

論 說 報 告

第 26 卷 第 2 號 昭 和 15 年 2 月

眞直なる多格間或は中間剛支點を有する多徑間連續柱の 挫屈強度に關する計算理論竝にそれが二、三の簡易 計算法に就て

會 員 金 俊 三*

要旨 本文は第一部に於て任意の中間縱等布荷重と共に中間縱集中荷重をも負擔する連續柱の挫屈強度の一般的解法を試み、次に其の特殊な場合として中間縱集中荷重のみを負擔する連續柱を取扱つた。而も之を著者の假稱する第一種及第二種連續柱の夫々端結條件の 5 個の場合に就てなした。第二部に於ては第一部理論による計算例を行ひ、最後に第三部に於て第一部理論より條件方程式への又其の最小根の計算の際の勞力を軽減せむが爲に二、三の簡便法を提案した。

目 次

序 言	重のみに因る挫屈
第一部 一般理論	第三節 端結條件第一場合の一格間柱の縱集中端荷重及縱等布荷重に因る挫屈
第一章 連續柱の挫屈條件	第二章 荷重條件 $w=0$ が全長に涉つて成立する場合の計算例
第二章 全格間或は全徑間に涉り荷重條件 $w \neq 0$ が成立する連續柱	第一節 端結條件第一場合の第一種二格間連續柱の挫屈
第一節 函數の誘導	第二節 端結條件第一場合の第二種二徑間連續柱の挫屈
第二節 挫屈條件	第三節 前二節以外の端結條件の場合の二格間連續柱に關する挫屈條件方程式
第三節 挫屈限界荷重	第三部 挫屈條件誘導及最小根計算に關する簡便法
第三章 全格間或は全徑間に涉り荷重條件 $w \neq 0$ が成立する連續柱	第一章 第二種連續柱の挫屈條件方程式を求むる簡便法
第一節 函數の誘導	第二章 最小根の近似値算出に關する簡便法
第二節 挫屈條件	第一節 第一種連續柱
第三節 挫屈限界荷重	第二節 第二種連續柱
第二部 一般理論に依る計算例	結 語
第一章 荷重條件 $w \neq 0$ が成立する場合の計算例	
第一節 端結條件第一場合の一格間柱の縱等布荷重のみに因る挫屈	
第二節 端結條件第二場合の一格間柱の縱等布荷	

序言 連續柱挫屈強度の精確なる解法は屢々發表せられた¹⁾。更に近似的解法も種々發見せられてゐる²⁾。特に此の種近似的解法の變斷面或は中間彈性支點を有する柱に對する應用に就ては近時更に一步を進めた様である³⁾。

著者は本研究に於て縱集中荷重の外に縱等布荷重をも負擔する第一種及第二種連續柱の、起り得べき端結⁴⁾條件の各場合に就て精確なる方法による一般解法を試みた。近似的解法は力學的性質の複雑なるかゝる構造物では、挫屈彈性曲線の豫想外なる形により思はざる不覺をとることが有り得るからである。⁵⁾

茲で謂ふ第一種及第二種とは夫々中間剛支點を全然有せざるか或はこれを有するかの別を表はす爲めに、著者が假に使用した名稱である。

* 工學士 北海道帝國大學助教授

第一部 一般理論

第一章 連續柱の捩屈條件

第二章で明瞭になるが連続柱の捩屈弾性曲線を表はす基本微分方程式は四次であるから、 n -格間又は徑間を有つ連續柱ではその一般解の未定係数が $4n$ 個存在する。従つて此の未知量を決定すべき端結の條件及中間格點の條件合して矢張り $4n$ 個必要である。

(a) 端結條件 起り得べき端結條件は次の 4 種の條件の孰れか 4 個の組合せで與へられる。但し y_i は i 番目の格間又は徑間の捩屈弾性曲線の縦距である。又 $i=0, i=n$ は夫々最初或は最終の格點を表はす。

(i) 横方向の變位が零なる條件: $[y_i]_{i=0}=0, [y_i]_{i=n}=0,$

(ii) 角變位が零なる條件: $\left[\frac{dy_i}{dx}\right]_{i=0}=0, \left[\frac{dy_i}{dx}\right]_{i=n}=0,$

(iii) 角變位が自由なる條件: $\left[\frac{d^2y_i}{dx^2}\right]_{i=0}=0, \left[\frac{d^2y_i}{dx^2}\right]_{i=n}=0,$

(iv) 自由端 $i=0$ で横方向の力の總和が零なる條件: $\left[\frac{d^3y_i}{dx^3}\right]_{i=0} = -\left[\xi \frac{dy_i}{dx}\right]_{i=0} \quad (6)$

この最後の條件は次の (b) の (iii) 場合の特殊なる場合である。

(b) 中間格點の條件 中間格點 r の前後の格間又は徑間を夫々 l_r, l_{r+1} とする。

(i) 中間剛支點 r で横方向の變位が零なる條件: $[y_i]_{i=r}^l = 0, [y_i]_{i=r}^{l+1} = 0,$

(ii) 剛支點なき中間格點 $r-1$ で前後の格間の變位が等しき條件: $[y_i]_{i=r-1}^l = [y_i]_{i=r-1}^{l+1},$

(iii) 剛支點なき中間格點 $r-1$ で横方向の力の平衡の條件:

$$E_{r-1}I_{r-1} \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} - P_{r-1} \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = E_r I_r \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{i=r-1}^{l_{r+1}}$$

但し P_{r-1} は格點 $r-1$ に作用する縦集中荷重,

(iv) 格點 r で前後の格間又は徑間の角變位が等しき條件 (剛支點の有無に無關係):

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^l = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{l+1},$$

(v) 格點 r で前後の格間又は徑間の曲げモーメントが等しき條件 (剛支點の有無に無關係):

$$E_r I_r \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^l = E_{r+1} I_{r+1} \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^{l+1}.$$

従つて條件の總數は次の様になる。

第一種連續柱: 端結條件 (a) の (i), (ii), (iii), (iv)..... 條件數=4

中間格點の條件 (b) の (ii), (iv), (v), (iii)..... " = $4(n-1)$

條件の總數= $4n$

第二種連續柱 (但し m は中間剛支點の數):

端結條件 (a) の (i), (ii), (iii), (iv)..... 條件數=4

中間格點の條件の (b) の (i)..... " = $2m$

" (b) の (ii)..... " = $n-1-m$

" (b) の (iii)..... " = $n-1-m$

" (b) の (iv)..... " =n-1

" (b) の (v)..... " =n-1

條件の總數=4n

表-1. 第一種連續柱の條件の表

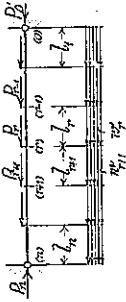


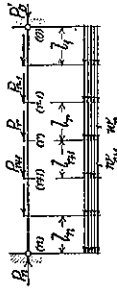
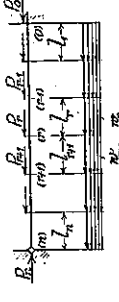

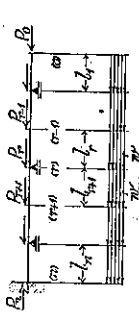
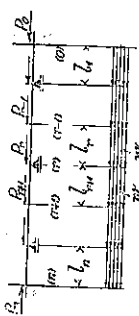
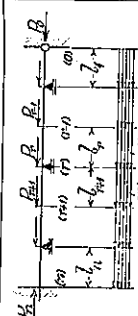
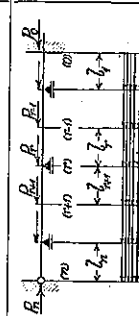
		第一場合	第二場合	第三場合	第四場合	第五場合
端 結 條 件	種類					
	1	$[y]_{i=0}=0$	$[y]_{i=n}=0$	$[y]_{i=0}=0$	$[y]_{i=0}=0$	$[y]_{i=0}=0$
	2	$[y]_{i=n}=0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n}=0$	$[y]_{i=n}=0$	$[y]_{i=n}=0$	$[y]_{i=n}=0$
	3	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0}=0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0}=0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=0}=0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n}=0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=0}=0$
	4	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=n}=0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0} = -\left[\xi \frac{dy}{dx}\right]_{i=0}$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n}=0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0}=0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=n}=0$
條件數=4		4	4	4	4	4
中 間 格 點 の 條 件	1	$[y]_{i=r}^{l_r} = [y]_{i=r}^{l_{r+1}}$	第一場合に同じ	第一場合に同じ	第一場合に同じ	第一場合に同じ
	2	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{l_r} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{l_{r+1}}$				
	3	$E_r I_r \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^{l_r} = E_{r+1} I_{r+1} \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^{l_{r+1}}$				
	4	$E_r I_r \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{i=r}^{l_r} - P_r \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{l_r} = E_{r+1} I_{r+1} \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{i=r}^{l_{r+1}}$				
條件數=4n-4		4n-4	4n-4	4n-4	4n-4	4n-4
條件總數=4n		4n	4n	4n	4n	4n

表-2. 第二種連續柱の條件の表

		第一場合	第二場合 ⁸⁾	第三場合	第四場合	第五場合
端 結 條 件 の 種 類						
	1	$[y]_{i=0} = 0$	$[y]_{i=n} = 0$	$[y]_{i=0} = 0$	$[y]_{i=0} = 0$	$[y]_{i=0} = 0$
	2	$[y]_{i=n} = 0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n} = 0$	$[y]_{i=n} = 0$	$[y]_{i=n} = 0$	$[y]_{i=n} = 0$
	3	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0} = 0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0} = 0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=0} = 0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n} = 0$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=0} = 0$
	4	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=n} = 0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0} = -\left[\xi \frac{dy}{dx}\right]_{i=0}$	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=n} = 0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=0} = 0$	$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=n} = 0$
		條件數=4	4	4	4	4
中 間 格 點 の 條 件	1	$[y]_{i=r}^{l_r} = 0, [y]_{i=r}^{r_{+1}} = 0$	第一場合 に同じ	第一場合 に同じ	第一場合 に同じ	第一場合 に同じ
	2	$[y]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = [y]_{i=r-1}^{l_r}$				
	3	$E_{r-1}I_{r-1} \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} - P_{r-1} \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = E_r I_r \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r-1}^{l_r}$				
	4	$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{l_r} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{i=r}^{r_{+1}}$				
	5	$E_r I_r \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^{l_r} = E_{r+1} I_{r+1} \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{i=r}^{r_{+1}}$				
		條件總數=4n	4n	4n	4n	4n

これで第一種及第二種連続柱の色々の場合の未知量が決まる筈である。今起り得べき 5 種の端結条件の各場合につき第一種及第二種连续柱の未知量を決定せん爲めに選擇さるべき諸条件を一括して表示すれば表-1 及 表-2 が得られる。

基本微分方程式から l_r 格間の變位の函数が、例へば

$$y_r = A_r F_{r,1}(x) + B_r F_{r,2}(x) + C_r F_{r,3}(x) + D_r F_{r,4}(x)$$

の様になります。表-1 及 表-2 によつて未知量群 $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_r, B_r, C_r, D_r, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n$ は問題に適合して定まるべきも、微分方程式が齊次である爲めに、横變位につき挫屈の條件 $y \neq 0$ を保持せんが爲めには

$$\left. \begin{array}{l} \text{函数 } y_r \text{ を表-1 或は表-2 に代入する} \\ \text{ことによつて得らるゝ方程式群の未知量} \\ A_1, B_1, C_1, D_1, \dots \text{ の係數から成る行列式} \end{array} \right\} = 0$$

なる條件が畢竟必要とされるに至る。之が连续柱の挫屈条件方程式であつて、之を満足せしむる最小根を探究すれば従つて连续柱の挫屈限界荷重が得られるのである。

第二章 全格間或は全徑間に涉り荷重条件 $w \neq 0$ が成立する连续柱

第一節 函数の誘導

今既に 圖-1 の如き连续柱に挫屈が生起したるものと假定し、その一部例へば格間 l_r を其の兩端格點に截切して其の截切柱體の力の平衡を考ふれば(圖-2)、座標軸原點より x の距離にある點 m に作用する曲げモーメントは

$$M_x = M_{r-1} + Q_{r-1}(y_r - \partial_{r-1}) + T_{r-1}x + \int_{l_{r-1}}^{l_r} w_r d\xi (y_r - \partial_{r-1} - \eta).$$

これを $\frac{d^2 y_r}{dx^2} = -\frac{M_x}{E_r I_r}$ なる關係に入れて 1 回微分すれば、

$$-E_r I_r \frac{d^3 y_r}{dx^3} = Q_{r-1} \frac{dy_r}{dx} - T_{r-1} + w_r \frac{dy_r}{dx} (L_r - x).$$

圖-1. 连续柱一般圖

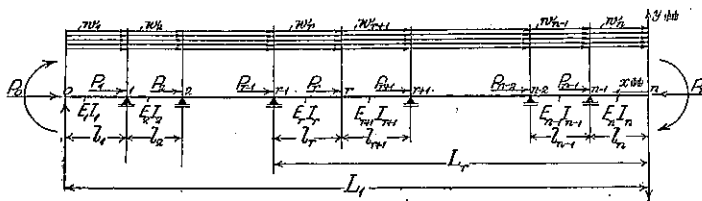
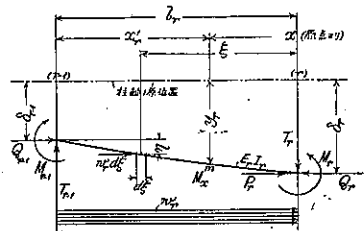


圖-2. 截切柱體部分の平衡



更に 1 回微分する時は不靜定量 T_{r-1} を含まざる次の四次微分方程式を得る。

$$-E_r I_r \frac{d^4 y_r}{dx^4} = [Q_{r-1} + w_r (L_r - x)] \frac{d^2 y_r}{dx^2} - w_r \frac{dy_r}{dx}$$

但し E_r, I_r : 夫々 r 格間の彈性係數及慣性モーメント、

$$L_r = l_n + l_{n-1} + \dots + l_{r-1} + l_r = \sum_{i=n}^r l_i,$$

$$Q_{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} P_i + \sum_{i=1}^{r-1} w_i l_i = \sum_{i=0}^{r-1} P_i + \sum_{i=1}^{r-1} W_i,$$

$$W_i = w_i l_i.$$

} (1a)

或は次の如くに書き換へることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 p_r}{d\xi_r^3} + b_r \xi_r \frac{d p_r}{d\xi_r} + b_r p_r &= 0, \\ \frac{d y_r}{d x} &= p_r, \\ \xi_r &= \frac{Q_r - 1}{E_r I_r} + \frac{W_r (L_r - x)}{E_r I_r l_r}, \\ b_r &= \left(\frac{E_r J_r l_r}{W_r} \right)^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

荷重條件 $w_r \neq 0$ が成立する格間に対しては微分方程式 (1) を用ふるも、 $w_r = 0$ なる格間に対しては $b_r = \infty$ となり (1) 式は使用出来ない。かゝる格間に対しては (1a) 式より出發する。上の 2 つが連継柱の問題に関する基本微分方程式である。

微分方程式 (1) の一般解は

$$\left. \begin{aligned} p_r &= A_r p_{I,r} + B_r p_{II,r} + C_r p_{III,r}, \\ A_r, B_r, C_r &: \text{未定係數}, \\ p_{I,r} &= 1 - \frac{b_r \xi_r^3}{3,2} + \frac{b_r^2 \xi_r^6}{6,5,3,2} - \frac{b_r^3 \xi_r^9}{9,8,6,5,3,2} + \frac{b_r^4 \xi_r^{12}}{12,11,9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r} &= \xi_r - \frac{b_r \xi_r^4}{4,3} + \frac{b_r^2 \xi_r^7}{7,6,4,3} - \frac{b_r^3 \xi_r^{10}}{10,9,7,6,4,3} + \frac{b_r^4 \xi_r^{13}}{13,12,10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r} &= \xi_r^2 - \frac{b_r \xi_r^5}{5,4} + \frac{b_r^2 \xi_r^8}{8,7,5,4} - \frac{b_r^3 \xi_r^{11}}{11,10,8,7,5,4} + \frac{b_r^4 \xi_r^{14}}{14,13,11,10,8,7,5,4} \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

従つて條件の爲めに必要なる諸函數は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \int p_r dx = -\sqrt{b_r} [A_r p_{I,r}^{(0)} + B_r p_{II,r}^{(0)} + C_r p_{III,r}^{(0)} + D_r], \\ A_r, B_r, C_r, D_r &: \text{未定係數}, \\ p_{I,r}^{(0)} &= \xi_r - \frac{b_r \xi_r^4}{4,3,2} + \frac{b_r^2 \xi_r^7}{7,6,5,3,2} - \frac{b_r^3 \xi_r^{10}}{10,9,8,6,5,3,2} + \frac{b_r^4 \xi_r^{13}}{13,12,11,9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r}^{(0)} &= \frac{\xi_r^2}{2} - \frac{b_r \xi_r^5}{5,4,3} + \frac{b_r^2 \xi_r^8}{8,7,6,4,3} - \frac{b_r^3 \xi_r^{11}}{11,10,9,7,6,4,3} + \frac{b_r^4 \xi_r^{14}}{14,13,12,10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r}^{(0)} &= \frac{\xi_r^3}{3} - \frac{b_r \xi_r^6}{6,5,4} + \frac{b_r^2 \xi_r^9}{9,8,7,5,4} - \frac{b_r^3 \xi_r^{12}}{12,11,10,8,7,5,4} + \frac{b_r^4 \xi_r^{15}}{15,14,13,11,10,8,7,5,4} \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_r}{d x^2} &= -\frac{1}{\sqrt{b_r}} [A_r p_{I,r}^{(1)} + B_r p_{II,r}^{(1)} + C_r p_{III,r}^{(1)}], \\ A_r, B_r, C_r &: \text{未定係數}, \\ p_{I,r}^{(1)} &= -\frac{b_r \xi_r^3}{2} + \frac{b_r^2 \xi_r^6}{5,3,2} - \frac{b_r^3 \xi_r^9}{8,6,5,3,2} + \frac{b_r^4 \xi_r^{12}}{11,9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r}^{(1)} &= 1 - \frac{b_r \xi_r^3}{3} + \frac{b_r^2 \xi_r^6}{6,4,3} - \frac{b_r^3 \xi_r^9}{9,7,6,4,3} + \frac{b_r^4 \xi_r^{12}}{12,10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r}^{(1)} &= 2\xi_r - \frac{b_r \xi_r^4}{4} + \frac{b_r^2 \xi_r^7}{7,5,4} - \frac{b_r^3 \xi_r^{10}}{10,8,7,5,4} + \frac{b_r^4 \xi_r^{13}}{13,11,10,8,7,5,4} \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{d^3 y_r}{dx^3} = + \frac{1}{b_r} [A_r p_{I,r}^{(2)} + B_r p_{II,r}^{(2)} + C_r p_{III,r}^{(2)}],$$

但し

$$\begin{aligned} p_{I,r}^{(2)} &= -b_r \zeta_r + \frac{b_r^2 \zeta_r^4}{3,2} - \frac{b_r^3 \zeta_r^7}{6,5,3,2} + \frac{b_r^4 \zeta_r^{10}}{9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r}^{(2)} &= -b_r \zeta_r^3 + \frac{b_r^2 \zeta_r^6}{4,3} - \frac{b_r^3 \zeta_r^9}{7,6,4,3} + \frac{b_r^4 \zeta_r^{11}}{10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r}^{(2)} &= 2 - b_r \zeta_r^3 + \frac{b_r^2 \zeta_r^6}{5,4} - \frac{b_r^3 \zeta_r^9}{8,7,5,4} + \frac{b_r^4 \zeta_r^{12}}{11,10,8,7,5,4} \dots. \end{aligned} \quad (5)$$

上の函数の要素は又次の如くに表はせる。

$$p_{I,r} = p'_{I,r}, \quad p_{II,r} = \zeta_r p'_{II,r}, \quad p_{III,r} = \zeta_r^2 p'_{III,r},$$

但し

$$\begin{aligned} p'_{II,r} &= 1 - \frac{z_r}{4,3} + \frac{z_r^2}{7,6,4,3} - \frac{z_r^3}{10,9,7,6,4,3} + \frac{z_r^4}{13,12,10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p'_{III,r} &= 1 - \frac{z_r}{5,4} + \frac{z_r^2}{8,7,5,4} - \frac{z_r^3}{11,10,8,7,5,4} + \frac{z_r^4}{14,13,11,10,8,7,5,4} \dots, \\ z_r &= b_r \zeta_r^3. \end{aligned} \quad (2a)$$

$$p_{I,r}^{(0)} = \zeta_r p_{I,r}^{(0)'}, \quad p_{II,r}^{(0)} = \zeta_r^2 p_{II,r}^{(0)'}, \quad p_{III,r}^{(0)} = \zeta_r^3 p_{III,r}^{(0)'}$$

