dots\dots\dots (8)$$

この (a), (b) の場合の l/i は次の如く取扱ふ。

$$l/i = (l/i)_E(1+q^m) \dots\dots\dots (9)$$

$$l/i = (l/i)_E \cdot (1-q^m) \dots\dots\dots (10)$$

但、 $(l/i)_E = \pi \sqrt{\frac{E_1}{\sigma_k}}$ 、 m は實驗係數とする。

圖-1. $\sigma_D \sim \epsilon$ 曲線圖 構造用鋼材

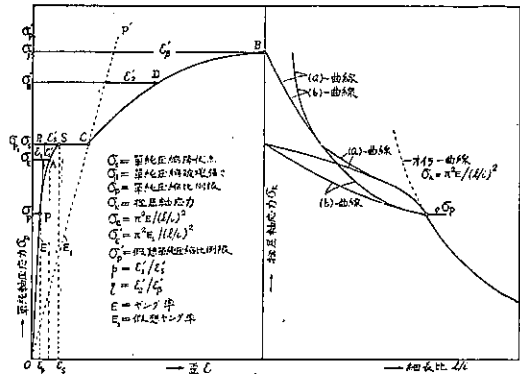
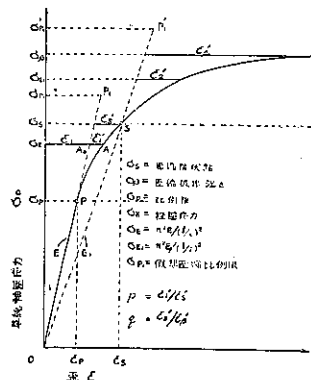


圖-2.

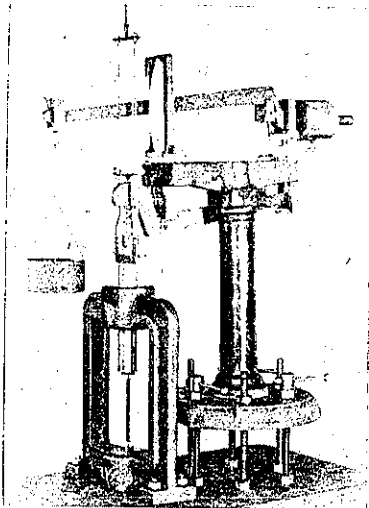


2) 濱住松二郎：金属 179 頁 (1935).
 3) 山口 昇, 最上武雄：材料力学. 物理學. 岩波講座 66 頁 64 頁 (昭 14. 4. 27).
 黒田正夫：Sc Pap. I. P. C. R., 17 (1931); 19 (1932); 20 (1932).
 * J. Fritsche: (5a) $\epsilon_{pl} = \epsilon_{plF} \cdot \frac{\eta}{\eta_F}$, (5b) $\epsilon_{pl} = \epsilon_{plF} \left(\frac{\eta}{\eta_F}\right)^3$, $\eta = \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_P}$, $\eta_F = \frac{\sigma_F - \sigma_P}{\sigma_P}$. Bild 4.

(2) 抗壓材の安定： 壓縮材が軸壓力を受け、これが真直である際の軸應力を考察し、正に挫屈せんとする手前に於ける軸應力を考察した上記の諸式の與ふる値は、抗壓材の安定の限度を示すものとなし得るであらう。

4. 壓縮試験装置

圖-3. 壓縮試験装置



壓縮装置は圖-3 の如くミハエリス型セメント抗張試験器に改造を施し、二重槓杆式に依つて荷重の 40 倍が試験片に作用し、供試體取付け用として別に壓縮用の杵を鑄造して軸壓力が作用する様に試みたのである。軸壓縮用のシャフトと槓杆との間には、其の長さを自由に調節し得る螺旋の棒を挿入して加重に依る槓杆回轉のために、壓縮用杵に回轉を生ぜざる様に考慮を拂つたのである。供試體壓縮用のシャフトの頭部に取り付けたる琴絲の他端は上空に設置したるボールベアアの滑車を通り、壓縮の際の初死荷重と釣合ふ荷重をその 1 端に連結し、以つて載荷重の 40 倍が正しく試験片に作用する様に工夫を試み且つ壓縮當初の死荷重の作用するのを除くように考慮を拂つた。