但し

$$\begin{aligned} p_{I,r}^{(0)'} &= 1 - \frac{z_r}{4,3,2} + \frac{z_r^2}{7,6,5,3,2} - \frac{z_r^3}{10,9,8,6,5,3,2} + \frac{z_r^4}{13,12,11,9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r}^{(0)'} &= \frac{1}{2} - \frac{z_r}{5,4,3} + \frac{z_r^2}{8,7,6,4,3} - \frac{z_r^3}{11,10,9,7,6,4,3} + \frac{z_r^4}{14,13,12,10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r}^{(0)'} &= \frac{1}{3} - \frac{z_r}{6,5,4} + \frac{z_r^2}{9,8,7,5,4} - \frac{z_r^3}{12,11,10,8,7,5,4} + \frac{z_r^4}{15,14,13,11,10,8,7,5,4} \dots \end{aligned} \quad (3a)$$

$$p_{I,r}^{(1)} = b_r \zeta_r^2 p_{I,r}^{(1)'}, \quad p_{II,r}^{(1)} = p_{II,r}^{(1)'}, \quad p_{III,r}^{(1)} = \zeta_r p_{III,r}^{(1)'}$$

但し

$$\begin{aligned} p_{I,r}^{(1)'} &= -\frac{1}{2} + \frac{z_r}{5,3,2} - \frac{z_r^2}{8,6,5,3,2} + \frac{z_r^3}{11,9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{III,r}^{(1)'} &= 2 - \frac{z_r}{4} + \frac{z_r^2}{7,5,4} - \frac{z_r^3}{10,8,7,5,4} + \frac{z_r^4}{13,11,10,8,7,5,4} \dots \end{aligned} \quad (4a)$$

$$p_{I,r}^{(2)} = b_r \zeta_r p_{I,r}^{(2)'}, \quad p_{II,r}^{(2)} = b_r \zeta_r^2 p_{II,r}^{(2)'}, \quad p_{III,r}^{(2)} = 2 - b_r \zeta_r^3 p_{III,r}^{(2)'}$$

但し

$$\begin{aligned} p_{I,r}^{(2)'} &= -1 + \frac{z_r}{3,2} - \frac{z_r^2}{6,5,3,2} + \frac{z_r^3}{9,8,6,5,3,2} \dots, \\ p_{II,r}^{(2)'} &= -1 + \frac{z_r}{4,3} - \frac{z_r^2}{7,6,4,3} + \frac{z_r^3}{10,9,7,6,4,3} \dots, \\ p_{III,r}^{(2)'} &= 1 - \frac{z_r}{5,4} + \frac{z_r^2}{8,7,5,4} - \frac{z_r^3}{11,10,8,7,5,4} + \dots \end{aligned} \quad (5a)$$

函数 (2a) 及 (5a) の間には次の關係がある。

$$p'_{I,r} = -p_{I,r}^{(2)'}, \quad p'_{II,r} = -p_{II,r}^{(2)'}, \quad p'_{III,r} = p_{III,r}^{(2)'}$$

而して之等の級数は何れも収斂級数である。

第二節 捩屈条件

表-1 及表-2 によつて明かな様に、端結条件は第一種連続柱及第二種連続柱に共通であり、中間格点の条件は上の意味では共通ではないが、同一種連続柱の各場合に就いては共通である。従つて下記3種の条件は第一節で求めた函数で表はせば、問題の場合の捩屈条件は決まる。

- (i) 端結条件
- (ii) 第一種連続柱中間格点の条件
- (iii) 第二種連続柱中間格点の条件

この様にして表-3~5 が求められる。表の行番数 1, 2, 3, 4, 5 は表-1~2 の条件番数を表はす。

表-3. 端結条件のマトリックスの表

		A_1	B_1	C_1	D_1	...	A_n	B_n	C_n	D_n
第一 場 合	1	$p_{I,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(0)}(L_1)$	1	0...	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(0)}(0)$	$p_{II,n}^{(0)}(0)$	$p_{III,n}^{(0)}(0)$	1
	3	$p_{I,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(1)}(L_1)$	0	0...	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(1)}(0)$	$p_{II,n}^{(1)}(0)$	$p_{III,n}^{(1)}(0)$	0
第 二 場 合	1	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(0)}(0)$	$p_{II,n}^{(0)}(0)$	$p_{III,n}^{(0)}(0)$	1
	2	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(1)}(0)$	$p_{II,n}^{(1)}(0)$	$p_{III,n}^{(1)}(0)$	0
	3	$p_{I,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(1)}(L_1)$	0	0...	0	0	0	0
	4	0	0	$\frac{2^9}{b_1}$	0	0...	0	0	0	0
第 三 場 合	1	$p_{I,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(0)}(L_1)$	1	0...	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(0)}(0)$	$p_{II,n}^{(0)}(0)$	$p_{III,n}^{(0)}(0)$	1
	3	$p_{I,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(1)}(L_1)$	0	0...	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(1)}(0)$	$p_{II,n}^{(1)}(0)$	$p_{III,n}^{(1)}(0)$	0
第 四 場 合	1	$p_{I,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(0)}(L_1)$	1	0...	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(0)}(0)$	$p_{II,n}^{(0)}(0)$	$p_{III,n}^{(0)}(0)$	1
	3	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(1)}(0)$	$p_{II,n}^{(1)}(0)$	$p_{III,n}^{(1)}(0)$	0
	4	$p_{I,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(1)}(L_1)$	0	0...	0	0	0	0
第 五 場 合	1	$p_{I,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(1)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(1)}(L_1)$	1	0...	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(1)}(0)$	$p_{II,n}^{(1)}(0)$	$p_{III,n}^{(1)}(0)$	1
	3	$p_{I,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{II,1}^{(0)}(L_1)$	$p_{III,1}^{(0)}(L_1)$	0	0...	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0...	$p_{I,n}^{(0)}(0)$	$p_{II,n}^{(0)}(0)$	$p_{III,n}^{(0)}(0)$	0

未定係数の総数 = $4n$

表-5. 第二種連續柱の中間格點の條件のマトリックスの表 但し $m=$ 剛支點を有する中間格點の數, 格點 (i) は剛支點を有する中間格點, 格點 (i) は剛支點を有せざる中間格點を表はす。

条件数	A_k	B_k	C_k	D_k	A_{k+1}	B_{k+1}	C_{k+1}	D_{k+1}
1	$p_{II,k}^{(0)}(L_{k+1})$	$p_{II,k}^{(0)}(L_{k+1})$	$p_{III,k}^{(0)}(L_{k+1})$	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	$p_{II,k+1}^{(0)}(L_{k+1})$	$p_{III,k+1}^{(0)}(L_{k+1})$	$p_{III,k+1}^{(0)}(L_{k+1})$	1
$n-1-m$	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1-m$	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1$	$p_{II,k}(L_{k+1})$	$p_{II,k}(L_{k+1})$	$p_{III,k}(L_{k+1})$	0	$-p_{II,k+1}(L_{k+1})$	$-p_{III,k+1}(L_{k+1})$	$-p_{III,k+1}(L_{k+1})$	0
$n-1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1$	$c_{II}p_{II,k}^{(1)}(L_{k+1})$	$c_{II}p_{II,k}^{(1)}(L_{k+1})$	$c_{III}p_{III,k}^{(1)}(L_{k+1})$	0	$-\beta c_{II}p_{II,k+1}^{(1)}(L_{k+1})$	$-\beta c_{III}p_{III,k+1}^{(1)}(L_{k+1})$	$-\beta c_{III}p_{III,k+1}^{(1)}(L_{k+1})$	0
$n-1$	0	0	0	0	0	0	0	0

条件数	A_{i+1}	B_{i+1}	C_{i+1}	D_i	A_{i+1}	B_{i+1}	C_{i+1}	D_{i+1}
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1-m$	$\beta p_{II,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$\beta p_{II,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$\beta p_{III,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	β_i	$-p_{II,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	-1
$n-1-m$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{III,i}(L_{i+1})$	0	$-p_{II,i+1}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}(L_{i+1}) + \frac{2c_{II}}{b_{i+1}c_{i+1}}(L_{i+1})$	0
$n-1$	0	0	0	0	0	9	0	0
$n-1$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{III,i}(L_{i+1})$	0	$-p_{II,i+1}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}(L_{i+1})$	0
$n-1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1$	$c_{II}p_{II,i}^{(1)}(L_{i+1})$	$c_{II}p_{II,i}^{(1)}(L_{i+1})$	$c_{III}p_{III,i}^{(1)}(L_{i+1})$	0	$-\beta c_{II}p_{II,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-\beta c_{III}p_{III,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-\beta c_{III}p_{III,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	0

未定係数の總數=4n

表-4. 第一種連續柱の中間格點の條件のマトリックスの表

記號: $\beta_i = \sqrt{\frac{b_i}{b_{i+1}}}$, $\alpha_i = \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}}$

條件數	...	A_i	B_i	C_i	D_i	A_{i+1}	B_{i+1}	C_{i+1}	D_{i+1}	...
$n-1$	1	$\beta_i p_{I,i}^{(0)}(L_{i+1})$	$\beta_i p_{II,i}^{(0)}(L_{i+1})$	$\beta_i p_{III,i}^{(0)}(L_{i+1})$	β_i	$-p_{I,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$-p_{II,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}^{(0)}(L_{i+1})$	-1	$0 \dots$
$n-1$	2	$p_{I,i}(L_{i+1})$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{III,i}(L_{i+1})$	0	$-p_{I,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-p_{II,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	0	$0 \dots$
$n-1$	3	$\alpha_i p_{I,i}^{(1)}(L_{i+1})$	$\alpha_i p_{II,i}^{(1)}(L_{i+1})$	$\alpha_i p_{III,i}^{(1)}(L_{i+1})$	0	$-\beta_i p_{I,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-\beta_i p_{II,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-\beta_i p_{III,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	0	$0 \dots$
$n-1$	4	$p_{I,i}(L_{i+1})$	$p_{II,i}(L_{i+1})$	$p_{III,i}(L_{i+1})$ $\frac{2c_i}{b_i \xi_{i+1}(L_{i+1})}$	0	$-p_{I,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-p_{II,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$	$-p_{III,i+1}^{(1)}(L_{i+1})$ $+\frac{2}{b_{i+1} \xi_{i+1}(L_{i+1})}$	0	$0 \dots$

未定係數の總數=4n

但し一般的に中間格點 (i) における中間格點の條件を表はす

表 3, 4, 5 のマトリックスを組合せて作成される捩屈條件の行列式は一般に次の形に展開され得る。

$$\sum_{(2)}^{(4)^2} (-1)^{D_{(4)}} \cdot \bar{D}_{(4n-4)} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

但し

$D_{(4)}$: 表-3 における終端格間 l_1, l_n のマトリックスより夫々縦の 2 列⁽¹⁰⁾ づつを取つて作らるゝ四次の行列式; 従つて此の項は端結條件の影響のみを表はす。

$\bar{D}_{(4n-4)}$: 捩屈條件の行列式における $D_{(4)}$ の小行列式⁽¹¹⁾ で, 表-4 或は表-5 の要素から成る; 従つて中間格點の條件の影響を表はす項である。

ν : 表-3 の擇ばれた縦の 4 列の要素の, $D_{(4)}$ を得る爲の入替の回數の總和。

$\sum_{(2)}^{(4)^2}$: 行列式 $D_{(4)}$ の可能なる組合せの總數=36.

$\bar{D}_{(4n-4)}$ は第一種, 第二種連續柱の別によることは勿論, 格間或は徑間數に従つても著しくその内容を異にするが, $D_{(4)}$ は中間格點の條件に無關係に 5 種類に限定せられてゐるので, 中間格點の條件の方は一般的に $\bar{D}_{(4n-4)}$ で表はし, 端結條件 $D_{(4)}$ のみを表-3 の函數で表はせば, (6)式に依つてその更に具體的な展開式が得られる。之を上 5 種の各場合に涉つて模型的に一括すれば表-6 を得るのである。我々は表-4, 5 に依て與へられたる問題に適應して $\bar{D}_{(4n-4)}$ を作るときは更に表-6 に依て最後の捩屈條件に到達することが出来るのである。

表-6 の説明:

1) $\bar{D}(A_1 B_1 A_n B_n)$: 表-3 の A_1, B_1, A_n, B_n の 4 列の要素から成る端結條件 $D_{(4)}$ の小行列式 $\bar{D}_{(4n-4)}$ を表はす。

以下之に準ず。

2) 表の上方の欄の $x=L_1$ 及 $x=0$ は, 例示すれば

$$\{ p_{I,1}^{(0)}, p_{II,1}^{(0)}, p_{III,1}^{(0)}, p_{I,1}^{(1)} \}_{x=L_1} \text{ 及 } \{ p_{I,n}^{(0)}, p_{II,n}^{(0)}, p_{III,n}^{(0)}, p_{I,n}^{(1)} \}_{x=0}$$

の意味を表はす一定數値の挿入を示す。

最後に此の表の運用を示す一例として端結條件の第一場合に對する表-6 に依る展開式を求むれば次の如くなる。

相乗の因子	代數和の因子
$(p_{II,1}^{(0)} p_{III,1}^{(1)} - p_{III,1}^{(0)} p_{II,1}^{(1)})_{x=L_1}$	$(p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_1 - (p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_2$
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_3 + (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_4 + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_5 - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_6$	
$-(p_{II,1}^{(0)} \cdot p_{III,1}^{(1)} - p_{III,1}^{(0)} \cdot p_{II,1}^{(1)})_{x=L_1} \cdot [(p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_7 - (p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_8$	
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_9 + (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{10} + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{11} - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{12}$	
$-(p_{II,1}^{(1)})_{x=L_1} \cdot [(p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{13} - (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{14}$	
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{15} + (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{16} + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{17} - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{18}$	
$+ (p_{II,1}^{(0)} p_{III,1}^{(1)} - p_{III,1}^{(0)} p_{II,1}^{(1)})_{x=L_1} \cdot [(p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{19} - (p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{20}$	
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{21} + (p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{22} + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{23} - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{24}$	
$+ (p_{II,1}^{(1)})_{x=L_1} \cdot [(p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{25} - (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{26}$	
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{27} + (p_{II,n}^{(0)} p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{28} + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{29} - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{30}$	
$-(p_{III,1}^{(1)})_{x=L_1} \cdot [(p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{31} - (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{32}$	
$-p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{33} + (p_{II,n}^{(0)} \cdot p_{III,n}^{(1)} - p_{III,n}^{(0)} \cdot p_{II,n}^{(1)})_{x=0} \cdot \bar{D}_{34} + p_{II,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{35} - p_{III,n}^{(1)}(x=0) \cdot \bar{D}_{36}] = 0.$	

上式にては便宜上

- $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_6$: 夫々 $\bar{D}(A_1 B_1 A_n B_n), \bar{D}(A_1 B_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(A_1 B_1 C_n D_n),$
- $\bar{D}_7, \bar{D}_8, \dots, \bar{D}_{12}$: " $\bar{D}(A_1 C_1 A_n B_n), \bar{D}(A_1 C_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(A_1 C_1 C_n D_n),$
- $\bar{D}_{13}, \bar{D}_{14}, \dots, \bar{D}_{18}$: " $\bar{D}(A_1 D_1 A_n B_n), \bar{D}(A_1 D_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(A_1 D_1 C_n D_n),$
- $\bar{D}_{19}, \bar{D}_{20}, \dots, \bar{D}_{24}$: " $\bar{D}(B_1 C_1 A_n B_n), \bar{D}(B_1 C_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(B_1 C_1 C_n D_n),$
- $\bar{D}_{25}, \bar{D}_{26}, \dots, \bar{D}_{30}$: " $\bar{D}(B_1 D_1 A_n B_n), \bar{D}(B_1 D_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(B_1 D_1 C_n D_n),$
- $\bar{D}_{31}, \bar{D}_{32}, \dots, \bar{D}_{36}$: " $\bar{D}(C_1 D_1 A_n B_n), \bar{D}(C_1 D_1 A_n C_n), \dots, \bar{D}(C_1 D_1 C_n D_n),$

を簡単に表はした。

極めて特殊なる場合としても中間格點皆無の場合を考ふれば、此の場合未知量は 4 個となり之を決める爲には 4 個の端結條件のみにて充分である。而して此の場合の條件方程式は次の如くなる。第一種、第二種の別は此の場合當然消失する。

第一場合: $[p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_{III}^{(1)}(l) p_{III}^{(0)}(0) - p_{III}^{(1)}(l) p_{II}^{(1)}(0)]$
 $- [p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}^{(1)}(l) p_{III}^{(0)}(0) - p_{III}^{(1)}(l) p_{II}^{(1)}(0)]$
 $+ [p_{III}^{(0)}(l) - p_{III}^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}^{(1)}(l) p_{II}^{(0)}(0) - p_{II}^{(1)}(l) p_{II}^{(1)}(0)] = 0^{(3)} \dots \dots \dots (7)$

第二場合: $p_{II}(0) p_{II}^{(1)}(l) - p_{II}(l) p_{II}^{(1)}(0) = 0 \dots \dots \dots (8)$

第三場合: $[p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_{III}(l) p_{III}(0) - p_{III}(l) p_{III}(0)]$
 $- [p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}(l) p_{III}(0) - p_{III}(l) p_{II}(0)]$
 $+ [p_{III}^{(0)}(l) - p_{III}^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}(l) p_{III}(0) - p_{III}(l) p_{II}(0)] = 0 \dots \dots \dots (9)$

$$\begin{aligned}
 \text{第四場合: } & [p_I^{(0)}(l) - p_I^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}(0)p_{III}^{(1)}(l) - p_{III}(0)p_{II}^{(1)}(l)] \\
 & - [p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_I(0)p_{III}^{(1)}(l) - p_{III}(0)p_I^{(1)}(l)] \\
 & + [p_{III}^{(0)}(l) - p_{III}^{(0)}(0)] \cdot [p_I(0)p_{II}^{(1)}(l) - p_{II}(0)p_I^{(1)}(l)] = 0 \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{第五場合: } & [p_I^{(0)}(l) - p_I^{(0)}(0)] \cdot [p_{II}(l)p_{III}^{(1)}(0) - p_{III}(l)p_{II}^{(1)}(0)] \\
 & - [p_{II}^{(0)}(l) - p_{II}^{(0)}(0)] \cdot [p_I(l)p_{III}^{(1)}(0) - p_{III}(l)p_I^{(1)}(0)] \\
 & + [p_{III}^{(0)}(l) - p_{III}^{(0)}(0)] \cdot [p_I(l)p_{II}^{(1)}(0) - p_{II}(l)p_I^{(1)}(0)] = 0 \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

但し l : 柱の全長,

第三節 捩屈限界荷重

(2a) 式により

$$z_r = b r \zeta_r^2 = \left(\frac{E_r I_r l_r}{W_r} \right)^2 \left\{ \frac{1}{E_r I_r} \left(Q_{r-1} + W_r \frac{L_r - x}{l_r} \right) \right\}^2$$

であるから格間 l_r の両端では夫々

$$z_r(L_r) = \left(\frac{E_r I_r l_r}{W_r} \right)^2 \left(\frac{Q_{r-1}}{E_r I_r} \right)^2, \quad z_r(L_{r+1}) = \left(\frac{Q_{r-1} + W_r}{Q_{r-1}} \right)^2 \cdot z_r(L_r).$$

一方 $Q_r = Q_{r-1} + W_r + P_r$ なる関係があるから結局凡ての z は或る特定の z で表はし得る。今此の特定の z を $z_n(L_{n+1})^{(4)}$ とすれば次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 z_n(L_n) &= \kappa_{n,n} \cdot z_0, \\
 z_{n-1}(L_n) &= \kappa_{n-1,n} \cdot z_0, & z_{n-1}(L_{n-1}) &= \kappa_{n-1,n-1} \cdot z_0, \\
 z_{n-2}(L_{n-1}) &= \kappa_{n-2,n-1} \cdot l_0, & z_{n-2}(L_{n-2}) &= \kappa_{n-2,n-2} \cdot z_0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 z_1(L_2) &= \kappa_{1,2} \cdot z_0, & z_1(L_1) &= \kappa_{1,1} \cdot z_0
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 \kappa_{n,n} &= \omega_n \left(\frac{Q_{n-1}}{P_n} \right)^2, \quad \omega_n = 1, \\
 \left. \begin{aligned}
 \kappa_{n-1,n} &= \omega_{n-1} \left(\frac{Q_{n-2} + W_{n-1}}{P_n} \right)^2, \\
 \kappa_{n-1,n-1} &= \omega_{n-1} \left(\frac{Q_{n-2}}{P_n} \right)^2
 \end{aligned} \right\} \omega_{n-1} = \left(\frac{w_n}{w_{n-1}} \right)^2 \cdot \left(\frac{E_n I_n}{E_{n-1} I_{n-1}} \right), \\
 \left. \begin{aligned}
 \kappa_{n-2,n-1} &= \omega_{n-2} \left[\frac{Q_{n-3} + W_{n-2}}{P_n} \right]^2, \\
 \kappa_{n-2,n-2} &= \omega_{n-2} \left[\frac{Q_{n-3}}{P_n} \right]^2,
 \end{aligned} \right\} \omega_{n-2} = \left(\frac{w_n}{w_{n-2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{E_n I_n}{E_{n-2} I_{n-2}} \right), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left. \begin{aligned}
 \kappa_{1,2} &= \omega_1 \left[\frac{Q_0 + W_1}{P_n} \right]^2, \\
 \kappa_{1,1} &= \omega_1 \left[\frac{Q_0}{P_n} \right]^2,
 \end{aligned} \right\} \omega_1 = \left(\frac{w_n}{w_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{E_n I_n}{E_1 I_1} \right), \\
 z_0 &= z_n(L_{n+1}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

従つて若し連續柱について其の力學的諸量の比が與へられたるときは、捩屈條件方程式より試案的にそれを満足

すべき根 $z_n(L_{n+1})$ の最小値 z_0 を求める事が出来る。今 z_0 が求め得られたとすれば、本章の場合の捩屈限界荷重は次の如くに表はし得るのである。

$$Q_{(m)} = \mu Q_E = Q' E,$$

但し

$$Q_{(m)} = Q\text{-ダイヤグラムの平均高 (圖-3)} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_{i-1}}{\lambda_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{\lambda_i},$$

$$Q_E = \alpha \frac{\pi^2 E_m I_m}{L_1^2},$$

$$Q' E = \alpha \frac{\pi^2 E_m I_m}{L^2} = \text{連続柱の一般化された Euler の捩屈限界荷重,}$$

$$L = \frac{L_1}{\sqrt{\mu}} = \text{連続柱の換算長,}^{15)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} = \text{柱長の換算率,}^{16)}$$

$$\mu = z_0 \frac{v_n^2 \lambda_n^2}{\alpha \pi^2} \cdot \frac{E_n I_n}{E_m I_m} \cdot \frac{Q_{(m)}}{P_n},$$

$$v_n = \frac{W_n}{P_n},$$

$$\lambda_i = \frac{L_1}{l_i} (i=1, 2, \dots, n),$$

$$E_m I_m = \sum_{i=1}^n \frac{E_i I_i}{\lambda_i},^{17)}$$

$\alpha = \text{表-A 記載の数値.}$

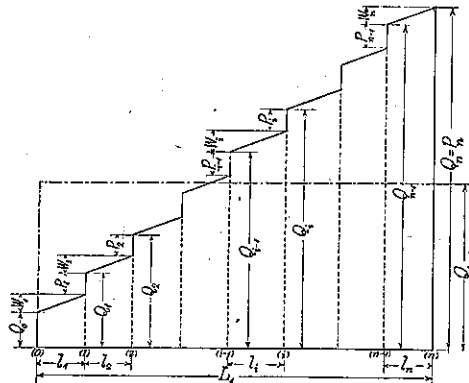
.....(13)

表-A. α の数値

端の 結種 條類 件					
α	1	1/4	4	2.046 ¹⁸⁾	2.046

中間格點が全然無き特殊な場合には (13) 式の諸式は次の如くなる。

圖-3. Q-ダイヤグラム



但し

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{(m)} &= \mu Q_E = Q_B', \\
 Q_{(m)} &= Q_0 + \frac{W_1}{2}, \\
 \lambda &= 1, \\
 \nu &= \frac{W_1}{P_1}, \\
 E_m I_m &= E_1 I_1, \\
 \mu &= \frac{Z_0}{\alpha \pi^2} \cdot \nu^2 \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right), \\
 Q_B' &= \alpha \frac{\pi^2 B I_1}{L^2}, \\
 L &= \frac{I_1}{\sqrt{\mu}}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

第三章 全格間或は全徑間に涉り荷重條件 $w=0$ が成立する連續柱

第一節 函數の誘導

一般的に格間 l_r を取扱ひ、荷重條件 $w_r=0$ を微分方程式 (1 a) 式に代入すれば

$$E_r I_r \frac{d^4 y_r}{dx^4} + Q_{r-1} \frac{d^2 y_r}{dx^2} = 0$$

となり、之は亦次の如くに表はせる。

但し

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 p_r}{dx^2} + m_r^2 p_r &= 0, \\
 p_r &= \frac{d^2 y_r}{dx^2}, \\
 m_r^2 &= \frac{Q_{r-1}}{E_r I_r}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

従つて條件の爲に必要な函數は次の如くに求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 p_r &= A_r \cos m_r x + B_r \sin m_r x, \\
 \frac{d y_r}{dx} &= \frac{A_r}{m_r} \sin m_r x - \frac{B_r}{m_r} \cos m_r x + C_r, \\
 y_r &= -\frac{A_r}{m_r^2} \cos m_r x - \frac{B_r}{m_r^2} \sin m_r x + C_r x + D_r, \\
 \frac{d^3 y_r}{dx^3} &= -A_r m_r \sin m_r x + B_r m_r \cos m_r x.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

第二節 撓屈條件

函數 (16) 式と表-1, 2 により前章と全く同様に、撓屈條件を求むる爲の表-7, 8, 9, 10 を得る。

表-7. 縦集中荷重のみを負担する場合の端結條件のマトリックスの表

	條件 番號	A_1	B_1	C_1	D_1	...	A_n	B_n	C_n	D_n
第一 場合	1	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1^2}$	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1^2}$	L_1	1	0..	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0..	$-\frac{1}{m_n^2}$	0	0	0
	3	$\cos m_1 L_1$	$\sin m_1 L_1$	0	0	0..	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0..	1	0	0	0

表-7 (續き)

	條件 番號	A_1	B_1	C_1	D_1	...	A_n	B_n	C_n	D_n
第二 場合	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n^2}$	0	0	1
	2	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n}$	1	0
	3	$\cos m_1 L_1$	$\sin m_1 L_1$	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	m_1^2	0	0	0	0	0	0
第三 場合	1	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1^2}$	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1^2}$	L_1	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n^2}$	0	0	1
	3	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1}$	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1}$	1	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n}$	0	0
第四 場合	1	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1^2}$	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1^2}$	L_1	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n^2}$	0	0	1
	3	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n}$	1	0
	4	$\cos m_1 L_1$	$\sin m_1 L_1$	0	0	0	0	0	0	0
第五 場合	1	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1^2}$	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1^2}$	L_1	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{m_n^2}$	0	0	1
	3	$\frac{\sin m_1 L_1}{m_1}$	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1}$	1	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0

未定係数の總數=4n

表-8. 縦集中荷重のみを負担する場合の第一種連續柱の中間格點の條件のマトリックスの表

但し一般的に中間格點 (i) における中間格點の條件を表はす

條件 番號	A_i	B_i	C_i	D_i	A_{i+1}	B_{i+1}	C_{i+1}	D_{i+1}
n-1 1	$-\frac{\cos m_i L_{i+1}}{m_i^2}$	$-\frac{\sin m_i L_{i+1}}{m_i^2}$	L_{i+1}	1	$\frac{\cos m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}^2}$	$\frac{\sin m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}^2}$	$-L_{i+1}$	-1
n-1 2	$\frac{\sin m_i L_{i+1}}{m_i}$	$-\frac{\cos m_i L_{i+1}}{m_i}$	1	0	$-\frac{\sin m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}}$	$\frac{\cos m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}}$	-1	0
n-1 3	$c_i \cos m_i L_{i+1}$	$c_i \sin m_i L_{i+1}$	0	0	$-\cos m_{i+1} L_{i+1}$	$-\sin m_{i+1} L_{i+1}$	0	0
n-1 4	$\sin m_i L_{i+1}$	$-\cos m_i L_{i+1}$	$\frac{1+\gamma_i}{2} m_i$	0	$-\sqrt{\frac{1-\gamma_i}{2c_i}} \sin m_{i+1} L_{i+1}$	$\sqrt{\frac{1-\gamma_i}{2c_i}} \cos m_{i+1} L_{i+1}$	0	0

未定係数の總數=4n

表-9. 縱集中荷重のみを負擔する場合の第二種連續柱の中間格點の條件のマトリックスの表

但し m = 剛支點を有する中間格點の數,
 格點 (k) は剛支點を有する中間格點,
 格點 (i) は剛支點を有せざる中間格點を表はす。

條件數	...	A_k	B_k	C_k	D_k	A_{k+1}	B_{k+1}	C_{k+1}	D_{k+1}	.. 0 ..	
$2m$	1	0	$\frac{\cos m_k L_{k+1}}{m_k^2}$	$-\frac{\sin m_k L_{k+1}}{m_k^2}$	L_{k+1}	1	0	0	0	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	$-\frac{\cos m_{k+1} L_{k+1}}{m_{k+1}^2}$	$-\frac{\sin m_{k+1} L_{k+1}}{m_{k+1}^2}$	L_{k+1}	1	.. 0 ..
$n-1-m$	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
$n-1-m$	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
$n-1$	4	0	$\frac{\sin m_k L_{k+1}}{m_k}$	$-\frac{\cos m_k L_{k+1}}{m_k}$	1	0	$\frac{\sin m_{k+1} L_{k+1}}{m_{k+1}}$	$\frac{\cos m_{k+1} L_{k+1}}{m_{k+1}}$	-1	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
$n-1$	5	0	$c_k \cos m_k L_{k+1}$	$c_k \sin m_k L_{k+1}$	0	0	$-\cos m_{k+1} L_{k+1}$	$-\sin m_{k+1} L_{k+1}$	0	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..

條件數		A_i	B_i	C_i	D_i	A_{i+1}	B_{i+1}	C_{i+1}	D_{i+1}	...
$2m$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n-1-m$	2	$-\frac{\cos m_i L_{i+1}}{m_i^2}$	$-\frac{\sin m_i L_{i+1}}{m_i^2}$	L_{i+1}	1	$\frac{\cos m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}^2}$	$\frac{\sin m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}^2}$	$-L_{i+1}$	-1	.. 0 ..
		$\sin m_i L_{i+1}$	$-\cos m_i L_{i+1}$	$\frac{1+\gamma_i}{2} m_i$	0	$-\sqrt{\frac{1-\gamma_i}{2c_i}} \sin m_{i+1} L_{i+1}$	$\sqrt{\frac{1-\gamma_i}{2c_i}} \cos m_{i+1} L_{i+1}$	0	0	0
$n-1$	4	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
		$\frac{\sin m_i L_{i+1}}{m_i}$	$-\frac{\cos m_i L_{i+1}}{m_i}$	1	0	$-\frac{\sin m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}}$	$\frac{\cos m_{i+1} L_{i+1}}{m_{i+1}}$	-1	0	.. 0 ..
$n-1$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	.. 0 ..
		$c_i \cos m_i L_{i+1}$	$c_i \sin m_i L_{i+1}$	0	0	$-\cos m_{i+1} L_{i+1}$	$-\sin m_{i+1} L_{i+1}$	0	0	0

未定係數の總數 = $4n$

表 16. 縦集中荷重のみを負擔する場合の展開式 (6) の爲の表

		条件方程式の左邊										係数 の 和 の 因 子
		相乗の因子					相乗の因子					
		+		+		+		-		-		
代 数 和 の 因 子	-	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
		2	0	$\frac{1}{mn^3}$	$\frac{1}{m^2n^2}$	0	0	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	1	1	
		3	$\frac{1}{m_1^3}$	$\frac{1}{m_1^3}$	$\frac{1}{m_1^2n^2}$	0	0	$\frac{1}{m_1n}$	$\frac{1}{m_1n}$	1	1	
		4	0	$\frac{1}{m_1^3}$	$\frac{1}{m_1^2n^2}$	0	0	$\frac{1}{m_1n}$	$\frac{1}{m_1n}$	1	1	
		5	$-\frac{1}{m_1^3}$	0	0	1	0	0	0	0	0	
	-	1	$-I_1 \cos m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		2	$m_1^2 \cos m_1 L_1$	上	上	上	上	上	上	上	上	
		3	$\frac{\cos m_1 L_1 + m_1 L_1 \sin m_1 L_1}{m_1^2}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
		4	$-I_1 \cos m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		5	$-\frac{\cos m_1 L_1 + m_1 L_1 \sin m_1 L_1}{m_1^2}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
	+	1	$-\cos m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		2	0	上	上	上	上	上	上	上	上	
		3	$\frac{\sin m_1 L_1}{m_1}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
		4	$-\cos m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		5	$-\frac{\sin m_1 L_1}{m_1}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
	-	1	$L_1 \sin m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		2	$-m_1^2 \sin m_1 L_1$	上	上	上	上	上	上	上	上	
		3	$\frac{m_1 L_1 \cos m_1 L_1 - \sin m_1 L_1}{m_1^2}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
		4	$L_1 \sin m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同	
		5	$\frac{m_1 L_1 \cos m_1 L_1 - \sin m_1 L_1}{m_1^2}$	上	上	上	上	上	上	上	上	
+	1	$\sin m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同		
	2	0	上	上	上	上	上	上	上	上		
	3	$\frac{\cos m_1 L_1}{m_1}$	上	上	上	上	上	上	上	上		
	4	$\sin m_1 L_1$	同	同	同	同	同	同	同	同		
	5	$-\frac{\cos m_1 L_1}{m_1}$	上	上	上	上	上	上	上	上		
+	1	0	同	同	同	同	同	同	同	同		
	2	0	上	上	上	上	上	上	上	上		
	3	1	上	上	上	上	上	上	上	上		
	4	0	同	同	同	同	同	同	同	同		
	5	-1	上	上	上	上	上	上	上	上		

= 0

表-10 の \bar{D} は表-6 の説明 1) と全く同様である。表-10 による展開の一例として端結條件の第三場合につき、前章第二節にて表-6 の運用を示す一例として行つた展開式に用ひたる記號 $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots$ を使用して之を行へば次の如くなる。

$$\underbrace{-\left(\frac{1}{m_1^3}\right)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_1+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_2+O\cdot\bar{D}_3-O\cdot\bar{D}_4-\frac{1}{m_n}\bar{D}_5-\bar{D}_6\right)}_{\text{相乗の因子}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{相乗の因子}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{代数和の因子}}$$

$$-\left(\frac{\cos m_1 L_1+m_1 L_1 \sin m L_1}{m_1^2}\right)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_7+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_8+O\cdot\bar{D}_9-O\cdot\bar{D}_{10}-\frac{1}{m_n}\bar{D}_{11}-\bar{D}_{12}\right)$$

$$+\left(\frac{\sin m_1 L_1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_{13}+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_{14}+O\cdot\bar{D}_{15}-O\cdot\bar{D}_{16}-\frac{1}{m_n}\bar{D}_{17}-\bar{D}_{18}\right)$$

$$-\left(\frac{m_1 L_1 \cos m_1 L_1-\sin m_1 L_1}{m_1^2}\right)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_{19}+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_{20}+O\cdot\bar{D}_{21}-O\cdot\bar{D}_{22}-\frac{1}{m_n}\bar{D}_{23}-\bar{D}_{24}\right)$$

$$+\left(\frac{\cos m_1 L_1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_{25}+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_{26}+O\cdot\bar{D}_{27}-O\cdot\bar{D}_{28}-\frac{1}{m_n}\bar{D}_{29}-\bar{D}_{30}\right)$$

$$+(1)\left(\frac{1}{m_n^3}\bar{D}_{31}+\frac{1}{m_n^2}\bar{D}_{32}+O\cdot\bar{D}_{33}-O\cdot\bar{D}_{34}-\frac{1}{m_n}\bar{D}_{35}-\bar{D}_{36}\right)=0.$$

尙ほ表-10 で明かな様に、次の6個の小行列式

$$\bar{D}(A_1 B_1 B_n C_n), \quad \bar{D}(A_1 C_1 B_n C_n), \quad \bar{D}(A_1 D_1 C_n C_n),$$

$$\bar{D}(B_1 C_1 B_n C_n), \quad \bar{D}(B_1 D_1 B_n C_n), \quad \bar{D}(C_1 D_1 B_n C_n),$$

は本章の條件の展開には全然不必要なることが解る。

第三節 撓屈限界荷重

今 $m_1 L_1, m_1 L_2, m_2 L_2, m_2 L_3, \dots$ の諸量を次の如くに表はす。

$$m_1 L_1 = \kappa_{1.0} m_n L_n, \quad m_1 L_2 = \kappa_{1.1} m_n L_n,$$

$$m_2 L_2 = \kappa_{2.1} m_n L_n, \quad m_2 L_3 = \kappa_{2.2} m_n L_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m_i L_i = \kappa_{i. i-1} m_n L_n, \quad m_i L_{i+1} = \kappa_{i. i} m_n L_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m_n L_n = \kappa_{n. n-1} m_n L_n,$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{1.0} &= \frac{L_1}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_1 I_1} \frac{Q_0}{Q_{n-1}}}, & \kappa_{1.1} &= \frac{L_2}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_1 I_1} \frac{Q_0}{Q_{n-1}}}, \\ \kappa_{2.1} &= \frac{L_2}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_2 I_2} \frac{Q_1}{Q_{n-1}}}, & \kappa_{2.2} &= \frac{L_3}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_2 I_2} \frac{Q_1}{Q_{n-1}}}, \\ & \dots \dots \dots & & \\ \kappa_{i. i-1} &= \frac{L_i}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_i I_i} \frac{Q_{i-1}}{Q_{n-1}}}, & \kappa_{i. i} &= \frac{L_{i+1}}{L_n} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_i I_i} \frac{Q_{i-1}}{Q_{n-1}}}, \\ & \dots \dots \dots & & \\ \kappa_{n. n-1} &= 1, \\ m_n L_n &= \varepsilon. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

従つて條件方程式は $F(\kappa, z) = 0$ の形となり、此の方程式を満足すべき根 z の最小値を z_0 とすれば、本章の場合の挫屈限界荷重は次の如くに表はし得る。

$$Q_{(m)} = \mu Q_E = Q_E'$$

但し

$$Q_{(m)} = Q\text{-ダイアグラムの平均高}^{(19)} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i - 1}{\lambda_i},$$

$$Q_E = \alpha \frac{\pi^2 E_m I_m}{L^2},$$

$$Q_E' = \alpha \frac{\pi^2 E_m I_m}{L^2} = \text{連続柱の一般化された Euler の挫屈限界荷重,}$$

$$L = \frac{L_1}{\sqrt{\mu}} = \text{連続柱の換算長,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} = \text{柱長の換算率,}$$

$$\mu = \frac{z_0^2 \lambda_n^2}{\alpha \pi^2} \cdot \frac{E_n I_n}{E_m I_m} \cdot \frac{Q_{(m)}}{Q_n},$$

$$\lambda_n = \frac{L_1}{l_n},$$

$$E_m I_m = \sum_{i=1}^n \frac{E_i I_i}{\lambda_i},$$

$\alpha =$ 表-A 記載の數値.