圖-5. 彈性係數の測定 (檜材)

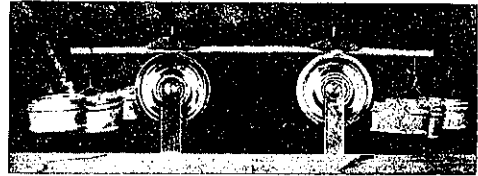
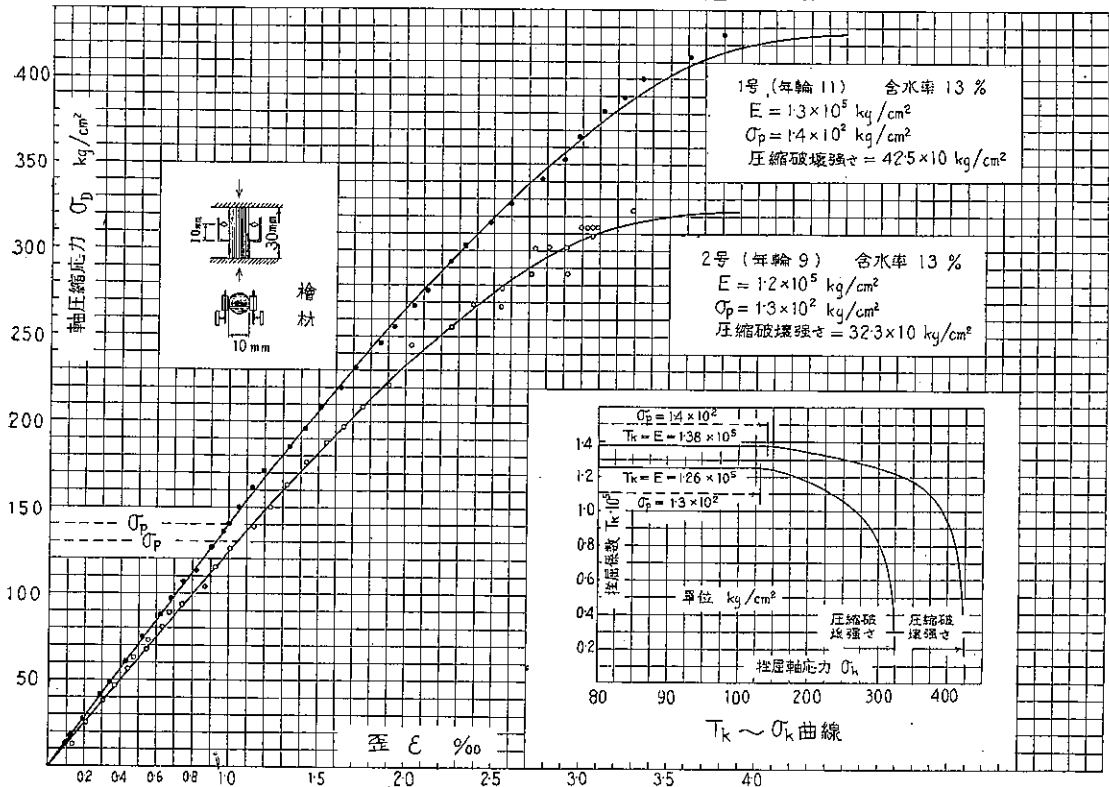


圖-4. $\sigma_D \sim \epsilon$ 曲線 (檜材)



5. 壓縮應力～歪曲線圖

圖-4 の 2 號は $\sigma = 190 \text{ kg/cm}^2$ から毎荷重 5 分間放置して筒筒の現象を考慮した場合である。圖-6, 7, 8, 9, は直径 11.5 mm 高さ 30 mm の圓柱に、毎荷重 5 分毎に壓縮したる場合の實内力～歪圖を $\sigma_D = \sigma_0^*(1 - \epsilon)$ で算定したものである。資料は獨逸製 Merck の標準型で、壓縮試験より得たる値は圖-6~9 及 21 に示した通りである。鉛の性質は中原氏が研究された。