.....(18)

前記の一般化せられた Euler 公式 (13), (18) の趣意は、一般的には格間毎に變化すべき量である Q 及 EI を、恰も本来の Euler 公式の場合の如くに、連続柱の全長に涉つて一定とせむが爲に兩者の或る平均値 $Q_{(m)}$, $E_m I_m$ をとり、この $Q_{(m)}$ を縦端荷重とし一定なる撓「モーメント」⁽²⁰⁾ $E_m I_m$ 、柱長として換算長 L を有する単一格間柱の挫屈強度に關する Euler 公式に對して全く相似的に表はしたのである。而して此の場合の平均値 $Q_{(m)}$, $E_m I_m$ としては、それが相異なる部分の柱の長さを重みとする算術平均を採用した。この理由は平均値のかゝる決め方が最も簡單であるからでそれ以上の意味はない。

尙以上の如き假定に因つて必然的に決定される係數量 μ は荷重比 γ 、格間長比 λ の變化に對して極めて鈍感であつて、換算率 $\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$ になると更に鈍感である。即ち例へば一つの表はし方として

$$Q_0 = \mu' Q_E$$

の如き挫屈限界荷重の表式を採用せる場合の係數量 μ' などに比較するときは μ は γ, λ の變化に對して極めて狭き範囲内においてのみ變化する。即ちより定値に近いのである。 μ のこの性質を利用して或る特殊なる場合に對しては、 ρ の値の従つて z_0 の近似値の大體の豫測が比較的容易ならしめ得るのである。

第二部 一般理論による計算例

第一章 荷重條件 $w \neq 0$ が成立する場合の計算例

第一節 端結條件第一場合の一格間柱の縦等布荷重のみに因る挫屈 (圖-4)

公式 (1) により

$$\xi_1 = \frac{1}{E_1 I_1} \left(Q_0 + W_1 \frac{L_1 - x}{l_1} \right),$$

これに本節の問題の条件 $Q_0=0, L_1=l_1=l$ を代入すれば

$$\xi = \frac{W}{EI} \cdot \frac{l-x}{l}$$

従つて

$$\xi_{x=0} = \frac{W}{EI}, \quad \xi_{x=l} = 0.$$

その結果

$$\begin{aligned} p_I^{(0)}(l) &= 0, & p_{II}^{(0)}(l) &= 0, & p_{III}^{(0)}(l) &= 0, \\ p_I^{(1)}(l) &= 0, & p_{II}^{(1)}(l) &= 0, & p_{III}^{(1)}(l) &= 0, \end{aligned}$$

となり公式 (7) によつて次の如き条件方程式が得られる。

$$p_I^{(0)}(0)p_{III}^{(1)}(0) - p_{II}^{(0)}(0)p_I^{(1)}(0) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

或は

$$\left. \begin{aligned} p_I^{(0)'}(0)p_{III}^{(1)'}(0) &= z p_{II}^{(0)'}(0)p_I^{(1)'}(0) \\ z &= b \xi_{x=0}^3 = \frac{Wl^3}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

条件方程式 (20) の最小根は試索的に求むれば

$$z_0 = 18.569$$

となる。従つて柱長の換算率は, (14) 式により $\nu=1$ ならば

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{z_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{1}{\nu} = 1.031,$$

故に次の捩屈限界荷重公式を得る。

$$Q_{(m)} = \frac{W}{2} = \frac{\pi^2 EI}{(1.031 l)^2} \dots\dots\dots (21)$$

此の問題は Karas が柱の自重に因る捩屈²¹⁾として別の方法によつて既に取扱へるもので前者の結果は全く一致する。

第二節 端結条件第二場合の一格間柱の縦等布荷重のみに因る捩屈 (圖-5)

前節により

$$p_{II}^{(1)}(l) = 1, \quad p_I^{(1)}(l) = 0,$$

であるから公式 (8) により条件方程式は次の如くなる。

$$p_I(0) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

或は又次のやうにベッセル函数を以て表はせる。

$$\left. \begin{aligned} J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z}\right) &= 0 \\ z &= \frac{Wl^2}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

上式の最小根は

$$z_0 = 7.74059^{22)}$$

圖-4. 一格間柱 第一場合

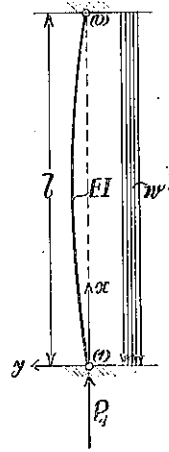
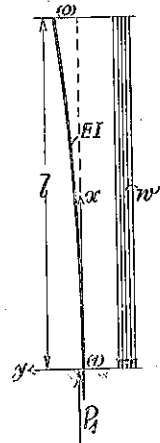


圖-5. 一格間柱 第二場合



となる。ν=1 であるから柱長換算率

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} = 1.587,$$

従つて撓屈限界荷重公式は次の様になる。

$$Q_{(m)} = \frac{W}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 EI}{(1.587 l)^2} \dots\dots\dots (24)$$

此の古い問題は R. Mayer²³⁾, Jasinski²⁴⁾, Greenhill¹⁵⁾, Wittenbauer²⁶⁾ 等によつて既に研究された。即ちそれらの數値を挙げれば

Mayer	$z_0 = 7.826$
Jasinski	7.837
Greenhill	7.91
Wittenbauer	8.33

で、是等の中では Mayer のものが著者の數値に比較的接近してゐる。

第三節 端結條件第一場合の一格間柱の縦集中端荷重及縦等布荷重に因る撓屈 (圖-6)

函數 (2), (3), (4), (5) の獨立變數は

$$z_1 = \left(\frac{l_1}{W_1}\right)^2 \frac{1}{E_1 I_1} (P_0 + W_1 \frac{l_1 - x}{l_1})^3$$

であるから

$$\nu = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{W_1}{P_1}$$

とすれば

$$(z_1)_{x=l_1} = \frac{P_1 l_1^3}{E_1 I_1} \frac{(1-\nu)^3}{\nu^2}, \quad (z_1)_{x=0} = \frac{P_1 l_1^3}{E_1 I_1} \frac{1}{\nu^2},$$

$$(\xi_1)_{x=l_1} = \frac{P_1}{E_1 I_1} (1-\nu), \quad (\xi_1)_{x=0} = \frac{P_1}{E_1 I_1},$$

となる。荷重比を下の如く ν_0 と置くことが更に便利なることがある。

$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \quad \nu_0 &= \frac{W_1}{P_0}, \\ \nu &= \frac{\nu_0}{1+\nu_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

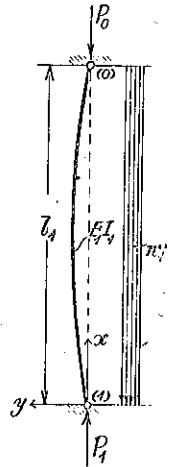
然るときは

$$\left. \begin{aligned} (z_1)_{x=l_1} &= z, & (z_1)_{x=0} &= \kappa_0^3 \cdot z, \\ (\xi_1)_{x=l_1} &= \frac{P_0}{E_1 I_1}, & (\xi_1)_{x=0} &= \kappa_0 \cdot (\xi_1)_{x=l_1}, \\ \text{但し} \quad z &= \frac{P_0 l_1^3}{E_1 I_1} \frac{1}{\nu_0^2}, & \kappa_0 &= 1 + \nu_0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

之を公式 (7) に代入すれば條件方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} & [p_1^{(0)'}(z) - \kappa_0 p_1^{(0)'}(\kappa_0^3 z)] [\kappa_0 p_2^{(1)'}(z) p_3^{(1)'}(\kappa_0^3 z) - p_3^{(1)'}(z) p_2^{(1)'}(\kappa_0^3 z)] \\ & - \kappa_0 z [p_2^{(0)'}(z) - \kappa_0^3 p_2^{(0)'}(\kappa_0^3 z)] [p_1^{(1)'}(z) p_3^{(1)'}(\kappa_0^3 z) - \kappa_0 p_3^{(1)'}(z) p_1^{(1)'}(\kappa_0^3 z)] \\ & + z [p_3^{(0)'}(z) - \kappa_0^3 p_3^{(0)'}(\kappa_0^3 z)] [p_1^{(1)'}(z) p_2^{(1)'}(\kappa_0^3 z) - \kappa_0^2 p_2^{(1)'}(z) p_1^{(1)'}(\kappa_0^3 z)] \\ & = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

圖-6. 一格間柱 第一場合



(14) 式の z_0 と (26) 式の z との間には次の關係が成立する。

$$z_0 = (1 + \nu_0)^2 \cdot z \dots\dots\dots (28)$$

(14) 式により捩屈限界荷重は次の如くにあはせる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{(m)} &= \mu Q_E, \\ \mu &= \frac{2\nu_0^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{\nu_0}{2} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

但し

或は又他の一つの表はし方として

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \mu' Q_E, \\ \mu' &= \frac{2\nu_0^2}{\pi^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

但し

上式によつて表-11 及圖-7 を得る。

圖-7 の μ 及 μ' の 2 曲線の比較によつて、荷重比 ν_0 の變化に對して如何に μ -曲線が定値性を表はすものなるかと明瞭に看取される。

圖-7. ν_0 の變化に伴ふ μ, μ' の變化
(一格間柱第一場合)

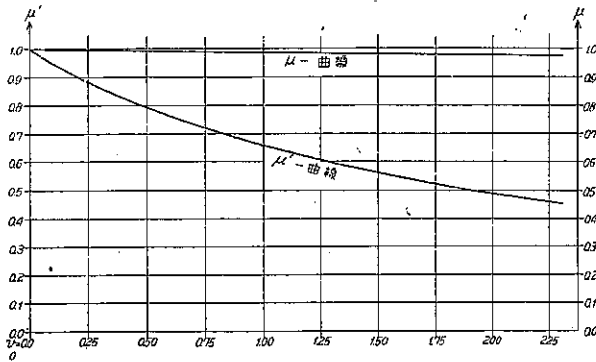


表-11. μ' 及 $1:\sqrt{\mu}$ の數値

ν_0	μ'	$1:\sqrt{\mu}$
0.00	1.0000	1.00
0.25	0.8825	1.00
0.50	0.7936	1.00
0.75	0.7224	1.00
1.00	0.6616	1.00
1.25	0.6110	1.00
1.50	0.5645	1.01
1.75	0.5257	1.01
2.00	0.4918	1.01
100	0.0185	1.03
$\infty^*)$	0	1.03

*) 之は本章第一節の場合に相當する

μ の性質に關して前述した様に、表-11 の數値を觀察すれば我々は十分精確に次の如く假定することが出来る。

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \doteq 1,$$

従つて

$$\mu' = \frac{1}{1 + \frac{\nu_0}{2}} \dots\dots\dots (31)$$

尙ほ上の假定による換算率の誤差は 3.1% 以下である。此の結果は Timoschenko²⁷⁾ の誘導した近似式と全然一致する。唯その計算に彼は Energy Method を應用してゐる。彼の假定は

$$P_0 = Q_E - \frac{W_1}{2}$$

であり、従つて

$$P_0 \left(1 + \frac{\nu_0}{2}\right) = Q_E,$$

故にこれから (31) 式が導かれる。此の近似式は、中間縦等布荷重を二分しその一半を本来の縦集中端荷重に加へたる量 $P_0 + \frac{W_1}{2}$ を端荷重に有つ格間柱に關する Euler の挫屈限界荷重公式に外ならないのである。

第二章 荷重條件 $w=0$ が全長に涉つて成立する場合の計算

第一節 端結條件第一場合の第一種二格間連續柱の挫屈 (圖-8)

表-8 によつて中間格點の條件を表はす必要な小行列式は

次の如くなる。

$$\begin{aligned} \bar{D}(A_1 C_1 A_2 D_2) &= \sqrt{c_1 \frac{1-\gamma_1}{2}} \sin m_1 l_2 \cos m_2 l_2 \\ &\quad - \sin m_1 l_2 \cos m_1 l_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}(A_1 D_1 A_2 D_2) &= \frac{1+\gamma_1}{2} m_1 \left\{ -\frac{l_2}{m_1} \cos m_1 l_2 \sin m_2 l_2 + \frac{c_1 l_2}{m_2} \sin m_1 l_2 \cos m_2 l_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{c_1}{m_2^2} \right) \sin m_1 l_2 \sin m_2 l_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\bar{D}(B_1 C_1 A_2 D_2) = \sqrt{c_1 \frac{1-\gamma_1}{2}} \cos m_1 l_2 \cos m_2 l_2 + \sin m_2 l_2 \sin m_1 l_2,$$

$$\begin{aligned} \bar{D}(B_1 D_1 A_2 D_2) &= \frac{1+\gamma_1}{2} m_1 \left\{ +\frac{l_2}{m_1} \sin m_1 l_2 \sin m_2 l_2 + \frac{c_1 l_2}{m_2} \cos m_1 l_2 \cos m_2 l_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{c_1}{m_2^2} \right) \cos m_1 l_2 \sin m_2 l_2 \right\}, \end{aligned}$$

これを表-10 に代入すれば條件方程式

$$\frac{\kappa x}{\tan \kappa x} \left[\frac{1}{\lambda_2 - 1} + \frac{2}{1 - \gamma_1} \right] + \frac{x}{\tan x} \left[(\lambda_2 - 1) + \frac{1 - \gamma_1}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \gamma_1)^2}{1 - \gamma_1}$$

を得る。こゝで x, κ は下の公式 (32) に示す量である。他の方法でやつても結局同じ結果に達する²⁸⁾。特別な場合として $P_1 = 0$, 即ち $\gamma_1 = -1$ と置けば上の條件式は

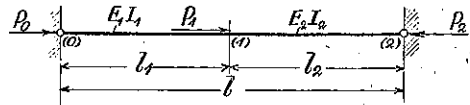
$$\frac{\tan x}{\tan \kappa x} = -\sqrt{c_1}$$

となり、之は既に熟知の公式である²⁹⁾。

上式は更に次の形に書き改めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\kappa x}{\tan \kappa x} + (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \frac{x}{\tan x} &= \frac{(1 + \gamma_1)^2}{2 + \frac{1 - \gamma_1}{\lambda_2 - 1}}, \\ \text{但し} \\ x &= m_2 l_2, \\ \kappa x &= m_1 l_1, \text{ }^{30)} \\ \kappa &= (\lambda_2 - 1) \sqrt{\frac{1 - \gamma_1}{2c_1}}, \\ q &= \frac{P_1}{P_0}, \\ \gamma_1 &= \frac{q - 1}{q + 1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

圖-8. 二格間第一種連續柱第一場合



(18) の μ の一般式に 2 つの関係

$$\frac{E_2 I_1}{E_m I_m} = \frac{\lambda_2}{c_1(\lambda_2 - 1) + 1}, \quad \frac{Q_{(m)}}{Q_1} = \frac{Q_m}{Q_2} = \frac{(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) + 2}{2\lambda_2},$$

を挿入すれば μ の次の表式を得る。即ち

$$\mu = \frac{\lambda_2^2}{2} \cdot \frac{2 + (1 - \gamma_1)(\lambda_2 - 1)}{1 + c_1(\lambda_2 - 1)} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha \pi^2} \dots \dots \dots (33)$$

上式 μ は表-A の α の數値を挿入することにより、第一種及第二種連續柱を通じて前記の端結條件の凡ての場合に適用し得るものである。

以上により直ちに計算に出發する前に注意すべきことがある。今圖-9 の 2 つの連續柱 (a) と (b) との間に

$$E_1 I_1 = E_2' I_2', \quad E_1 I_2 = E_1' I_1', \quad l_1 = l_2', \quad l_2 = l_1', \quad l = l',$$

$$P_0 = P_2', \quad P_1 = P_1', \quad P_2 = P_0',$$

なる條件が成立つものとすれば兩者は同一の問題であつて (b) は (a) を逆に見て番號を附けたに過ぎない。即ち與へられた連續柱の解法を行ふ場合に (a) の如く始める場合と (b) の如くに始める場合と二通りあつて、兩者は一見異つた如くにして實は全く同一の問題であること

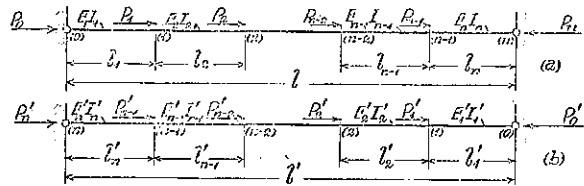
である。此の場合一つの問題例へば (a) を解くことにより、次の (34) 式によつて (a) の問題と關係付けらるべき之と逆の問題 (b) の解も同時に與へられたこととなるのである。而して此の (a) と (b) との間には次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2', \quad \lambda_2 = \lambda_1', \quad c_1 = \frac{1}{c_1'}, \\ q' = -\frac{q}{1+q}, \quad q = -\frac{q'}{1+q'} \\ \text{但し} \\ q = \frac{P_1}{P_0}, \quad q' = -\frac{P_1'}{P_0'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

圖-10 に示す様に一般的に n 格間の場合に (a) と (b) との間に

$$\begin{aligned} E_1 I_1 &= E_n' I_n', \\ E_2 I_2 &= E_{n-1}' I_{n-1}' \dots \dots \dots \\ E_{n-1} I_{n-1} &= E_2' I_2', \\ E_n I_n &= E_1' I_1', \\ l_1 &= l_n', \quad l_2 = l_{n-1}' \dots \dots \dots \\ l_{n-1} &= l_2', \quad l_n = l_1', \quad l = l', \\ P_0 &= P_n', \quad P_1 = P_{n-1}' \dots \dots \dots P_{n-1} = P_1', \quad P_n = P_0', \end{aligned}$$

圖-10. n -格間連續柱



なる關係がある場合には (34) 式の代りに次式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_n', \quad \lambda_2 = \lambda_{n-1}', \quad \dots \dots \dots \lambda_{n-1} = \lambda_2', \quad \lambda_n = \lambda_1', \\ c_1 = \frac{1}{c_{n-1}'}, \quad c_2 = \frac{1}{c_{n-2}'}, \quad \dots \dots \dots c_{n-2} = \frac{1}{c_2'}, \quad c_{n-1} = \frac{1}{c_1'}, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & q_1 = \frac{q_{n-1}'}{q_n'}, \quad q_2 = \frac{q_{n-2}'}{q_n'}, \quad \dots \dots \dots \quad q_{n-2} = \frac{q_2'}{q_n'}, \quad q_{n-1} = \frac{q_1'}{q_n'}, \\
 \text{或は} & \quad q_1' = -\frac{q_{n-1}}{q_n}, \quad q_2' = -\frac{q_{n-2}}{q_n}, \quad \dots \dots \dots \quad q_{n-2}' = -\frac{q_2}{q_n}, \quad q_{n-1}' = -\frac{q_1}{q_n}, \\
 & q_n = 1 + q_1 + q_2 + \dots \dots \dots + q_{n-2} + q_{n-1}, \\
 & q_1' + q_2' + \dots \dots \dots + q_{n-1}' + q_n' = -1, \\
 \text{但し} & \\
 & q_1 = \frac{P_1}{P_0}, \quad q_2 = \frac{P_2}{P_0}, \quad \dots \dots \dots \quad q_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{P_0}, \quad q_n = \frac{P_n}{P_0}, \\
 & q_1' = -\frac{P_1'}{P_0'}, \quad q_2' = -\frac{P_2'}{P_0'}, \quad \dots \dots \dots \quad q_{n-1}' = -\frac{P_{n-1}'}{P_0'}, \quad q_n' = -\frac{P_n'}{P_0'}.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

此の研究に於ては便宜上 (a) 或は (b) を夫々 (b) 或は (a) の對柱⁽¹⁾であると假りに呼ぶこととする。

對柱の概念は上記の連續柱の性質を鮮明にする以外に尙ほ次の様な利便がある。例へば二格間の場合を考へれば、(34) 式によつて $q=0 \rightarrow \infty$ の變化は $q'=0 \rightarrow (-1)$ の變化に相當するから、座標に μ の曲線的變化を表はす場合に横軸に q' をもとれば $q'=0$ 乃至 (-1) の狭い區間に μ の凡ての變化を表現し得ることである。このことは本節後出の圖-11 に示してある通りである。

偕て前記の諸式によつて計算をやれば次の如くなる。

(1) 特殊場合： $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, c_1 = 1$ (對柱： $\lambda_1' = \lambda_2' = 2, c_1' = 1$)。

圖-11. 二格間第一種連續柱第一場合の μ -曲線 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$)。

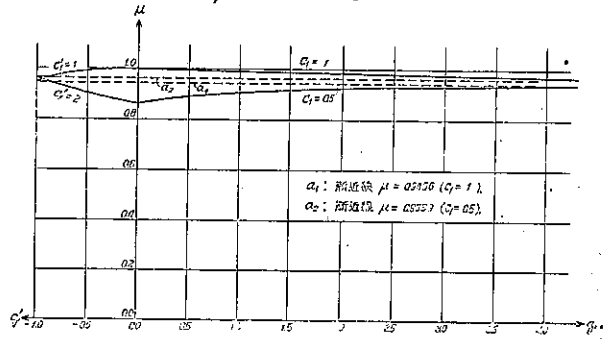


表-12 μ 及 $1:\sqrt{\mu}$ の數値

q	q'	x_0	μ	$1:\sqrt{\mu}$
0.0	0.0	$\pi:2$	1	1
0.5	-1:3	1.7185	0.9974	1.001
1.0	-0.5	1.8076	0.9932	1.004
1.5	-0.6	1.8670	0.9889	1.006
2.0	-2:3	1.9098	0.9855	1.007
2.5	-5:7	1.9415	0.9819	1.009
3.0	-3:4	1.9656	0.9787	1.011
4.0	-0.8	2.0010	0.9737	1.013
9.0	-0.9	2.0780	0.9625	1.019
19.0	-0.95	2.1180	0.9545	1.024
∞	-1.00	2.1602	0.9456	1.028