6. 抗壓材の安定

(1) 抗壓材の壓縮應力と撓み；圖-3 の壓縮裝置の上方の横杆の中央に指針を取付け、その脇きに目盛を取付けて置けば、横杆の沈降従つてシャフトの沈下を直ちに讀む事が出来る。一般に $\sigma < \sigma_k$ にありては、荷重を増しても殆んど微小の讀みを表はすのみである。従つて柱軸は殆んど真直と見做し得るのである。 σ が σ_k に接近し始めて讀みが増大し遂に屈折する。この現象は塑性領域でも觀察し得るのである。

(2) $\sigma_k \sim l/i$ の關係； $\sigma \sim l/i$ 曲線圖に於ける (a)~曲線の σ_k は (2) 式若しくは (7) 式より計算したる値を表し、(b)~

圖-6. $\sigma_D \sim \sigma \epsilon$ 曲線圖 鉛標準型

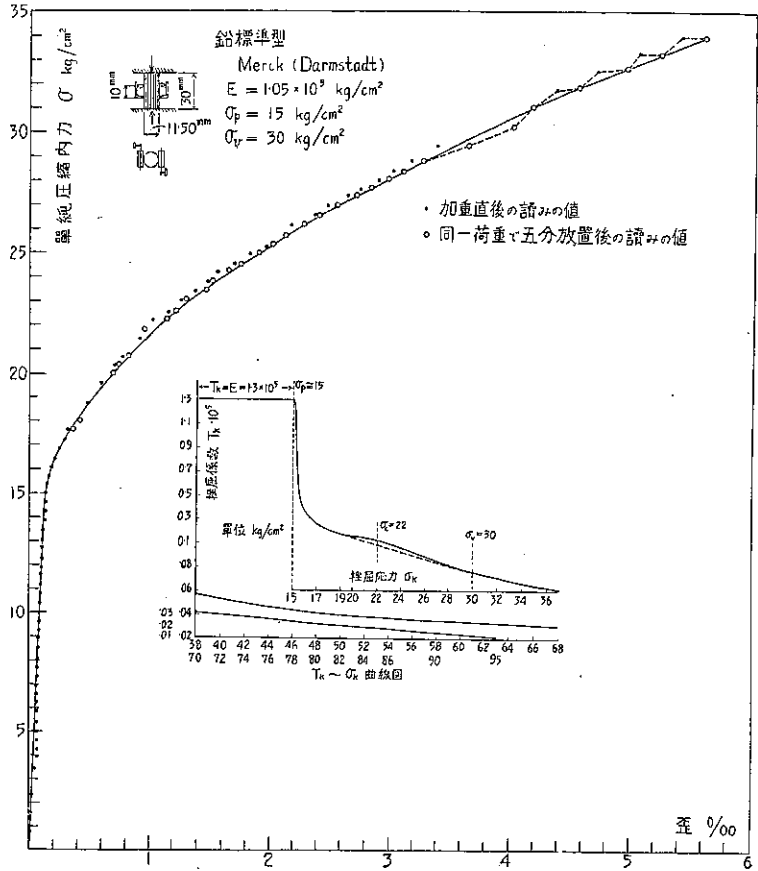
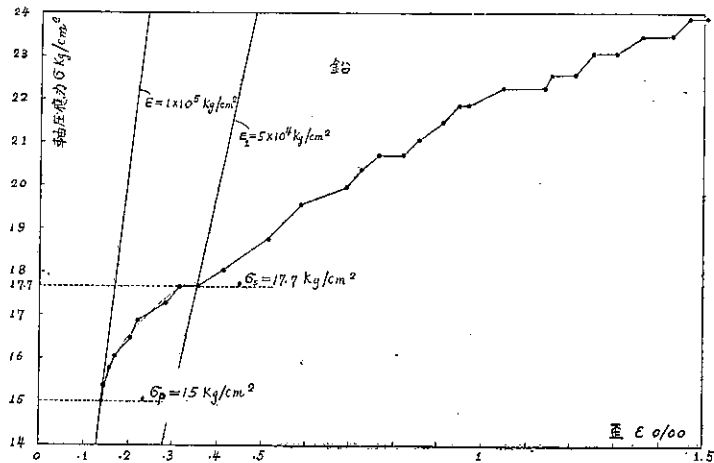


圖-7. $\sigma_D \sim \sigma$ 曲線圖 鉛 (Merck)



4) 中原益次郎氏：鉛の機械的性質とその塑性理論 (昭 10. 4. 20)

* σ_0 = 荷重/斷面積。

圖-8. $\sigma_D \sim \varepsilon$ 曲線圖 鉛 (Merck)

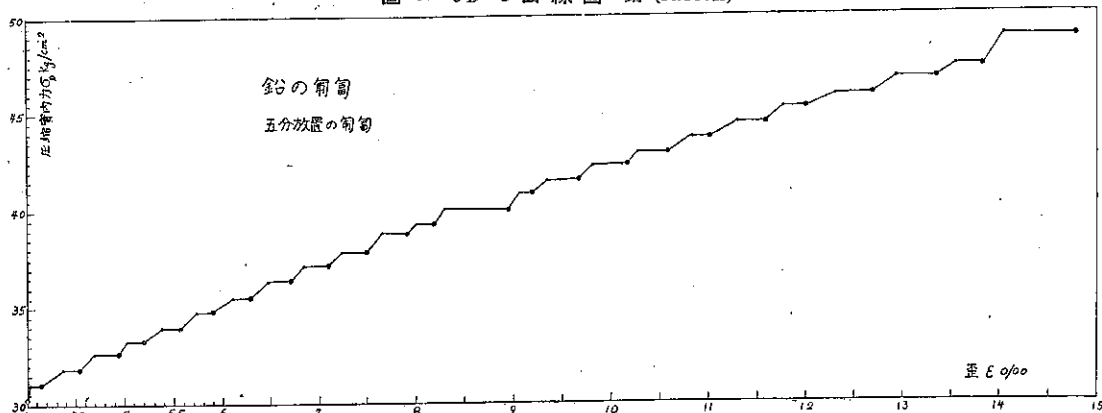


圖-9. $\sigma_D \sim \varepsilon$ 曲線圖

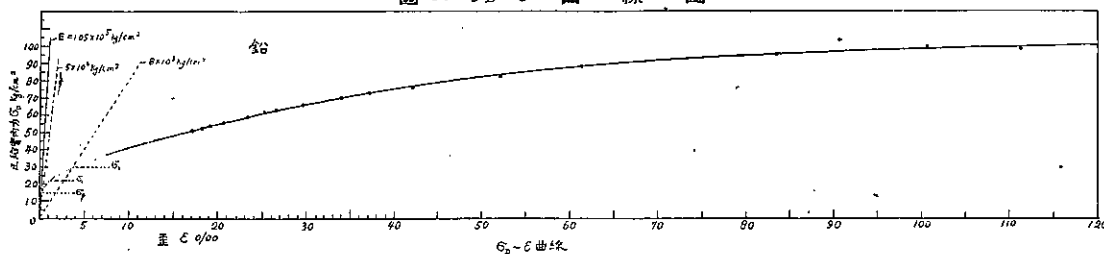


圖-10. (a) 鉛壓縮試片の壓縮前後の状態

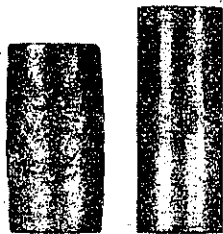
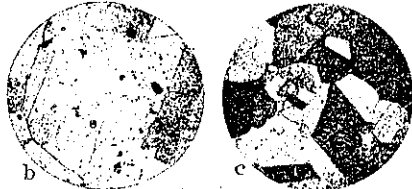


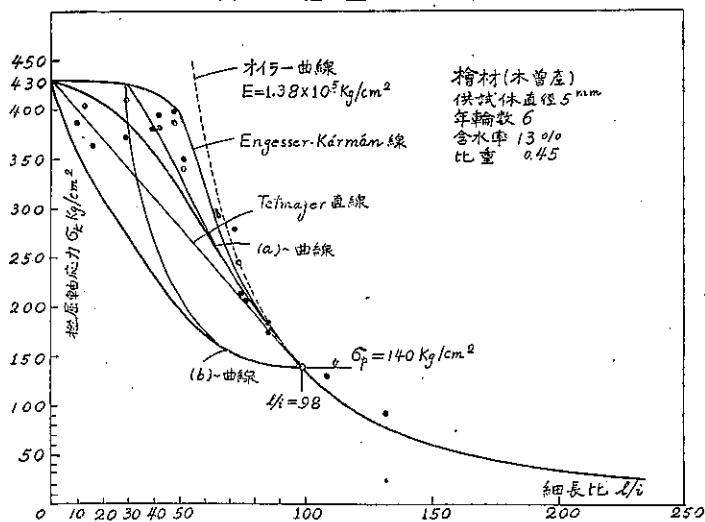
圖-10. (b) 鉛 (Merck) 標準型* よりなる試片の試験前の顕微鏡寫眞 ×400