但し

$$2 \frac{\kappa x}{\tan \kappa x} + (1 - \gamma_1) \frac{x}{\tan x} = \frac{(1 + \gamma_1)^2}{3 - \gamma_1},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{1 - \gamma_1}{2}}, \quad \gamma_1 = \frac{q - 1}{q + 1}, \quad q = \frac{P_1}{P_0}, \quad q' = -\frac{q}{1 + q},$$

$$\mu = \frac{3 - \gamma_1}{\pi^2} x_0^2 = 0.101321 (3 - \gamma_1) x_0^2. \tag{a}$$

(a) 式により q の種々の値に対して μ を求むるときは表-12 を得る。³²⁾

こゝで $q = \infty$ に対する条件方程式は次の如くに求める。即ち q' が -1 より僅かに差違ありとし

$$q' = -1 + \varepsilon$$

と置けば

$$q = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \gamma_1 = 1 - 2\varepsilon, \quad \kappa = \sqrt{\varepsilon},$$

従つて

$$\frac{(1 + \gamma_1)^2}{3 - \gamma_1} = 2 \frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon}, \quad \frac{\kappa x}{\tan \kappa x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon x^2 + \frac{2}{15}\varepsilon^2 x^4 + \dots}$$

であるから上の条件方程式を

$$\frac{x}{\tan x} = \frac{1}{1 - \gamma_1} \left[\frac{(1 + \gamma_1)^2}{3 - \gamma_1} - 2 \frac{\kappa x}{\tan \kappa x} \right]$$

の如く書き換へた場合の右邊は結局

$$\text{右邊} = \frac{\frac{x^2}{3} - 3 + \varepsilon(\dots)}{1 + \varepsilon \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) + \dots}$$

となり極限の場合に

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{x^2}{3} - 3,$$

故に求むる条件方程式

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{3}{x^2 - 9}$$

が得られる。この式により $x_0 = 2.1602$ を得るのである。

尙この問題の場合と前章第三節の場合とを比較する爲に表-11 の μ' より (29), (30) 式によつて μ を求めて表-12 の數値と比較したのが表-13 である。

兩者の最大誤差は 0.5% であるから我々は十分な精確さを以て、前章第三節の如き中間縦等布荷重を負擔する問題を本節のこの特殊場合の如き中間縦集中荷重を負擔する問題を以て近似的に置換へ得ることが解る。之によつて条件方程式が著しく取扱ひ易くなるのである。

尙ほ兩者の換算率を比較すれば表-14 を得る。而して著者は前章第三節の問題の近似的解法として $P_0 + \frac{1}{2}P_1$ を端荷重と假定して

$$1: \sqrt{\mu} = 1$$

表-13. $\mu(W)$ 及 $\mu(P)$ の比較

v_0 或は q	$\mu(W)$	$\mu(P)$	$\mu(P) : \mu(W)$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000
0.50	0.9920	0.9974	1.0054
1.00	0.9924	0.9932	1.0008
1.50	0.9879	0.9889	1.0010
2.00	0.9836	0.9855	1.0019
∞	0.9407	0.9456	1.0052

表-14. 換算率の比較

v_0 或は q	$1 : \sqrt{\mu(W)}$	$1 : \sqrt{\mu(P)}$
0.00	1.00	1.00
0.50	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00
1.50	1.01	1.01
2.00	1.01	1.01
∞	1.03	1.03

とする一つの方法につき既述したが、表-14 により明かな如く前章第三節の中間縦等布荷重を中間縦集荷重を以て置換して本節の問題の如くに取扱ふ方法が、同節の問題の近似的解法として既述のものよりも精度更に高きことを知るのである。唯この場合条件方程式が稍複雑となるは止むを得ない。

(2) 特殊場合: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, c_1 = 0.5$ (對柱: $\lambda_1' = \lambda_2' = 2, c_1' = 2$).

c_1 に伴ふ μ の變化を見る爲にこの場合の計算をもすれば必要な公式は次の様になる。

$$2 \frac{\kappa x}{\tan \kappa x} + (1 - \gamma_1) \frac{x}{\tan x} = \frac{(1 + \gamma_1)^2}{3 - \gamma_1}$$

但し

$$\kappa = \sqrt{1 - \gamma_1},$$

$$\gamma_1, g, g' = (a) \text{ と同じ}$$

$$\mu = 2 \frac{3 - \gamma_1}{1.5} \cdot \frac{x_0^2}{\pi^2} = 0.135095 (3 - \gamma_1) x_0^2$$

} (6)

上式によつて計算して表-15 の數値を得た。

尙ほ表-12, 15 の μ の數値を圖示したのが圖-11 の二曲線である。

表-15 μ 及 $1 : \sqrt{\mu}$ の數値

q	q'	x_0	μ	$1 : \sqrt{\mu}$
0.0	0.0	1.2658	0.8658	1.0747
0.5	-1:3	1.4071	0.8915	1.0591
1.0	-0.5	1.4967	0.9078	1.0495
1.5	-0.6	1.5586	0.9189	1.0432
2.0	-2:3	1.6031	0.9258	1.0393
2.5	-5:7	1.6380	0.9319	1.0359
3.0	-3:4	1.6650	0.9362	1.0335
4.0	-0.8	1.7040	0.9414	1.0307
9.0	-0.9	1.7910	0.9533	1.0242
19.0	-0.95	1.8388	0.9592	1.0211
∞^*	-1.00	1.8888	0.9639	1.0186

第二節 端結条件第一場合の第二種二徑間

連続柱の撓屈 (圖-12)

圖-12. 二格間第二種連續柱第一場合

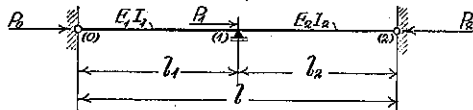


表-9 によつて中間格點の條件を表はす必要な小行列式を求めれば次の如くなる。

$$\overline{D}(A_1 C_1 A_2 D_2) = - \left(\frac{I_2}{m_1} \cos m_1 l_1 \sin m_2 l_2 \right.$$

$$- \frac{c_1 I_2}{m_2} \sin m_1 l_1 \cos m_2 l_2$$

$$\left. + \frac{c_1}{m_3^2} \sin m_1 l_1 \sin m_2 l_2 \right)$$

*) 此の場合の条件方程式は次の如くなる: $\tan x = \frac{3x}{2x^2 - 9}$

$$\overline{D}(A_1 D_1 A_2 D_2) = -l_2 \left[l_2 \left(\frac{1}{m_1} \cos m_1 l_2 \sin m_2 l_2 - \frac{c_1}{m_2} \sin m_1 l_2 \cos m_2 l_2 \right) + \left(\frac{c_1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1^2} \right) \sin m_1 l_2 \sin m_2 l_2 \right],$$

$$\overline{D}(B_1 C_1 A_2 D_2) = \frac{l_2}{m_1} \sin m_1 l_2 \sin m_2 l_2 + \frac{c_1 l_2}{m_2} \cos m_1 l_2 \cos m_2 l_2 - \frac{c_1}{m_2^2} \cos m_1 l_2 \sin m_2 l_2,$$

$$\overline{D}(B_1 D_1 A_2 D_2) = l_2 \left[l_2 \left(\frac{1}{m_1} \sin m_1 l_2 \sin m_2 l_2 + \frac{c_1}{m_2} \cos m_1 l_2 \cos m_2 l_2 \right) - \left(\frac{c_1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1^2} \right) \cos m_1 l_2 \sin m_2 l_2 \right],$$

これを表-10 に代入すれば次の条件方程式を得る。

$$\left[1 + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \right] \frac{\tan \kappa x \tan x}{x} = \kappa \tan x + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \tan \kappa x, \tag{36}$$

但し

$$x = m_2 l_2, \quad \kappa x = m_1 l_1, \quad \kappa = (\lambda_2 - 1) \sqrt{\frac{1 - \gamma_1}{2c_1}},$$

$$\gamma_1 = \frac{q - 1}{q + 1}, \quad q = \frac{P_1}{P_0}.$$

此の場合の係数 μ は (36) 式に $\kappa = 1$ を代入することによつて決まる。上式により次の 2 つの特殊場合につき計算をやる。

(1) 特殊場合: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, c_1 = 1$ (對柱: $\lambda_1' = \lambda_2' = 2, c_1' = 1$).

$$\left(1 + \frac{1 - \gamma_1}{2} \right) \frac{\tan \kappa x \tan x}{x} = \kappa \tan x + \frac{1 - \gamma_1}{2} \tan \kappa x, \tag{a}$$

但し

$$\left. \begin{matrix} \kappa \\ \gamma_1 \\ q \\ q' \\ \mu \end{matrix} \right\} = \text{前節 (a) 式に同じ}$$

(a) 式によつて μ の値を計算すれば表-16 を得る。

表-16. μ 及 $1 : \sqrt{\mu}$ の數値

q	q'	x_0	μ	$1 : \sqrt{\mu}$
0.0	-0.0	π	4	0.5
0.5	-1 : 3	3.3934	3.8892	0.5071
1.0	-0.5	3.5014	3.7266	0.5180
1.5	-0.6	3.5579	3.5913	0.5277
2.0	-2 : 3	3.5834	3.4694	0.5369
2.5	-5 : 7	3.6149	3.4046	0.5420
3.0	-3 : 4	3.6312	3.3400	0.5472
4.0	-0.8	3.6643	3.2651	0.5534
9.0	-0.9	3.6917	3.0380	0.5737
19.0	-0.95	3.7089	3.9269	0.5845
∞^*)	-1.00	3.7264	2.8139	0.5961

*) 此の場合の条件方程式は次の如くなる: $\tan x = \frac{3x}{3+x^2}$

(2) 特殊場合: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, c_1 = 0.5$ (對柱: $\lambda_1' = \lambda_2' = 2, c_1' = 2$).

$$\left(1 + \frac{1-\gamma_1}{2}\right) \frac{\tan \kappa x \tan x}{x} = \kappa \tan x + \frac{1-\gamma_1}{2} \tan \kappa x$$

但し

$$\left. \begin{matrix} \kappa \\ \gamma_1 \\ q \\ q' \\ \mu \end{matrix} \right\} = \text{前節 (b) 式に同じ}$$

}(b)

之によつて計算をすれば表-17 を得る。

而して μ の上の 2 組の數値を圖示するときは圖-13 の 2 曲線を得るのである。こゝで圖-11, 13 により μ の性質に關して次の事が解る。即ち

表-17. μ 及 $1/\sqrt{\mu}$ の數値

q	q'	x_0	μ	$1/\sqrt{\mu}$
0.0	0.0	2.5974	3.6457	0.5237
0.5	-1 : 3	2.9574	3.9384	0.5039
1.0	-0.5	π	4	0.5
1.5	-0.6	3.2404	3.9718	0.5018
2.0	-2 : 3	3.2989	3.9206	0.5050
2.5	-5 : 7	3.3326	3.8581	0.5091
3.0	-3 : 4	3.3630	3.8198	0.5117
4.0	-0.8	3.3972	3.7419	0.5170
9.0	-0.9	3.4561	3.5501	0.5307
19.0	-0.95	3.4824	3.4405	0.5391
∞^*	-1.00	3.5059	3.3210	0.5487

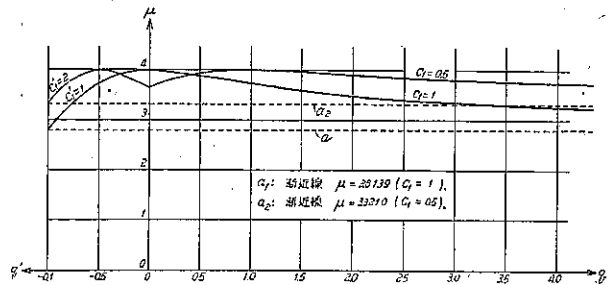
*) 此の場合の條件方程式は次の如くなる: $\tan x = \frac{3x}{3+2x^2}$

(i) $q = \infty$ の場合でも μ は $q = 0$ のときの値に近接せる漸近線を有し, q の變化に對しては極めて狭い範囲内で變化する。

(ii) c_1 の變化に對して μ の變化は著しく激しくはない。

之は本文に於ける捩屈限界荷重の決め方から來る性質で, 第一種及第二種連續柱の端結條件の各場合を通じてこの事は凡そ言ひ得ることである。

圖-13. 二徑間第二種連續柱第一場合の μ -曲線 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$).



尚ほ q' -軸の上に表はされた q' - μ 曲線は q - μ 曲線よりも更に簡單で且つ概括的な曲線であることも上の例で見られる通りである。

第三節 前二節以外の端結条件の場合の二格間連続柱に関する捩屈条件方程式

前二節に述べたと全く同様の方法により 表-8, 9, 10 を使用して二格間連続柱の端結条件第二, 三, 四, 五 場合に關する次の条件方程式を得る。

(I) 第一種連續柱

(1) 第二場合:

$$\left. \begin{aligned} \kappa \tan \kappa x \tan x &= \frac{\lambda_2 - 1}{c_1}, \\ \mu &= 2\lambda_2^2 \frac{2 + (1 - \gamma_1)(\lambda_2 - 1)}{1 + c_1(\lambda_2 - 1)} \cdot \frac{x_0^2}{\pi^2}, \\ x, \kappa, \gamma_1, q &: (32), (36) \text{ 式におけると同様 (以下之に準ず)。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

(2) 第三場合:

$$\left. \begin{aligned} x \left(\frac{1 + \gamma_1}{2} - \lambda_2 \right) \left(\tan x + \frac{\lambda_2 - 1}{\kappa c_1} \tan \kappa x \right) &+ \left(\frac{\kappa}{\lambda_2 - 1} + \frac{\lambda_2 - 1}{\kappa} \right) \tan \kappa x \tan x \\ &= \frac{3 + \gamma_1^2}{1 - \gamma_1} \frac{2}{\cos \kappa x \cos x} - \frac{2p}{\cos \kappa x} + \frac{1 + \gamma_1}{\cos x}, \\ \mu &= \frac{\lambda_2^2}{8} \frac{2 + (1 - \gamma_1)(\lambda_2 - 1)}{1 + c_1(\lambda_2 - 1)} \cdot \frac{x_0^2}{\pi^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(3) 第四場合:

$$\left. \begin{aligned} x \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_2}{1 + \gamma_1} \right) \left(\tan \kappa x \tan x - \frac{\lambda_2 - 1}{\kappa c_1} \right) \\ &= \frac{1 + \gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2} \tan \kappa x + \frac{\kappa}{(\lambda_2 - 1)(1 + \gamma_1)} \tan x + \frac{\tan \kappa x}{\cos x}, \\ \mu &= \frac{\lambda_2^2}{4.091} \frac{2 + (1 - \gamma_1)(\lambda_2 - 1)}{1 + c_1(\lambda_2 - 1)} \cdot \frac{x_0^2}{\pi^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

(4) 第五場合:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\kappa x}{\lambda_2 - 1} \left(\lambda_2 - \frac{1 + \gamma_1}{2} \right) \left(\tan \kappa x \tan x - \frac{\kappa c_1}{\lambda_2 - 1} \right) \\ &= (1 + \gamma_1) \frac{\tan x}{\cos \kappa x} - \left[1 + \frac{(1 + \gamma_1)^2}{4} \right] \tan x - \frac{\kappa c_1}{\lambda_2 - 1} \tan \kappa x, \\ \mu &= (39) \text{ 式と同じ。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

(II) 第二種連續柱

(1) 第二場合:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \kappa x \tan \kappa x \right) \kappa \tan x &= \kappa x + (1 - \gamma_1)(\lambda_2 - 1) \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \tan \kappa x, \\ \mu &= (37) \text{ 式と同じ。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

(2) 第三場合:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \right) \kappa x \tan \kappa x \tan x &+ \sqrt{2c_1(1 - \gamma_1)} \left(1 - \frac{\lambda_2 - 1}{2c_1} x^2 \right) \tan \kappa x + \left(2 - \frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \kappa^2 x^2 \right) \tan x \\ &= \frac{2}{\cos \kappa x} (\tan x - x) + \frac{\sqrt{2c_1(1 - \gamma_1)}}{\cos x} (\tan \kappa x - \kappa x) + [2 + (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1)]x, \\ \mu &= (38) \text{ 式と同じ。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

(3) 第四場合:

$$\left. \begin{aligned} \tan \kappa x \left[(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) - 1 \right] + \kappa x = \kappa \tan x \left[\frac{\tan \kappa x}{\kappa x} \left\{ \frac{x^2}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) + 1 \right\} + 1 \right], \\ \mu = (39) \text{ 式と同じ。} \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

(4) 第五場合:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\tan x}{\cos \kappa x} + \kappa x \left(\frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \cdot \frac{1}{x^2} - 1 \right) \tan \kappa x \tan x + \frac{x}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \\ = \left[2 + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \right] \tan x + \frac{c_1 \kappa}{\lambda_2 - 1} \tan \kappa x, \\ \mu = (39) \text{ 式と同じ。} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

第三部 捩屈条件誘導及最小根計算に関する簡便法

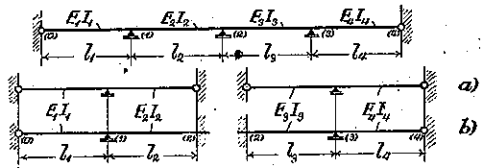
第一章 第二種連續柱の捩屈条件方程式を求むる簡便法

H. Zimmermann は今より約 30 年以前に第二種連續柱の捩屈条件行列式の一つの性質として所謂部分法則の成立することを指摘したのである³⁴⁾。即ち或る第二種連續柱の捩屈条件行列式は、之を任意の中間格點にて截切した場合の 2 個の部分柱に於て、この截切端が異なる 2 種の端結条件即ち

- i) 角變位自由 (鉸節)
- ii) 角變位零 (固定)

の假定によつて決定さるゝ異なる 4 個の假定的部分柱の捩屈条件行列式の特定の組合せによつて與へられる。例へば 圖-14 の様な四徑間の第二種連續柱を考へ、問題の截切點を中間格點 2 とするときには上記の法則の内容は次の如くに表現される。

圖-14. 四徑間第二種連續柱と部分柱



$$D_{0.4} = (D_{0.2})_b (D_{2.4})_a + (D_{0.2})_a (D_{2.4})_b,$$

但し

$$\left. \begin{aligned} D_{0.4}: & \text{ 連續柱 (0.4) の捩屈条件行列式,} \\ (D_{0.2})_a, (D_{2.4})_a: & \text{ 部分柱 (0.2), (2.4) の截切端 2 を鉸節の端結条件} \\ & \text{とした場合の夫々捩屈条件行列式,} \\ (D_{0.2})_b, (D_{2.4})_b: & \text{ 部分柱 (0.2), (2.4) の截切端 2 を固定の端結条件} \\ & \text{とした場合の夫々捩屈条件行列式.} \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

此も部分法則はそれが本來の連續柱とその部分柱との捩屈条件行列式の間を關係を闡明する以外に從來餘り積極的意味を有しなかつたやうであるが、著者は第二種連續柱に関する限り、此の法則を使用して捩屈条件方程式に到達すべき困難にして危険多き道筋を簡易化することを意圖して之に成功し、上の法則に積極性を加へ得た。

法則 (45) を見れば明かな如く、我々は若し部分柱の捩屈条件行列式 $(D_{0.2})_a, (D_{2.4})_a, (D_{0.2})_b, (D_{2.4})_b$ を適當に決める場合には、之等を法則 (45) に従つて組合せることによつて、本來の連續柱の捩屈に関する高次の条件行列式の展開式にその高次の行列式を直接に經由することなしに到達することが出来る。その合成の要素たるべき部

分柱の捩屈條件行列式自身の展開式が既に更にそれを截切して得られる低次の部分柱の捩屈條件行列式の展開式の前と全く同様の合成的組合せに依つて得られる。かくして最簡なる場合の部分柱に関する捩屈條件行列式の展開式より出發して、部分法則を利用する逐次合成的方法によつて如何なる多徑間の第二種連續柱に對しても一般的な捩屈條件行列式の展開式を迅速に求め得るのである。而してかくして得られたる條件行列式の展開式はそれ自身條件方程式を與へるのみならず、更に高次の條件行列式の展開式を求むる爲の必要なる要素として保留し得るの意味で二重の效能を有する。

先づ最簡なる場合即ち一格間の場合の以上の目的の爲に適切に決めらるべき捩屈條件行列式とその展開式は表-7 より端結條件の各場合に就て次の如くなる。唯此の場合には表-7 では省略されてゐた $-EI$ を元に戻すこと、第一場合の條件 3 及 4 の順序を入れ換へるだけの修正を要する。但し単一格間ではあるが合成の關係上一般的に之を格間 l_i を以て表はした。

第一場合：

$$\begin{vmatrix} -\frac{\cos m_i l_i}{m_i^2} & -\frac{\sin m_i l_i}{m_i^2} & l_i & 1 \\ -\frac{1}{m_i^2} & 0 & 0 & 1 \\ -E_i I_i & 0 & 0 & 0 \\ -E_i I_i \cos m_i l_i & -E_i I_i \sin m_i l_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = + (E_i I_i)^2 l_i \sin m_i l_i, \dots\dots\dots(46)$$

但し

$$m_i = \sqrt{\frac{O_{i-1}}{E_i I_i}}$$

第二場合：

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{m_i^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m_i} & 1 & 0 \\ -E_i I_i \cos m_i l_i & -E_i I_i \sin m_i l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i^2 & 0 \end{vmatrix} = + E_i I_i m_i \cos m_i l_i \dots\dots\dots(47)$$

第三場合：

$$\begin{vmatrix} -\frac{\cos m_i l_i}{m_i^2} & -\frac{\sin m_i l_i}{m_i^2} & l_i & 1 \\ -\frac{1}{m_i^2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sin m_i l_i}{m_i} & -\frac{\cos m_i l_i}{m_i} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_i} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{m_i^2} \left(1 - \cos m_i l_i - \frac{m_i l_i}{2} \sin m_i l_i \right) \dots\dots\dots(48)$$

第四場合：

$$\begin{vmatrix} -\frac{\cos m_i l_i}{m_i^2} & -\frac{\sin m_i l_i}{m_i^2} & l_i & 1 \\ -\frac{1}{m_i^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m_i} & 1 & 0 \\ -E_i I_i \cos m_i l_i & -E_i I_i \sin m_i l_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{E_i I_i}{m_i^2} (m_i l_i \cos m_i l_i - \sin m_i l_i) \dots\dots\dots(49)$$

第五場合：

$$\begin{vmatrix} -\frac{\cos m_1 l_1}{m_1^2} & -\frac{\sin m_1 l_1}{m_1^2} & l_1 & 1 \\ -\frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sin m_1 l_1}{m_1} & -\frac{\cos m_1 l_1}{m_1} & 1 & 0 \\ -E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{E_1 I_1}{m_1^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1) \dots \dots \dots (50)$$

この 5 個の展開式が高次の條件行列式の展開式を得る爲の基本函数である。尙ほ此の研究に於ては縦集中荷重のみの場合を取扱つた、第二部で行つた簡単な計算例に依つて縦等布荷重は十分の精確さを以て適當に假定せられた縦集中荷重によつて近似的に置換へられ得る事を知るからである。

今上の基本函数より二、三の問題の撓屈條件式の誘導を試みて見る。

(I) 第二部第二章の第二種二徑間連續柱の各場合

(1) 第一場合

$$(D_{0,1})_a = (E_1 I_1)^2 l_1 \sin m_1 l_1, \quad (D_{1,2})_a = (E_2 I_2)^2 l_2 \sin m_2 l_2,$$

$$(D_{0,1})_b = -\frac{E_1 I_1}{m_1^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1), \quad (D_{1,2})_b = -\frac{E_2 I_2}{m_2^2} (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2).$$

然るに

$$D_{0,2} = (D_{0,1})_b (D_{1,2})_a + (D_{0,1})_a (D_{1,2})_b$$

であるから此の場合の撓屈條件行列式の展開式は

$$D_{0,2} = -(E_1 I_1)(E_2 I_2)^2 \frac{l_2}{m_1^2} \sin m_2 l_2 (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1) - (E_1 I_1)^2 (E_2 I_2) \frac{l_1}{m_2^2} \sin m_1 l_1 (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2) \dots \dots \dots (51)$$

従つて條件方程式は $D_{0,2} = 0$ と置くことに依つて得られる。結局次の如くに求め得られるのである。

$$\kappa \tan \alpha + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \tan \kappa x = \frac{\tan \alpha \tan \kappa x}{x} \left[1 + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \right].$$

之は即ち條件方程式 (36) に外ならない。前述の様に (51) 式は更に多徑間の第二種連續柱のこの簡便法による解法に利用される。

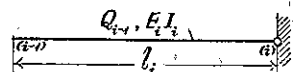
(2) 第二場合

$$(D_{0,1})_a = -(E_1 I_1)^2 m_1^2 \sin m_1 l_1, \quad (D_{1,2})_a = -\frac{E_2 I_2}{m_2^2} (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2),$$

$$(D_{0,1})_b = E_1 I_1 m_1 \cos m_1 l_1, \quad (D_{1,2})_b = \frac{2}{m_2^3} \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2 \right).$$

此の場合の $(D_{0,1})_a$ の式形は未だ求めてゐないのでこゝで求める必要があるが、之は事實上存在し得ない假想的な一格間柱の場合である(圖-15)。この端結條件は第一部、第一章、(a) の條件により、格點 i についてはその (i) 及 (iii)、格點 $i-1$ については (iii) 及 (iv) から成り立つので假想撓屈條件行列式及其展開式は次の様に決められる。

圖-15. 假想的一格間柱



$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{m_i^2} & 0 & 0 & 1 \\ -E_i I_i & 0 & 0 & 0 \\ -E_i I_i \cos m_i l_i & -E_i I_i \sin m_i l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i^2 & 0 \end{pmatrix} = -(E_i I_i)^2 m_i^2 \sin m_i l_i \dots \dots \dots (52)$$

上の 4 個の捩屈条件行列式の部分法則による合成の結果

$$D_{0,2} = -(E_1 I_1)(E_2 I_2) \frac{m_1}{m_2^2} \cos m_1 l_1 (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2) - 2(E_1 I_1)^2 \frac{m_1^2}{m_2^3} \sin m_1 l_1 \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2\right) \dots \dots \dots (53)$$

が得られる。従つて捩屈条件方程式は之を零と置くことにより、

$$\kappa \tan \kappa \left(\frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \kappa x \tan \kappa x + 1 \right) = \kappa x + (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \tan \kappa x$$

となつて前記条件方程式 (41) が得られる。

(3) 第三場合

$$(D_{0,1})_a = -\frac{E_1 I_1}{m_1^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1), \quad (D_{1,2})_a = -\frac{E_2 I_2}{m_2^2} (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2),$$

$$(D_{0,1})_b = \frac{2}{m_1^3} \left(1 - \cos m_1 l_1 - \frac{m_1 l_1}{2} \sin m_1 l_1\right), \quad (D_{1,2})_b = \frac{2}{m_2^3} \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2\right).$$

従つて捩屈条件行列式の展開式は

$$D_{0,2} = -\frac{2E_1 I_1 E_2 I_2}{m_1^3 m_2^2} \left(1 - \cos m_1 l_1 - \frac{m_1 l_1}{2} \sin m_1 l_1\right) (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2) - \frac{2E_1 I_1^2}{m_1^2 m_2^3} \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2\right) (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1) \dots \dots \dots (54)$$

之を零に置くことによつて得られる条件方程式は

$$\left(1 + \frac{c_1}{\lambda_2 - 1}\right) \kappa x \tan \kappa x \tan x + \sqrt{2} c_1 (1 - \gamma_1) \left(1 - \frac{\lambda_2 - 1}{2c_1} x^2\right) \tan \kappa x + \left(2 - \frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \kappa^2 x^2\right) \tan x = \sqrt{2} c_1 (1 - \gamma_1) \frac{\tan \kappa x - \kappa x}{\cos x} + 2 \frac{\tan x - x}{\cos \kappa x} + [2 + (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1)] x$$

となり条件方程式 (42) と一致する。

(4) 第四場合

$$(D_{0,1})_a = (E_1 I_1)^2 l_1 \sin m_1 l_1, \quad (D_{1,2})_a = -\frac{E_2 I_2}{m_2^2} (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2),$$

$$(D_{0,1})_b = -\frac{E_1 I_1}{m_1^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1), \quad (D_{1,2})_b = \frac{2}{m_2^3} \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2\right).$$

従つて捩屈条件行列式の展開式は

$$D_{0,2} = \frac{(E_1 I_1)(E_2 I_2)}{m_1^2 m_2^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1) (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2) + 2 \frac{(E_1 I_1)^2}{m_2^3} l_1 \sin m_1 l_1 \left(1 - \cos m_2 l_2 - \frac{m_2 l_2}{2} \sin m_2 l_2\right) \dots \dots \dots (55)$$

之を零と置くことによつて得られる条件方程式は

$$\tan \kappa x \left[(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) - 1 \right] + \kappa x = \kappa \tan x \left[\frac{\tan \kappa x}{\kappa x} \left\{ \frac{x^2}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) - 1 \right\} + 1 \right]$$

となり條件方程式 (43) と一致する。

(5) 第五場合

$$(D_{0,1})_a = -\frac{E_1 I_1}{m_1^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1), \quad (D_{1,2})_a = (E_2 I_2)^2 l_2 \sin m_2 l_2,$$

$$(D_{0,1})_b = \frac{2}{m_1^2} \left(1 - \cos m_1 l_1 - \frac{m_1 l_1}{2} \sin m_1 l_1 \right), \quad (D_{1,2})_b = -\frac{E_2 I_2}{m_2^2} (m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2).$$

従つて捩屈條件行列式の展開式は

$$D_{0,2} = 2 \frac{(E_2 I_2)^2}{m_1^2 m_2^2} m_2 l_2 \sin m_2 l_2 \left(1 - \cos m_1 l_1 - \frac{m_1 l_1}{2} \sin m_1 l_1 \right) + \frac{(E_1 I_1)(E_2 I_2)}{m_1^2 m_2^2} (m_1 l_1 \cos m_1 l_1 - \sin m_1 l_1)(m_2 l_2 \cos m_2 l_2 - \sin m_2 l_2) \dots \dots \dots (56)$$

之を零と置くことによつて得られる條件方程式は

$$2 \frac{\tan x}{\cos \kappa x} + \left(\frac{c_1}{\lambda_2 - 1} \frac{1}{x^2} - 1 \right) \kappa x \tan x \tan \kappa x + (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \frac{x}{2} = \left[2 + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_1) \right] \tan x + \frac{\kappa c_1}{\lambda_2 - 1} \tan \kappa x$$

となり條件方程式 (44) と一致する。かくの如くに第二部第二章に於て相當の勞力を費して求められたる捩屈條件方程式が此の方法によつて極めて安易に且つ迅速に求まるのである。

(II) 第二種四徑間連續柱端結條件第一場合の捩屈條件方程式 (圖-16).

部分法則によつて此の場合の捩屈條件行列式は連續柱 (0.4) を中間格點 (2) にて截切したる部分柱 (0.2), (2.4) に關する捩屈條件行列式で表はされる。即ち

$$D_{0,4} = (D_{0,2})_b (D_{2,4})_a + (D_{0,2})_a (D_{2,4})_b,$$

この式の右邊の4個の量は本章計算例 (I) に於て求められた既知量である。即ちこの問題の場合には

$$(D_{0,2})_a = \text{公式 (51)}, \quad (D_{2,4})_a = \text{公式 (51)},$$

$$(D_{0,2})_b = \text{公式 (55)}, \quad (D_{2,4})_b = \text{公式 (56)},$$

唯 $(D_{2,4})_a, (D_{2,4})_b$ の場合には徑間 l_2, l_3 の二徑間柱であるから公式 (51), (56) の添數 (suffix) に 2 を加へる必要がある。今記號として

$$m_4 l_4 = x, \quad m_1 l_1 = \kappa_1 x, \quad m_2 l_2 = \kappa_2 x, \quad m_3 l_3 = \kappa_3 x \dots \dots \dots (57)$$

を使用すれば捩屈條件行列式は此の場合

$$D_{0,4} = -\frac{(E_1 I_1)(E_2 I_2)(E_3 I_3)(E_4 I_4)^2}{m_1^2 m_2^2 m_3^2 m_4^2} \cos \kappa_1 x \cos \kappa_2 x \cos \kappa_3 x \cos x \left[(\kappa_1 x - \tan \kappa_1 x)(\kappa_2 x - \tan \kappa_2 x) \right. \\ \left. + 2c_1 \frac{m_1}{m_2} \kappa_1 x \tan \kappa_1 x \left\{ \left(\frac{1}{\cos \kappa_2 x} - 1 \right) - \frac{\kappa_2 x}{2} \tan \kappa_2 x \right\} \right] \cdot \left[x \tan x (\kappa_3 x - \tan \kappa_3 x) \right. \\ \left. + c_3 \frac{m_3}{m_4} \kappa_3 x \tan \kappa_3 x (x - \tan x) \right]$$

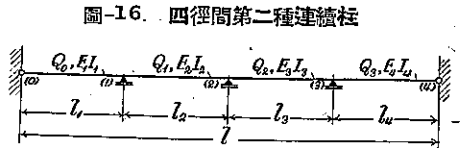


圖-16. 四徑間第二種連續柱

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(E_1 I_1)(E_2 I_2)^2(E_3 I_3)^2}{m_1^2 m_2 m_3^2 m_4} \cos \kappa_1 x \cos \kappa_2 x \cos \kappa_3 x \cos x \left[\kappa_2 x \tan \kappa_2 x (\kappa_1 x - \tan \kappa_1 x) \right. \\
 & + c_1 \frac{m_1}{m_2} \kappa_1 x \tan \kappa_1 x (\kappa_2 x - \tan \kappa_2 x) \left. \right] \cdot \left[2x \tan x \left\{ \left(\frac{1}{\cos \kappa_2 x} - 1 \right) - \frac{\kappa_2 x}{2} \tan \kappa_2 x \right\} \right. \\
 & \left. + c_3 \frac{m_3}{m_4} (\kappa_3 x - \tan \kappa_3 x)(x - \tan x) \right] \dots \dots \dots (58)
 \end{aligned}$$

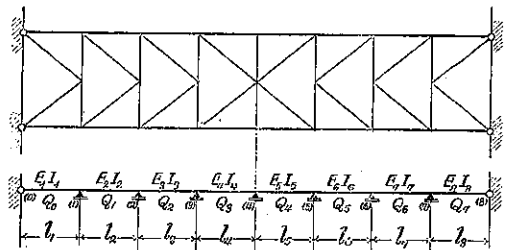
となり、条件方程式は之を零に等しく置くことによつて得られる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\kappa_1 x - \tan \kappa_1 x)(\kappa_2 x - \tan \kappa_2 x) + c_1 \frac{m_1}{m_2} \kappa_1 x \tan \kappa_1 x \left[2 \left(\frac{1}{\cos \kappa_2 x} - 1 \right) - \kappa_2 x \tan \kappa_2 x \right]}{c_3 \frac{m_3}{m_4} (\kappa_3 x - \tan \kappa_3 x)(x - \tan x) + x \tan x \left[2 \left(\frac{1}{\cos \kappa_2 x} - 1 \right) - \kappa_2 x \tan \kappa_2 x \right]} \\
 & = - c_2 \frac{m_2}{m_3} \frac{\kappa_2 x \tan \kappa_2 x (\kappa_1 x - \tan \kappa_1 x) + c_1 \frac{m_1}{m_2} \kappa_1 x \tan \kappa_1 x (\kappa_2 x - \tan \kappa_2 x)}{x \tan x (\kappa_3 x - \tan \kappa_3 x) + c_3 \frac{m_3}{m_4} \kappa_3 x \tan \kappa_3 x (x - \tan x)} \dots \dots \dots (59)
 \end{aligned}$$

之は表-7, 9, 10 を使用する正攻法によつても 又他の例へば Zimmermann の方法の如きによつても全く同一の結果に到達する。唯その到達のし方が本章の部分法則に基く逐次合成的方法によるときは迅速を極めるのである。

圖-17. 上構橋弦材の捩屈

(III) 橋梁の横構を有する上弦の側方捩屈に對しても全く之と同様にして條件式に達し得る。一例として兩端を鉸節と見做し得る八格間上弦の横構との連結が矢張り鉸節と考へるときは此の問題は本研究の八徑間第二種連續柱第一場合として取扱ひ得る(圖-17)。



従つて格點(4)にて之を2個の部分柱に截切するときは

$$D_{0,s} = (D_{0,4})_b (D_{4,s})_a + (D_{0,4})_a (D_{4,s})_b \dots \dots (45a)$$

なる條件行列式の關係を得るが、格點(4)に關して

- (i) 撓「モーメント」の配列が對稱である
- (ii) 軸壓力の配列が對稱である
- (iii) 徑間長の配列が對稱である

と假定すれば條件

$$(D_{0,4})_a = (D_{4,s})_a, \quad (D_{0,4})_b = (D_{4,s})_b \dots \dots \dots (60)$$

が成立するから捩屈條件式は次の様になる。

$$D_{0,s} = 2(D_{0,4})_a (D_{6,4})_b = 0 \dots \dots \dots (61)$$

之より誘導される2つの條件の中、部分柱の截切端を鉸節と假定した場合がより小なる最小根を與へるから、結局此の問題の捩屈條件方程式は

$$(D_{0,4})_a = 0 \dots \dots \dots (62)$$

となり、之は即ち前方程式(59)に外ならない。かゝる對稱の性質に關しては Ratzersdorfer も指摘してある處である。³⁰⁾

尙部分法則(45a)は圖-18 c)の如き格點(4)でのみ横支點を有する八格間二徑間第二種連續柱にも適用し得る

ので、³⁷⁾ 格點 (4) に關する前例と同一の對稱の條件を假定すれば此の場合の挫屈條件方程式も (62) 式と全く同形となる。唯このときの $(D_{0,4})_a$ の内容は第一種連續柱に關する表-7, 8, 10 によつて定まる。

更に一般的に圖-18 の如き連續柱が格點 (4) に關して非對稱なる場合は (45a) 式を零に等しく置く事によつて得らるゝ條件式

$$\frac{(D_{0,4})_a}{(D_{4,8})_a} = -\frac{(D_{0,4})_b}{(D_{4,8})_b} \dots \dots \dots (63)$$

によつて、直接八格間二徑間連續柱に對する高次行列式を取扱ふことなしに挫屈條件式が與へられるのである。此の式形の場合の 4 要素 $(D_{0,4})_a, (D_{4,8}), (D_{0,4})_b, (D_{4,8})_b$ は矢張り表-7³⁸⁾, 8, 10 によつて定められた形をその儘 (63) 式に代入するのであつて不均等な加工を代入前の 4 要素に加へてはならないことは言ふまでもない。

上述の様に第二種連續柱は部分法則による便利な性質を有し、之によつて我々は挫屈條件方程式に可成り迅速に到達し得るのであるが、この間の事情は嘗つて Ratzersdorfer³⁹⁾ が第二種連續柱に關する彼の解法に於て R. von Mises の示唆によつて創案せる未知量數を遑限する方法を想起せしめるに十分である。

第二章 最小根の似値算出に關する簡便法

前章に於て著者は挫屈條件方程式に達する第一の困難を第二種連續柱に關する限り或る程度輕減し得たのであるが、更にこの求められた條件方程式によりその最小根を試索的に恰も暗中摸索せむとする第二の困難をも力學的に輕減すべき方法を著者は本章に於て試みたのである。

第一節 第一種連續柱

第一種連續柱の Q-ダイヤグラムの高さが一定即ち Q' であり、撓「モーメント」が一定値 E'I' である場合には挫屈限界荷重は

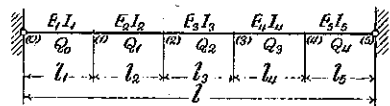
$$Q' = \alpha \frac{\pi^2 E' I'}{l^2}$$

但し

α : 表-A 記載の數値

である。圖-19 の如き第一種連續柱の軸壓力 $Q_0 \dots Q_4$ 、撓「モーメント」 $E_1 I_1 \dots E_5 I_5$ が夫々略一定に近きものとすれば、かゝる問題の挫屈條件方程式の與へる最小根は單一格間柱のその最小限と極めて良く近接すべきことが豫想される。然るときは挫屈限界荷重の近似値として上式を採用することが出来るだらう。従つて最小根算出の爲の近似式は圖-19 の五格間の場合についてやれば次の様に誘導することが出来る。