圖-10. (c) 同じく試片が $\sigma_b = 100 \text{ kg/cm}^2$ を受けたる後ちのもの ×150 共に鹽化第二鐵研薄溶液で腐蝕したものの



曲線の σ_k は (3) 式若しくは (8) 式より求めた値を表した。 l/i は何れも $n=m=1$ とした場合である。尙木材では σ_s は存在しないから、公式の σ_s の代りに假りに σ_b を用ひ計算した。

圖-12. 檜抗壓材の $\sigma_k \sim l/i$



* 試片を 100 C の流動パラフィン油に 2 時間浸して焼鈍し、そのままで常温に降るまで放置し、其の後常温自然焼鈍と再結晶を行せた標準型の試片で鉛試片はすべて東北帝大金属材料研究所の試作によるものであり、圖 10 (b)~ (c) は同所の御厚意に預つたものである。

(a) 檜抗壓材の安定, 圖-11 は 圖-4 を用ひて計算したもので●點は著者の試験値である。(a)~曲線は Tetmajer 線と Engesser-Kármán 線との中間を通り試験値のやや下位を通過するので, (a)~曲線は木檜抗壓材の安定限界を表はしてゐると見ることが出来る。(b)~曲線は Tetmajer 線より下位を通過する。檜柱の $\sigma_k \sim l/i$ 線は圖の如く Euler 曲線と可なり接近してゐるのは檜材が弾性に富むからであらう。

圖-12. 檜抗壓材の破壊状態

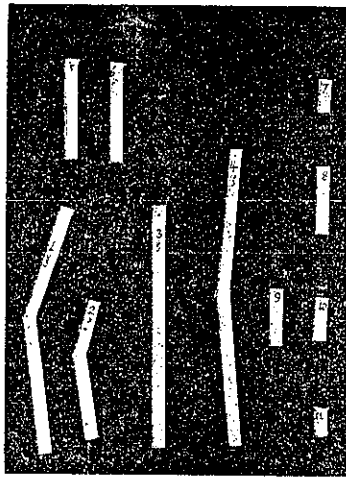


圖-13. 檜抗壓材の破壊状態

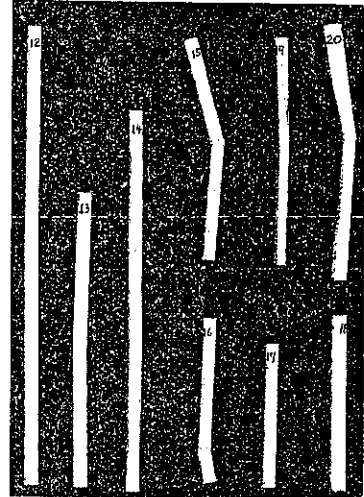


圖-14は上下兩端面が最初に破壊して來て終に倒れる場合である。圖-16 は檜-1f 號を $\sigma = 300 \text{ kg/cm}^2$ 迄荷重を増したるに撓み出したから直ちに荷重を取り去つて見た。然るに中央に多少の残留歪形を殘し, 弾性的のために殆んど元の様に眞直になつた。これを再試験して $\sigma = 306 \text{ kg/cm}^2$ として σ_k に接近した際の狀態である。(以下寫真に於ける σ は其の狀態での作用應力である)

圖-18, 19, 20. は $l = 168.2 \text{ mm}$, $d = 5.13 \text{ mm}$, $l/i = 132 > 98$ の長柱にして, $\sigma = 91 \text{ kg/cm}^2$ に達して荷重を取去れば試片は直ちに眞直になるので弾性限界にあることが判る。次に取去りたる荷重を作用せしめ, 更に 9 gr 加重して $\sigma = 93 \text{ kg/cm}^2$ とせしも殆んど前と同様の撓みであつた。更に $\sigma = 94 \text{ kg/cm}^2$ に増した處が圖-20 のやうに曲り出し, σ_k に達してゐるのである。Euler 現象に關して興味ある寫真と思ふ。尚荷重を $l = 65 \text{ mm}$, $d = 5.13 \text{ mm}$, $l/i = 51.5$ として $\sigma = 306 \text{ kg/cm}^2$ に達してゐるのである。Euler 現象に關して興味ある寫真と思ふ。尚荷重を $l = 90 \text{ mm}$, $d = 5.0 \text{ mm}$, $l/i = 72$ として $\sigma = 242 \text{ kg/cm}^2$ に達してゐるのである。

圖-18. (檜 12 號) $\sigma = 91 \text{ kg/cm}^2$ 荷重 = 472 gr
 圖-19. (檜 12 號) $\sigma = 93 \text{ kg/cm}^2$ 荷重 = 481 gr
 圖-20. (檜 12 號) $\sigma = 94 \text{ kg/cm}^2$ 荷重 = 490 gr

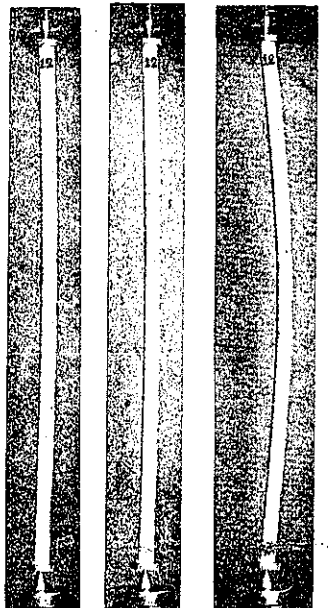
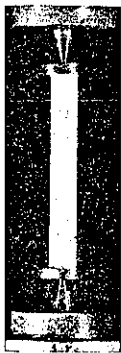


圖-14. (檜 5 號)
 $l = 37 \text{ mm}$
 $d = 5.09 \text{ mm}$
 $l/i = 29$
 $\sigma = 368 \text{ kg/cm}^2$



取去れば圖-15 のやうに弾性破損せし個所丈が永久歪を殘し, 他の部分は完全に元に復してゐるのが判る。(b) 鉛 (Merck) 抗壓材の安定, 圖-6, 7, 8, 9, の如き $\sigma_D \sim \epsilon$ 實驗曲線より $\sigma_k \sim l/i$ 曲線を求めんと 圖-

圖-15. 抗壓材端面支持鐵物

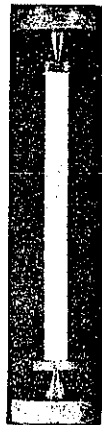
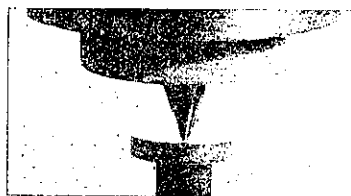


圖-16. (檜 18 號) $l = 65 \text{ mm}$, $d = 5.13 \text{ mm}$, $l/i = 51.5$, $\sigma = 306 \text{ kg/cm}^2$
 圖-17. (檜 3 號) $l = 90 \text{ mm}$, $d = 5.0 \text{ mm}$, $l/i = 72$, $\sigma = 242 \text{ kg/cm}^2$

21. の如くなる。

$l/i \approx 260 \sim 110$ では、圖ではやゝ水平に近く $l/i \approx 100$ より次第に上昇してゐる。●點は著者の試験値にして、同じ l/i の點で上位にあるものは 5-6 分前後の短時間で加重が終了した場合の値にして、この際は匍匐の影響を受けることが少いから、前述の如く匍匐の影響を相當考慮したる場合

の $\sigma_D \sim \epsilon$ 曲線より求めたる圖 21. に於て少しく高く出た。之に反し下位に存する點は加重時間に 30 分-1 時間を要したものである。