圖-19. 五格間第一種連續柱



格間長を重みとする平均軸壓力

$$= \frac{1}{l} (l_1 Q_0 + l_2 Q_1 + \dots + l_5 Q_4) = \frac{Q_0}{\lambda_1} + \frac{Q_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{Q_4}{\lambda_5}$$

格間長を重みとする平均撓「モーメント」

$$= \frac{E_1 I_1}{\lambda_1} + \frac{E_2 I_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{E_5 I_5}{\lambda_5} = E' I'$$

従つて

$$Q' = Q_0 \left(\frac{Q_0}{Q_0} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{Q_1}{Q_1} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_5} \right)$$

$$E' I' = E_5 I_5 \left(\frac{E_1 I_1}{E_5 I_5} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{E_2 I_2}{E_5 I_5} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_5} \right) = E_5 I_5 \left(\frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{\lambda_1} + \frac{c_2 c_3 c_4}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_5} \right)$$

今

$$m_0 l_0 = l_0 \sqrt{\frac{Q_4}{E_0 I_0}} = x$$

とすれば

$$m'l = l \sqrt{\frac{Q'}{E'I'}} = \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{Q_4} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{Q_1}{Q_4} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_5}}{\frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{\lambda_1} + \frac{c_2 c_3 c_4}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_5}}} \lambda_5 x$$

となり、他方一格間第一種連續柱としての根 $m'l$ の最小値は

$$m'l = \sqrt{\alpha \pi}$$

なる関係があるから問題の五格間第一種連續柱の最小根の近似値 x を與ふべき表式は次の様になる。

$$x = \frac{\sqrt{\alpha \pi}}{\phi \lambda_5},$$

但し

$$x = m_0 l_0,$$

$$\sqrt{\alpha} = \text{表-B 記載の數値},$$

$$\phi = \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{Q_4} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{Q_1}{Q_4} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{Q_5}{Q_4} \cdot \frac{1}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_5}}{\frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{\lambda_1} + \frac{c_2 c_3 c_4}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_5}}} \quad (40)$$

} (64)

今二格間第一種連續柱の端結條件の種類の場合につき、公式(32), (37), (38), (39), (40)による精確なる方法と(64)式による近似的方法とによつて x の最小値の比較計算をやれば次の様になる。

(I) 第一場合

$$(64) \quad \phi = \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{Q_1} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}{\frac{c_1 + 1}{\lambda_1 + \lambda_2}}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{1+q}\right) \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}{\frac{c_1 + 1}{\lambda_1 + \lambda_2}}}, \quad x = \frac{\pi}{\phi \lambda_2},$$

特殊場合 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2: \quad \phi = \sqrt{\frac{2+q}{(1+c_1)(1+q)}}, \quad x = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\phi}{2}\right).$

(1) $c_1 = 1: \quad \phi = \sqrt{\frac{2+q}{2(1+q)}},$

(2) $c_1 = 0.5: \quad \phi = \sqrt{\frac{2+q}{1.5(1+q)}}.$

但し $x =$ 近似的方法による根 $m_0 l_0$ の最小値,

$x_0 =$ 精確なる方法 " "

(II) 第二場合

$\phi:$ 第一場合と同様

$$x = \frac{\pi}{2\phi \lambda_2} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{特殊場合 } \lambda_1 = \lambda_2 = 2).$$

表-B. $\sqrt{\alpha}$ の數値

端結條件の種類	1	2	3	4 及 5
$\sqrt{\alpha}$	1	0.5	2	1.4303

表-18. α 及 α_e の比較 ($c_1=1$).

q	α	α_e	$\alpha:\alpha_e$
0.0	$\pi:2$	$\pi:2$	1
0.5	1.7207	1.7185	1.0013
1.0	1.8138	1.8076	1.0034
1.5	1.8775	1.8670	1.0056
2.0	1.9238	1.9098	1.0073
2.5	1.9591	1.9415	1.0091
3.0	1.9869	1.9656	1.0108
4.0	2.0279	2.0010	1.0134
9.0	2.1181	2.0780	1.0193
19.0	2.1679	2.1180	1.0236
∞	2.2214	2.1602	1.0283

表-19. α 及 α_e の比較 ($c_1=0.5$).

q	α	α_e	$\alpha:\alpha_e$
0.0	1.3603	1.2658	1.0747
0.5	1.4902	1.4071	1.0590
1.0	1.5708	1.4967	1.0495
1.5	1.6259	1.5586	1.0432
2.0	1.6661	1.6031	1.0393
2.5	1.6967	1.6380	1.0358
3.0	1.7207	1.6650	1.0335
4.0	1.7562	1.7040	1.0306
9.0	1.8343	1.7910	1.0242
19.0	1.8775	1.8388	1.0210
∞	1.9238	1.8888	1.0186

(III) 第三場合

ϕ : 第一場合と同様

$$\alpha = \frac{2\pi}{\phi\lambda_2} = \frac{1}{\phi}(\pi), \text{ (特殊場合 } \lambda_1 = \lambda_2 = 2).$$

(IV) 第四及第五場合

ϕ : 第一場合と同様

$$\alpha = \frac{1.4303\pi}{\phi\lambda_2} = \frac{2.2467}{\phi}, \text{ (特殊場合 } \lambda_1 = \lambda_2 = 2).$$

これらの4個の場合については兩極限の場合 $q=0$ 及 $q=\infty$ に對して比 $\alpha:\alpha_e$ を算出した。 q の中間の値に對しては比 $\alpha:\alpha_e$ も亦略兩者の値の中間に位するからであり、表-19, 20 がそれである。

表-19. α 及 α_e の比較 ($c_1=1$)

端結條件の種類	α		α_e		$\alpha:\alpha_e$	
	$q=0$	$q=\infty^{(1)}$	$q=0$	$q=\infty$	$q=0$	$q=\infty$
2	$\pi:4$	1.1107	$\pi:4$	1.5708	1	0.7071
3	π	4.4429	π	4.3128	1	1.0302
4	2.2467	3.1773	2.2467	3.4401	1	0.9236
5	2.2467	3.1773	2.2467	2.7778	1	1.1438

表-20. α 及 α_e の比較 ($c_1=0.5$)

端結條件の種類	α		α_e		$\alpha:\alpha_e$	
	$q=0$	$q=\infty^{(1)}$	$q=0$	$q=\infty$	$q=0$	$q=\infty$
2	0.6802	0.9619	0.7189	1.5708	0.9462	0.6124
3	2.7207	3.8477	2.5421	3.8133	1.0703	1.0090
4	1.9457	2.7516	1.7742	2.9333	1.0967	0.9381
5	1.9457	2.7516	1.9341	2.5554	1.0060	1.0768

上の比較計算によつて明かな様に端結條件の第二場合を除く以外の各場合に就ては、 q の凡ての値に對して上の方法は良好な x の近似値を與へるものなることが解る。第二場合は $q = \infty$ のときの比が $c_1 = 1$ 及 $c_1 = 0.5$ に對して夫々 0.7071 及 0.6124 であるが、この場合について更に比較計算をやつた表-21 の示す様に q の實用的な範圍内に於てはこの方法は第二場合に對しても可成り良好な近似値を與へることが解るのである。

表-21. 第二場合の比 $x : x_c$ の變化

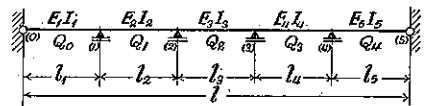
q	$x : x_c$		q	$x : x_c$	
	$c_1 = 1$	$c_1 = 0.5$		$c_1 = 1$	$c_1 = 0.5$
0.0	1	0.9462	3.0	0.8072	0.7214
0.5	0.9354	0.8727	4.0	0.7878	0.6978
1.0	0.8919	0.8221	9.0	0.7460	0.6509
1.5	0.8610	0.7858	19.0	0.7258	0.6140
2.0	0.8383	0.7586	∞	0.7071	0.6124
2.5	0.8208	0.7374			

第二節 第二種連續柱

圖-20 の如き五格間五徑間第二種連續柱を一例として考へて見ることにする。かゝる第二種連續柱は次の3條件即ち

- (i) 一定なる軸壓力を有すること
- (ii) 一定なる撓「モーメント」を有すること
- (iii) 各徑間長が一定なること

圖-20. 五徑間第二種連續柱



なる3條件を備へてゐる時には、その解法は著しく簡單なものとなることに注目する必要がある。若し與へられた第二種連續柱の性質が上記の3條件に可成り近きものとすれば、その與へられた連續柱は上の條件を完備したる特殊な基本的第二種連續柱とその捩屈強度が可成り近接するだらうといふことは豫想し得るところである。著者はかゝる豫想のもとに下記の如き最小根の近似値を探索する方法を試みたのである。

軸壓力及撓「モーメント」の平均値 Q' , $E'I'$ の決め方は前節におけると同様である。更に平均徑間長を

$$l' = \frac{1}{5}(l_1 + l_2 + \dots + l_5) = \frac{l}{5}$$

と假定する。今

$$m'l_c = l_c \sqrt{\frac{Q_4}{E_5 I_5}} = x$$

とすれば

$$m'l' = l' \sqrt{\frac{Q'}{E'I'}} = l' \cdot \phi \sqrt{\frac{Q_4}{E_5 I_5}} = \phi \frac{\lambda_0 x}{5}$$

或は一般的に n 格間の場合には

$$m'l' = \phi \frac{\lambda_0 x}{n}$$

と表はせる。然るにかゝる特殊な基本的第二種連續柱としての根 $m'l'$ の最小値は簡単に π の或る函數で表はし得る。即ち

$$m'v = F(\pi)$$

なる関係があるから、一般的にかゝる n 格間 n 徑間第二種連續柱の捩屈條件方程式の最小根の近似値 x を算出すべき表式は次の如くなる。

$$x = \frac{nF(\pi)}{\phi\lambda_n}$$

但し

$$x = mn'l_n,$$

n = 格間數或は徑間數,

$F(\pi) = \pi$ の或る函數,

$$\phi = \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{Q_{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{Q_1}{Q_{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_n}}{\frac{c_1 c_2 \dots c_{n-1}}{\lambda_1} + \frac{c_2 c_3 \dots c_{n-1}}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_n}}}$$

.....(65)

上式中の $F(\pi)$ を端結條件の各場合に就て定める必要がある。

(I) 第一場合

全長に涉つて定値なる軸壓力 Q' 、撓「モーメント」 $E'I'$ 及徑間長 l' を有する n 格間 n 徑間第二種連續柱第一場合の捩屈は、同じ $Q', E'I', l'$ を有し且つ中間格點を鉸節と假定せる一格間柱第一場合の捩屈に等しい⁽⁴⁾。従つて

$$F(\pi) = \pi$$

であるから

$$x = \frac{n\pi}{\phi\lambda_n} \dots \dots \dots (66)$$

特殊場合

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2: \phi = \sqrt{\frac{2+q}{(1+c_1)(1+q)}}, x = \frac{\pi}{\phi} \dots \dots \dots (66a)$$

$c_1=1, c_1=0.5$ に対する ϕ は前節 (I) におけると同様である。此の2個の特殊場合につき比較計算をやつたのが表-22, 23 である。 x, x_e は前節と同様である。 x_e の數値は表-16 に記載されてゐる。

表-22. x 及 x_e の比較 ($c_1=1$)

表-23. x 及 x_e の比較 ($c_1=0.5$)

q	x	x_e	$x : x_e$
0.0	π	π	1
0.5	3.4414	3.3934	1.0141
1.0	3.6276	3.5014	1.0360
1.5	3.7549	3.5579	1.0554
2.0	3.8477	3.5834	1.0737
2.5	3.9133	3.6149	1.0839
3.0	3.9738	3.6312	1.0944
4.0	4.0558	3.6643	1.1068
9.0	4.2361	3.6917	1.1475
19.0	4.3358	3.7089	1.1690
∞	4.4429	3.7264	1.1923

q	x	x_e	$x : x_e$
0.0	2.7207	2.5974	1.0475
0.5	2.9804	2.9574	1.0078
1.0	π	π	1
1.5	3.2519	3.2404	1.0035
2.0	3.3323	3.2989	1.0101
2.5	3.3933	3.3326	1.0182
3.0	3.4414	3.3630	1.0233
4.0	3.5124	3.3972	1.0339
9.0	3.6686	3.4561	1.0615
19.0	3.7549	3.4824	1.0782
∞	3.8477	3.5059	1.0975

尙ほ表-23 の $q=1$ の場合には

$$l_1 \sqrt{\frac{Q_0}{E_1 I_1}} = l_2 \sqrt{\frac{Q_1}{E_2 I_2}}$$

なる關係が成立して此の場合第二種連續柱は前記の特殊基本的第二種連續柱と完全に一致するが故に當然 $x : x_e = 1$ となるべきである。同様に $c_1 = 1 : 3$ の場合には $q = 2$ のときに $x : x_e = 1$ となるのである。Zimmermann は $Q_i, E_i I_i, l_i$ 三量間に一般的に

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 = \dots = m_n l_n = \text{定値} = m' l'$$

なる條件が成立する第二種 n 格間 n 徑間連續柱第一場合の捩屈條件方程式の最小根は

$$m' l' = \pi$$

なることを彼の前記 1909 年の研究論文に於て指摘してゐる。

(II) 第三場合

前と同様に、全長に涉つて定値なる軸壓力 Q' 、撓「モーメント」 $E'I'$ 及徑間長 l' を有する n 格間 n 徑間第二種連續柱第三場合の捩屈條件方程式の最小根は Bleich の研究結果¹³⁾ を利用するときには近似的に次の如くに置ける。

$$F(\pi) = \pi \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{n}}$$

従つて (65) 式により

$$x = \frac{n\pi}{\phi \lambda_n} \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots (67)$$

となり、之が此の場合の一般的な n 格間 n 徑間第二種連續柱の根 $m' l'$ の最小値の近似値を與へるべき簡易算式である。

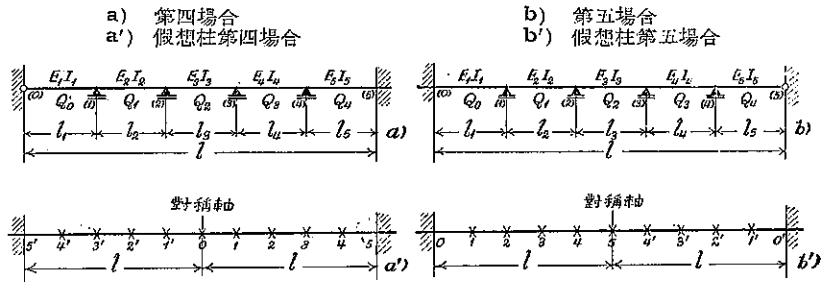
特殊場合 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2: \phi = \sqrt{\frac{2+q}{(1+c_1)(1+q)}}, x = \sqrt{2} \frac{\pi}{\phi} \dots \dots \dots (67a)$

(III) 第四及第五場合

前章の表式 (61) 及 (62) を見れば明瞭なる如く、例へば圖-21 a), b) に示す様な五格間五徑間第二種連續柱に關する捩屈條件方程式は、同圖 a'), b') に示す様に夫々格點 (0) 或は (5) に對稱軸を有し本來の連續柱 (0.5) を

その部分柱に持つ處の假想的對稱十格間十徑間第二種連續柱 a'), b') の捩屈條件方程式に外ならない。即ちかゝる假想的の第二種連續柱第三場合の取扱は上述(II)の問題に歸着することとなる。

圖-21. 五徑間第二種連續柱



従つて一般的に圖示の五徑間の代りに n 徑間の第四、第五場合を考ふるときは (II) と全く相似的に

$$F(\pi) = \pi \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{2n}}$$

なる關係が成立つにより、之を (65) 式に代入すれば次式を得る。

$$x = \frac{n\pi}{\phi\lambda_n} \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{2n}} \dots\dots\dots(68)$$

これが第四、第五場合の一般的な n 格間 n 徑間第二種連續柱の捩屈條件方程式の根 $m\lambda_n$ の最小値の近似値を與ふべき簡易算式である。

特殊場合 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2: \phi = \sqrt{\frac{2+q}{(1+c_1)(1+q)}}, \quad x = \frac{\pi}{\phi} \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{4}} \dots\dots\dots(68a)$

(II), (III) におけるこれらの 3 個の場合については兩極限の場合 $q=0$ 及 $q=\infty$ に對して近似値 x と精確な値 x_e との比を算出した。表-24, 25 がそれである。近似値は (67a), (68a) 式によつた。又 x_e は第二部第二章第三節に於て求めた公式 (42), (43) 及 (44) によつて計算した。

表-24. x 及 x_e の比較 ($c_1=1$)

端結條件の種類	x		x_e		$x : x_e$	
	$q=0$	$q=\infty^{(4)}$	$q=0$	$q=\infty$	$q=0$	$q=\infty$
3	4.4429	6.2832	4.4934	5.3280	0.9888	1.1793
4	3.5722	5.0518	3.5748	5.1922	0.9993	0.9730
5	3.5722	5.0518	3.5748	3.8289	0.9993	1.3194

表-25. x 及 x_e の比較 ($c_1=0.5$)

端結條件の種類	x		x_e		$x : x_e$	
	$q=0$	$q=\infty^{(5)}$	$q=0$	$q=\infty$	$q=0$	$q=\infty$
3	3.8476	5.4414	3.7092	5.0182	1.0373	1.0843
4	3.0936	4.3750	2.7927	4.9131	1.1078	0.8905
5	3.0936	4.3750	3.1571	3.5909	0.9799	1.2184

表-22, 23 より第一場合に就ては荷重比 $q=0-\infty$ の範圍内では $c_1=1$ 及 $c_1=0.5$ に對して兩値の最大誤差は夫々 19%, 10% である。更に表-24, 25 より

	$c_1=1$	$c_1=0.5$
第三場合	18% ($q=\infty$)	8% ($q=\infty$)
第四場合	3% ($q=\infty$)	11% ($q=0$)
第五場合	32% ($q=\infty$)	32% ($q=\infty$)

であり、第四場合の $c_1=0.5$ 以外では $q=\infty$ のときに最大誤差を持つので、 q の實用的な範圍内では x 及 x_e の 2 組の數値は充分に近接することを知るのである。

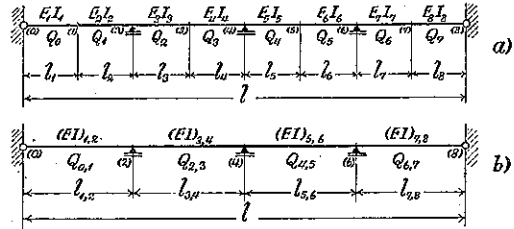
前節及本節の解法は所謂近似的解法ではなくして、捩屈條件方程式の最小根の粗い豫測に資すべき簡便法であり、從つて近似的解法の如き確實なる理論的根據を具備せず又それが計算の深さに應じてそれ自體精度を高め得るが如き方法ではない。之は飽く迄も第一部の一般理論に依つて求められた捩屈條件方程式の最小根を解く爲の補助的手段にして、正攻法の運用に當つて併用せらるべきがその本領であり又かくすることによつて始めて其の意義を生ずる。即ち前記の簡易計算の諸法によつて得らるべき近似値 x を第一部一般理論或は第三部第一章によつて求めたる精確な捩屈條件方程式に代入して得らるゝ左邊と右邊の數値が等しきに到るまで逐次計算を繰返して前節及本節の方法によつて算出せる近似値 x の改善を遂げむとするのが本章の目的である。而してかかる場

合に上記の諸法は極めて迅速に簡単に、正確なる最小根に對する近似値の豫測を可能ならしむることをその特徴とする。

尙ほ不完全支持第二種連續柱に對しては次の如き簡易算法を適用し得る。例へば圖-22 (a) の如き八格間四徑間第二種連續柱の捩屈を取扱ふ場合、先づ徑間毎に定値なる軸壓力、撓「モーメント」を有する完全支持四格間四徑間連續柱 (圖-22 (b)) を以て置換する。但しこの場合 a), b) 兩柱の間には次の條件を假定する。

圖-22. 不完全支持第二種連續柱

- a) 不完全支持第二種連續柱
- b) 假想的完全支持第二種連續柱



$$Q_{0,1} = \frac{Q_0}{\lambda_1'} + \frac{Q_1}{\lambda_2'}, \quad Q_{2,3} = \frac{Q_2}{\lambda_3'} + \frac{Q_3}{\lambda_4'}, \quad Q_{4,5} = \frac{Q_4}{\lambda_5'} + \frac{Q_5}{\lambda_6'}, \quad Q_{6,7} = \frac{Q_6}{\lambda_7'} + \frac{Q_7}{\lambda_8'}$$

$$(EI)_{1,2} = \frac{E_1 I_1}{\lambda_1'} + \frac{E_2 I_2}{\lambda_2'}, \quad (EI)_{3,4} = \frac{E_3 I_3}{\lambda_3'} + \frac{E_4 I_4}{\lambda_4'}, \quad (EI)_{5,6} = \frac{E_5 I_5}{\lambda_5'} + \frac{E_6 I_6}{\lambda_6'}, \quad (EI)_{7,8} = \frac{E_7 I_7}{\lambda_7'} + \frac{E_8 I_8}{\lambda_8'}$$

但し

$$\lambda_1' = \frac{l_{1,2}}{l_1}, \quad \lambda_2' = \frac{l_{1,2}}{l_2}, \quad \lambda_3' = \frac{l_{3,4}}{l_3}, \quad \lambda_4' = \frac{l_{3,4}}{l_4}, \quad \lambda_5' = \frac{l_{5,6}}{l_5}, \quad \lambda_6' = \frac{l_{5,6}}{l_6}, \quad \lambda_7' = \frac{l_{7,8}}{l_7}, \quad \lambda_8' = \frac{l_{7,8}}{l_8}$$

$$l_{1,2} = l_1 + l_2, \quad l_{3,4} = l_3 + l_4, \quad l_{5,6} = l_5 + l_6, \quad l_{7,8} = l_7 + l_8$$

然るとき結局この問題は上述の完全支持第二種連續柱の問題に歸着せしめ得て

$$\phi = \sqrt{\frac{Q_0 \cdot \frac{1}{\lambda_1} + Q_1 \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \dots + Q_n \cdot \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}}{\frac{c_1 c_2 \dots c_n}{\lambda_1} + \frac{c_2 c_3 \dots c_n}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}}}$$

$$x = m_0 l_0 = l_0 \sqrt{\frac{Q_7}{E_8 I_8}}$$

とすれば

$$m' l' = \phi \frac{\lambda_n \pi}{4} = F(\pi)$$

となるから、一般的には次の如き關係が得られる。

$$x = \frac{n' F(\pi)}{\phi \lambda_n}$$

但し

$$x = m n l_n,$$

n = 格間の總數,

n' = 徑間の總數 ($n > n'$),

ϕ : 公式 (65) の ϕ と同じ,

$F(\pi) = \pi$ 第一場合,

" = $\pi \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{n'}}$ 第三場合,

" = $\pi \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{2n'}}$ 第四, 第五場合.