圖-21. 抗壓材の鉛 $\sigma_K \sim l/i$ 曲線

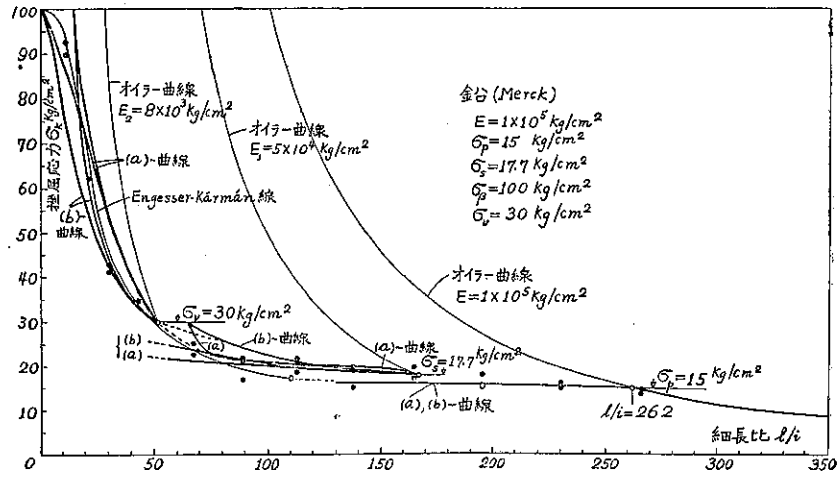


表-1.

番號	1	2	3	4	5	6
鉛號	5	10	16 ₁	2	1	4
l mm	170	110	124	38	111	170
d mm	4.96	4.97	3	4.9	4.96	4.96
l/i	137	88.6	165	31	88.7	137
σ_K kg/cm ²	18	21	17	41	17	15

表-2.

番號	1	2	3	4
鉛號	16	15	17 ₁	18 ₁
l mm	124	146.5	172.5	200
l/i	165	195	230	266
σ_K kg/cm ²	17	18	15	14

圖-22. 鉛抗壓材の挫屈後の状態

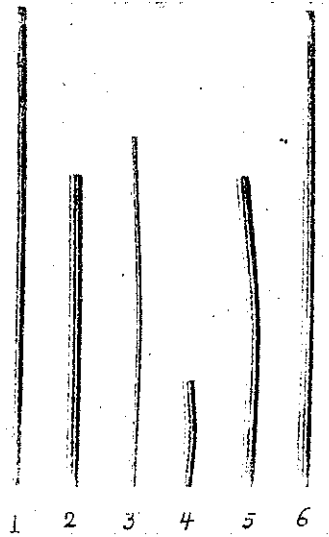


圖-23. 鉛抗壓材挫屈後の状態



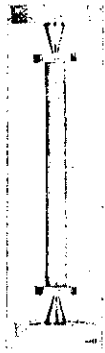
圖-25. は作用應力 $\sigma = 25$ kg/cm² で殆ど撓みを認め難き程度に眞直であることを示してゐる。 $\sigma (25$ kg/cm²) \rightarrow $\sigma_K (\approx 26$ kg/cm²) となりて曲り出せば直ちに挫屈するものである。

(c) 抗壓構造用鋼材の安定、Roš 教授による $\sigma_D \sim \epsilon$ 曲線⁹⁾より (a), (b)-曲線を畫く時には、圖-28. の如くなる。圖に示した●點は Roš 教授の實驗値である。(a) 曲線は Tetmajer 線の上位を通り、Engesser-Kármán 線と殆んど接近してゐる。(b)-曲線は Tetmajer 線の下位を通る。圖より (a), (b)-曲線は何れも抗壓構造用鋼材の安定の限度を示してゐると見ることが出來よう。

5) M. Roš: International Association for Bridge and Structural Engineering 1st Congress Paris (1932.)

圖-24.
(鉛 11 號)

$l = 53 \text{ mm}$
 $d = 4.99 \text{ mm}$
 $l/i = 42.5$
 $\sigma_K = 35 \text{ kg/cm}^2$
急加重挫屈後の状態



7. 結

圖-25.
(鉛 12 號)

$l = 83.5 \text{ mm}$
 $d = 4.99 \text{ mm}$
 $l/i = 67$
 $\sigma = 25 \text{ kg/cm}^2$
挫屈前の状態



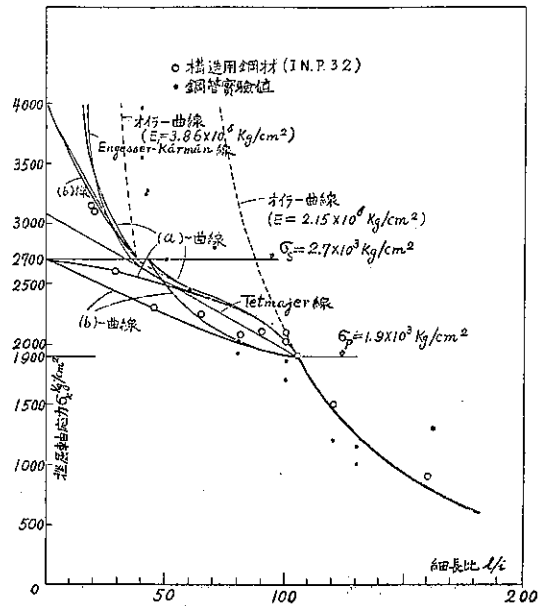
ひ

圖-26.
(鉛 4 號)

$l = 170 \text{ mm}$
 $d = 4.76 \text{ mm}$
 $l/i = 137$
 $\sigma_K = 18 \text{ kg/cm}^2$
(急加重の場合)



圖-27. $\sigma_K \sim l/i$ 曲線 (構造用鋼材)



本論文で考察を試みたる事項は次の如くである。

(1) 真直なる不完全弾性抗圧材が軸圧力を受けて、こ

れが僅かに撓み出すや、直ちに挫屈する。概ね $\sigma_K > \sigma_D$ 以上に於ても尚 Euler 現象が残留することを試験的に觀察された。従つて軸圧力を受ける柱が真直である場合の軸応力を取扱つて、 $\sigma_K \sim l/i$ の關係を近似的に算定して、抗壓材安定の限度を知ることが出来るようである。(2) 塑性材料の抗壓材では匍匐の影響を受け、軸圧力が σ_K に次第に接近しつつある際には、匍匐が σ_K の値に影響して、或る荷重の儘、或る時間放置する時には、挫屈する場合がある。(3) 抗壓材の降伏圏の状態に依つて $\sigma_K > \sigma_D$ なる σ_K と l/i との關係は著しく異なるものである。例へば檜材と鉛材とに於けるが如し、その相違する點に就て論述した。(4) 比較的に弾性に富む不完全弾性材料よりの抗壓材の短柱、例へば檜柱は、著者試験に際して、概念的に云ひば大凡 $l/i \cong 30$ 程度以下のもので殆んど真直のまゝで、遂には荷重のために上下の端面が破壊されて倒れ出すものである。これに反して塑性材料の抗壓材の短柱、例へば鉛柱では、著者試験の場合、例へば $l/i \cong 50$ 程度以下の場合にありては、或る荷重以上更らに荷重を増せば加重と共にその曲りが多少増すのを認められて、或る曲りを示すに至つて挫屈するものである。それ以上程度の長き柱にありては、微小の撓みが現れ出すと直ちに挫屈する。(5) 挫屈後に荷重を取去れば弾性部分は殆んど真直に元に復し、塑性變形部分のみが永久歪を受けて、歪を残してゐる。(6) 抗壓材の軸応力 σ が σ_K を越せば、檜材柱では普通は引張のために中央或はその近くで破斷され、極く短き柱では端面が壓縮破壊を受ける。鉛抗壓材では僅かに彎曲するや直ちに挫屈して圖-22, 23 の如き形で倒れる。短きものは或る程度の曲りを生じ、極めて短きものは可なり彎曲した上で柱端面が壓縮破壊して挫屈するに至る。

終りに臨み、本論文は東京帝大工學部土木工學教室の御好意にて同教室に於て勉強するの便宜を興へさせて戴きたるもので、特に深甚な御親切と御指導を日夜賜つた工學博士田中豊先生並に御指導を仰ぎたる諸先生に謹んで満腔の謝意を表する次第である。

尙本題に對して財團法人齋藤報恩會より費用の補助を受けたもので感謝の意を表する。