} (69)

(69) 式の關係は、上の例に對して各徑間毎に存在する格間數の異なる如き場合に對してもその儘適用し得るのである。かゝる不完全支持第二種連續柱では各徑間毎の軸壓力 $Q_{0,1}, Q_{2,3}, \dots$, 撓「モーメント」 $(EI)_{1,2}, (EI)_{3,4}, \dots$,

徑間長 $l_{1,2}, l_{3,4}, \dots$ に関して本節の冒頭に掲げた 3 條件がより近接して成立つ場合には α の近似性は更に良好なものとなることは云ふまでもないのである。

結 語

總 括 本研究は其の第一部に於て、先づ縦等布荷重の荷重條件 $w \neq 0$ 或は $w = 0$ が全長に涉つて成立つところの本來任意の縦集中荷重を負擔する第一種或は第二種連續柱の挫屈條件方程式を求むる一般的方法を、夫々五種の端結條件の各場合に就て明かにした。而もこれらの條件方程式を端結條件の異なる各場合にも拘らず、簡潔に一表に整頓し得ることをも知つたのである。又挫屈限界荷重としては一般化された Euler の挫屈限界荷重 Q_E' を使用して、 Q -ダイヤグラムの平均高 $Q_{(m)}$ が Q_E' に等しくなる點を挫屈現象生起の限界とする表現方法を連續柱に適切なものとして採用することを試みた。

第二部に於ては第一部一般理論に従ふ簡單なる計算例を、荷重條件 $w \neq 0$ 及 $w = 0$ が成立する各連續柱に就て行つた。かくして多くの人々が取扱つた問題の結果と著者の方法による算例のそれと良く一致することによつて第一部理論の正確さを間接的に表明すると共に、他方挫屈條件方程式の複雑なる荷重條件 $w \neq 0$ の場合を、中間縦集中荷重を適當に假定することによつて、挫屈條件方程式の簡單なる荷重條件 $w = 0$ の場合を以て近似的に置換し得る事實をも併せ知ることを得た。更に上記の如き挫屈限界荷重の表現方法より豫期し得るが如くに、係數量 μ の顯著なる特性として q の變化に對してこの量が甚しく定値性を表はすことをも計算を通じて認識し得た。従つて μ のかかる性質を利用する最小根豫測方法の存在の一斑をも窺ふことを得た。尙ほ計算例とは別に、連續柱問題の場合に起り得べき錯覺を避ける爲に所謂對柱の概念の導入をも著者は第二部に於て試みて 2 個の對柱相互間の關係を鮮明ならしめたのである。

第三部前半に於ては部分法則を活用する逐次合成的な方法を案出して第二種連續柱の挫屈條件方程式への到達を早からしめたが、特に一般的完全支持第二種連續柱の場合にこの方法が驚異的肺速さを發揮することにより條件方程式への困難を完全に近く除去した。又その運用例の中に對稱的第二種連續柱の顯現すべき特殊性についても論及した。かくして著者は独自の方面よりして特に第二種連續柱に於ける挫屈條件方程式に到達すべき捷路の存在を Zimmermann, Ratzersdorfer と共に且つより深く探索することを得たのである。

更に第三部後半に於ては、挫屈限界荷重への途上に横はる第二の困難をも軽減せむが爲め、挫屈條件方程式のもつ最小根 α に對する近似値への豫測の指針となるべき簡單なる方法を、第一種連續柱では端結條件の凡ての場合に、又第二種連續柱では第二場合を除く凡ての場合に試みた。而して著者は後者の場合に於ては F. Bleich が開拓した地盤の上に其の方法を打ち建てたのである。この場合 Zimmermann の部分法則より導かるゝ對稱的第二種連續柱に關する法則を非對稱的な端結條件の第四、第五場合の取扱に活用したことは言ふまでもない。而して第二部に於て行つた第一種及第二種連續柱に對する簡單なる計算例の結果を此の簡易計算法によるそれと比較することによつて、新しい方法の精度を吟味して、 q の實際的な領域にあつては第一種及第二種連續柱並にそれが端結條件の各場合を通じて著者の豫測方法の精度の高きに或ひは可成り高きにあることを確め得たのである。

應用 (I) 塑性的挫屈を取扱ふ場合には彈性係數 E に “Knickzahl τ ”⁴⁶⁾ を乘ずる必要がある。従つて一般的には

$$\left. \begin{aligned} E_{(m)} I_{(m)} \tau_{(m)} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i I_i \tau_i}{\lambda_i} \\ \tau_i &= \frac{E_i'}{E} \cdot \frac{I_1 i}{I_i} + \frac{I_2 i}{I_i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

茲に

E' : Kármán の “Modul der gesamten Formänderungen”,

I_1, I_2 : 塑性的挫屈における平均挫屈應力度 $\sigma_m (= \sigma_k)$ の位置を通る軸に關するその兩側の斷面部分の慣性モーメント。

今 E', I_1 及 I_2 は挫屈應力度 σ_k の函數なれば、各格間に涉て σ_k が略同一のものと假定するときは比 $\frac{E'}{E}$ 並に更に各格間の斷面が相似的なる假定を加へるときは比 $\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}$ の三者が全長に涉つて略一定なりと假定し得るを以て、此の場合には

$$E_{(m)} I_{(m)} \tau_{(m)} = \tau \sum_{i=1}^n \frac{E A I_i}{\lambda_i} \dots\dots\dots (71)$$

と置くことが出来る。上の條件が成立つ如き特殊な連續柱に對しては (71) 式を本研究の諸式の $E_{(m)} I_{(m)}$ の代りに代入せしむることによつて非彈性的領域に於ける挫屈をも取扱ひ得るのである。

應用 (II) 連續柱理論の實際的應用の方面としては

- (1) 橋梁上弦の側方挫屈或は壓縮弦の挫屈
- (2) 二次區分 (subdivide) された壓縮材の挫屈
- (3) 複雑なる變斷面壓縮材の近似的解法
- (4) 吊橋塔柱の挫屈
- (5) 自立式或は支線式高塔の挫屈
- (6) 大支間をもつ屋根骨組構の壓縮弦の挫屈
- (7) 起重機構造の壓縮材の挫屈

等がある。其の他航空、造船方面では

- (1) 主翼骨組の壓縮弦の挫屈
- (2) 壓縮小骨の挫屈
- (3) 胴體縱通材の挫屈
- (4) 龍骨、内龍骨の挫屈
- (5) 船側縱通材の挫屈
- (6) 肋骨壓縮弦の挫屈

等があり、將來構造技術の進展に伴つて其の應用の分野は擴大されるだらう。

由來構造技術に要求せらるゝ各種條件は、あらゆる方面に於て高强度材料例へば特殊鋼の如きの使用を益々促進せしめつゝあるに拘らず、壓縮材に關する限り彈性挫屈の領域内に於ては特殊鋼と雖も毫も其の本來の偉力を發揮するを得ざることは古典的な Euler 公式が闡明せる通りであり、此の點に關する其の後の研究は單にこの事實を裏書したに過ぎない。このことは高强度材料に必定なる悲運であり、構造技術の有つ一の癘腫であらう。今材料的に E の高き高强度材料を得た場合、之は彈性挫屈をも含めた壓縮材の要求には合致するであらうが、他面かゝる材料より成る構造物が一旦一般的應力を受くる場合をも考ふればかゝる材料は材料學的に重大なる缺陷を表はすに至るべきことは周知の事柄である。此の場合構造技術的に連續柱的取扱をなして非彈性的挫屈の領域にまでかゝる壓縮材を持來すことによつて、初めて高强度材料の偉力を發揮せしめ得るものにして、此の如き材料方面の事情よりしても連續柱應用に關する考察の深めらるべきことは痛感されるところである。

註 釋

1) Wittenbauer, F.: Die Knicklast mehrfach befestigter Stäbe. Zt. d. V. D. I., 1902, S. 501.
 Do.: Die Verallgemeinerung der Eulerschen Knicklast. Zt. d. V. D. I., 1903, S. 245.
 Zimmermann, H.: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. VI. 1909, S. 180.
 Ratzersdofer, J.: Durchgehende Balken mit beliebig vielen Oeffnungen bei Beanspruchung durch längsund querwirkende Kräfte. Der Eisenbau, 1919, S. 93-109.
 Bleich, Fr.: Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen. Der Eisenbau, 1919, S. 27 ff.

2) Vianello, L.: Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. *Zt. d. V. D. I.*, S 1436-1443, 1898.

Hencky, H.: Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette. *Der Eisenbau*, 1920, Nr. 24, Dezember.

Karas, K.: Ueber die Knickung gerader Stäbe durch ihr Eigengewicht. *Zt. für Bauw.*, S. 86, 1925.

Do.: Ueber die Knickung gerader Stäbe durch Eigengewicht und Einzellasten. *Zt. für Bauw.*, S. 246, 1928.

Treffitz, E.: Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. *Zt. f. Angw. Math. Mech.* S. 272-275, 1923.

Blumenthal, O.: Ueber die Knickung eines Balkens durch Längskräfte. *Zt. f. Angw. Math. Mech.*, S. 232, 1937.

Timoshenko, S.: *Theory of Elastic Stability*, p. 114, 1936.

3) Schleusner, A.: Zur Konvergenz des Engesser-Vianello-Verfahrens, 1938.

Bleich, F. u. H.: Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktwise elastisch gestützten Stabes. *Der Stahlbau*, S. 17. 1937.

Schleusner, A.: Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes (Heft 1 der Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaus. Herausgegeben vom Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin). 1938.

Schleusner, A.: Die Flugsteighalle für den Neubau des Flughafens Tempelhof. *Der Stahlbau*, S. 92, 1938.

4) end connection.

5) Blumenthal, O.: *Loc. cit.*

田中 豊: 土木學會誌, 第 15 卷, 頁 235.

Schleusner, A.: *Loc. cit.* Zur Konvergenz...

6) ζ: 第二章公式 (1) 参照.

7) 微小柱體部分 ds の平衡の條件 $\sum M=0$ より (圖-a 参照)

$$dM_x + T_x \cdot ds \cdot \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) - Q_x \cdot ds \cdot \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) - wds \left(\frac{ds}{2}\right) \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ \div dM_x + T_x dx - Q_x dx \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

故に
$$\frac{dM_x}{dx} + T_x - Q_x \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{或は} \quad E_x I_x \frac{d^3 y}{dx^3} = -Q_x \frac{dy}{dx} + T_x$$

支點なき中間格點 ($r-1$) の直ぐ左側では (圖-b 参照)

$$E_{r-1} I_{r-1} \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = -[Q]_{i=r-1}^{l_{r-1}} \left[\frac{dy}{dx} \right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} + [T]_{i=r-1}^{l_{r-1}}$$

直ぐ右側では

$$E_r I_r \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{i=r-1}^{l_r} = -[Q]_{i=r-1}^{l_r} \left[\frac{dy}{dx} \right]_{i=r-1}^{l_r} + [T]_{i=r-1}^{l_r}$$

上の兩式の間には

$$[Q]_{i=r-1}^{l_{r-1}} + P_{r-1} = [Q]_{i=r-1}^{l_r}, \quad [T]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = [T]_{i=r-1}^{l_r}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{i=r-1}^{l_r}$$

なる関係があるから上の兩式を引くことによつて結局

$$E_{r-1} I_{r-1} \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{i=r-1}^{l_{r-1}} - E_r I_r \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{i=r-1}^{l_r} = P_{r-1} \left[\frac{dy}{dx} \right]_{i=r-1}^{l_{r-1}}$$

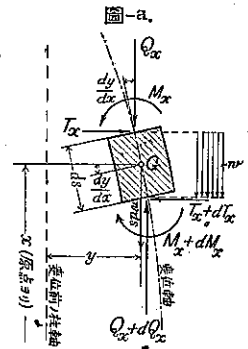


圖-a.

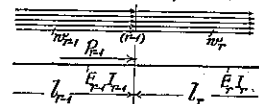


圖-b.

が得られる。

8) 第二種連続柱第二場合に近き端結条件として

i) 格點 (0) が自由端, ii) 格點 (n) が鉸節

の場合も考へらるゝも、之は本論文では省略する。

9) 係數 $\frac{2}{b_1}$ の代りに 1 と置いても良い。

10) 列: column.

11) 小行列式: minor determinant.

12) 係數 $\frac{2}{b_1}$ の代りに 1 と置いても良い。

13) $p_l^{(n)}(l)$, $p_l^{(0)}(0)$ は夫々 $p_l^{(0)}(x=l)$, $p_l^{(0)}(x=0)$ を表はし其の他に之に準ずる。

14) $x=L_{n+1}$ は $x=0$ を意味する。

15) 換算長: reduced length.

16) 換算率: The factor of reduction.

17) $E_m I_m$: The mean "moment of stiffness". Cf. Todhunter and Pearson: History of the elasticity and strength of materials, Vol. I, 1886, p. 44.

18) 精しくは $\alpha=2.04574$.

19) 此の場合圖-3 の Q-ダイアグラムの縦等布荷重による傾斜線の部分は水平となり、其の輪廓線は直角階段状となる。

20) "moment of stiffness" に對して撓「モーメント」なる術語を本論文に假りに使用する。

21) Karas, Karl: Über die Knickung gerader Stäbe durch ihr Eigengewicht. Ztschr. f. Bauwesen, S. 86, 1925.

22) 池田教授は獨特の方法により方程式 (23) の最小根を次の如くに求めた: $\frac{2}{3}\sqrt{z_0}=1.866350858\dots$ 本論文には此の數値を採用した。

池田芳郎: 應用數學 (昭和 11 年版), 頁 202 參照。

23) Mayer, R.: Knickfestigkeit, S. 32, 1921.

24) Jasinski: Annales des ponts et chaussées, p. 249, 1894.

25) Love-Timpe: Elastizität, S. 487, 1907.

26) Wittenbauer, F.: Die Verallgemeinerung der Eulerschen Knicklast. Ztschr. d. V. D. I., 1903, the formula (14).

27) Timoschenko: Theory of Elastic Stability, 1936, p. 122.

28) Timoschenko: Theory of Elastic Stability, p. 113.

Ratzersdorfer: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, 1936, S. 273.

29) 田中 豊: 土木學會誌, 第 15 卷, 頁 231.

30) $m_1 l_1 = m_1(l-l_2) = \left(\frac{m_1 l}{m_2 l_2} - \frac{m_1}{m_2}\right) m_2 l_2 = (\kappa_{1.0} - \kappa_{1.1})x = \kappa x$.

31) 對柱: reverse column.

32) 計算には Hayashi: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbel-Funktionen, 1926. を使用した。

33) Ratzersdorfer は同一の問題について次式を掲げてゐる (Ratzersdorfer: Die Knickfestigkeit, 1936, S.

$$280): \quad \sqrt{\rho} \left(\frac{1}{z_1} - \cot z_1 \right) + \left(\frac{1}{z_2} - \cot z_2 \right) = 0.$$

この式は $z_1 = \kappa x$, $z_2 = x$, $\rho = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{2}{1-\gamma_1}$ の關係を代入すれば條件式 (36) を得る。

34) Zimmermann: Loc. cit. Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. VI, 1909, S. 200 und 209.

部分法則：“Teilsatz”.

- 35) 之を零とすることによつて得らるゝ一徑間の場合の最小根は $mli = \pi$ ではなく此の場合 $mli = 0$ である。
 36) Ratzersdorfer: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. 1936. S. 273.
 37) Zimmermann は第二種連続柱を完全支持 (vollständig gestützte). 並にこの例の如き不完全支持 (unvollständig gestützte) 第二種連続柱とに區別した。
 38) 但し此の場合には (46), (47), (49), (50) 式にてなしたと同様表-7 に於て曲げ「モーメント」の條件を表はす處の

第一場合: 条件番號 3, 4

第二場合: 同 3

第四, 五場合: 同 4

の各条件にはその格間に應じて夫々係数 $(-E_1 I_1)$ 或は $(-E_m I_m)$ を戻す必要がある。従つて表-10 も之に對應する修正が必要となつた。

- 39) Ratzersdorfer: Durchgehende Balken mit beliebig vielen Öffnungen, bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte. Der Eisenbau, 1919, S. 101.

40) (18) 式の $Q(m)$, $E_m I_m$ を使へば次の如くなる:

$$\phi = \sqrt{\frac{Q(m)}{Q_4}} \sqrt{\frac{E_n I_n}{E_m I_m}}$$

41) 此の場合の条件方程式は次の如くなる。

第二場合 $c_1 = 1$: $\tan x = \infty$, $c_1 = 0.5$: $\tan x = \infty$.

第三場合 $c_1 = 1$: $\frac{x^3}{3} \tan x = 2 \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) + \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) x^2 - \frac{x^4}{12}$,

$c_1 = 0.5$: $\frac{x^3}{3} \tan x = \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) + \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) x^2 - \frac{x^4}{6}$.

第四場合 $c_1 = 1$: $\tan x = \frac{x}{1+x^2} \left(3 - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{\cos x}\right)$,

$c_1 = 0.5$: $\tan x = \frac{x}{1+x^2} \left(3 - \frac{2}{3} x^2 - \frac{2}{\cos x}\right)$,

第五場合 $c_1 = 1$: $\frac{\tan x}{x} = \frac{3-x^2}{3+6x^2-\frac{x^4}{4}}$,

$c_1 = 0.5$: $\frac{\tan x}{x} = \frac{3-2x^2}{3+12x^2-x^4}$.

42) Bleich, F.: Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, 1919, S. 73.

Zimmermann, H.: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern, Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1909, S. 349-350.

43) Bleich, F.: Loc. cit. Der Eisenbau, 1919, S. 75.

44), 45) 此の場合の条件方程式は次の如くなる。

第三場合 $c_1 = 1$: $3 \tan x + x = \frac{8}{x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$, $c_1 = 0.5$: $\tan x + x = \frac{4}{x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$.

第四場合 $c_1 = 1$: $2 \tan x + x = \frac{6}{x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$, $c_1 = 0.5$: $\tan x + 2x = \frac{6}{x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$,

第五場合 $c_1 = 1$: $\tan x = \frac{4x}{4+x^2}$, $c_1 = 0.5$: $\tan x = \frac{2x}{2+x^2}$.

46) Bleich: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, S. 110. u. S. 130.