

までは軌條は収縮を始めない。これを温度差及軌條の収縮量に換算すれば表-6 に等しくなり、図-11 に於て低温度に於ける最大限度を示す線はこの温度に相當するだけ水平に引いてある。

以上は 50 及 37 kg の定尺軌條に對する遊間の規定を述べたのであるが、在來長さの軌條及 30 kg 定尺軌條に對する遊間の規定も同様な方法に依り求めることが出来る。

函形ラーメンの一解法 (弾性支承上にあつて 任意の對稱垂直荷重を受ける場合)

(昭和 13 年 7 月 16 日土木学会第 2 回年次学術講演會に於て)

准 員 柴 田 元 良*

要 旨 本文は、任意の對稱垂直荷重を受ける函形ラーメンの下版が弾性支承上にあると考へて得られる隅角其の他の曲げモーメント、反力等の大きさを表はす一般式を求めたものであつて、2 に於ては、下版反力が下版の浮上り部分にも働くとき考へ、3 に於ては、浮上り部分には反力が働かないと考へた。

1. 緒 言

地盤上に在る函形ラーメンが任意の對稱垂直荷重を受ける場合の応力計算に於ては、普通その計算を簡單にする爲、地盤よりの反力を一様と假定するか、兩垂直材下に固定支持點を考へ解を求めてゐる。然しこの假定は不合理であると思はれる場合がある。それで茲では、下版が弾性支承上にあるものとして解を行つて、地盤の強さが函形ラーメンの応力に及ぼす關係を明らかにした。

猶一例について、地盤係數 (Bettungsziffer) K の値によつて變化する隅角の曲げモーメント、反力等の値を計算して見た。

終りに、御懇篤な校閲と有益なる助言を賜つた九大稻田教授に衷心より感謝の意を表す。

2. 下版の浮上り部分に反力が働く場合の一般式

1. 一般式の誘導

図-1 に示した様な函形ラーメンが、任意の對稱垂直荷重を受けてゐるとする。ラーメンの隅角 1 及 3 に働く曲げモーメントは撓角撓度法の理論を適用して、夫々廻轉角 φ_1 及 φ_3 の函數として表示し得べく、又、下版 3-4 の弾性曲線は彈床理論を応用し、且つラーメンの對稱性を考慮して次式の如くなる。

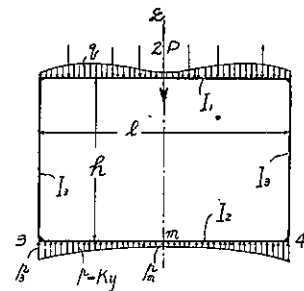
$$v = \frac{1}{2} [A_1 f_1(\xi, \lambda) + A_2 f_2(\xi, \lambda)] \dots \dots \dots (1)$$

茲に、 $f_1(\xi, \lambda)$ 及 $f_2(\xi, \lambda)$ は ξ 及 λ の函數であつて、

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \lambda = \frac{l}{L}, \quad L = \sqrt{\frac{4J I_2}{\nu K}}$$

l ; 支間 (cm)

図-1. 一般寸法及荷重と反力の状態



* 鐵道技手 工學士 鐵道省大阪改良事務所勤務

- E ; 弾性係数 (kg cm^{-2})
- I_2 ; 下版 3-4 の慣性モーメント (cm^4)
- b ; 下版 3-4 の幅 (cm)
- K ; 地盤係数 (kg cm^{-3})

尚 A_1 及 A_2 は境界条件に依りて定まる積分常数である。

故に、結局此の種ラーメンの解法は、4 つの未知数 $\varphi_1, \varphi_2, A_1$ 及 A_2 の決定に歸着する。然るに、式-1 に基づく境界条件の外に隅角 1 及 3 に於て $\Sigma M=0$ なる条件を適用すれば、容易に未知数を求めることが出来る。

以上の方針によつて誘導した諸式は、其の結果のみを書けば次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= -\frac{1}{6} \frac{6C_{12}(3k'+2k)K_1 - pl k k' K_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{13} &= -M_{12} \\
 M_{34} &= -\frac{1}{6} \frac{6C_{12}k K_1 - pl k'(3+2k)K_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{31} &= -M_{34} \\
 M_m &= -\frac{1}{6} \frac{6C_{12}k K_2 + pl \{k'(3+2k)K_2 + k(2+k)K_1\}}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\
 y_3 &= \frac{1}{3b l^2} \frac{1}{K} \frac{C_{12}k\lambda^4 K_2 + 6pl k'(3+2k)K_1 + 6pl k(2+k)K_0}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\
 y_m &= \frac{1}{3b l^2} \frac{1}{K} \frac{-C_{12}k\lambda^4 K_2 + 6pl k'(3+2k)K_1 + 6pl k(2+k)K_7}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\
 p_3 &= Ky_3, & p_m &= Ky_m
 \end{aligned} \tag{2}$$

茲に

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{(\sin h\lambda + \sin \lambda)\lambda}{2(\cos h\lambda - \cos \lambda)}, & K_2 &= \frac{3(\sin h\lambda - \sin \lambda)}{(\cos h\lambda - \cos \lambda)\lambda} \\
 K_3 &= \frac{(\sin h\frac{\lambda}{2} \cos \frac{\lambda}{2} + \cos h\frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2})\lambda}{\cos h\lambda - \cos \lambda}, & K_4 &= \frac{6(\cos h\frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2} - \sin h\frac{\lambda}{2} \cos \frac{\lambda}{2})}{(\cos h\lambda - \cos \lambda)\lambda} \\
 K_5 &= \frac{6 \sin h\frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\cos h\lambda - \cos \lambda}, & K_6 &= \frac{(\cos h\lambda + \cos \lambda)\lambda^2}{2(\cos h\lambda - \cos \lambda)} \\
 K_7 &= \frac{\cos \frac{\lambda}{2} \cos h\frac{\lambda}{2} \lambda^2}{\cos h\lambda - \cos \lambda}
 \end{aligned} \tag{3}$$

である。従つて一般に曲げモーメント (M)、変位 (y)、反力 (p) 等は荷重、ラーメンの寸法、弾性係数に關係するは勿論同時に又地盤の強さにも關係して居ることが分る。

図-2 は種々の λ の値に對する $K_1 \sim K_7$ の値を圖示したるものである。

2. $K=0$ なる場合

特別の場合として、 K の値が小さい時、即ち軟弱なる地盤と考へられる時は、 λ も亦小さくなる。今 $K=0$ 、即ち $\lambda=0$ の時には 図-2 より

$$K_1=1, K_2=1, K_3=1, K_4=0.5, K_5=1.5, K_6=1, K_7=1$$

となるから、式-2 はこの場合次の様に書ける。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{12} &= -\frac{12C_{12}(3k'+2k)-2plkk'}{12\{k'(3+2k)+k(2+k)\}}, & M_{13} &= -M_{12} \\
 M_{34} &= -\frac{12C_{12}k-2pl(3+2k)k'}{12\{k'(3+2k)+k(2+k)\}}, & M_{31} &= -M_{34} \\
 M_m &= -\frac{pl}{4} + M_{34} \\
 y_3 &= \infty, & y_m &= \infty, & p_3 &= \frac{2p}{bl}, & p_m &= \frac{2p}{bl}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

以上の結果は、 $K=0$ 、即ち液体の如き場合に於けるものであるから、實際上では無意味と思はれる。たゞ結果から云へば、上記の曲げモーメントは反力を等分布荷重と假定して普通得られてゐるものである。

3. $K=\infty$ なる場合

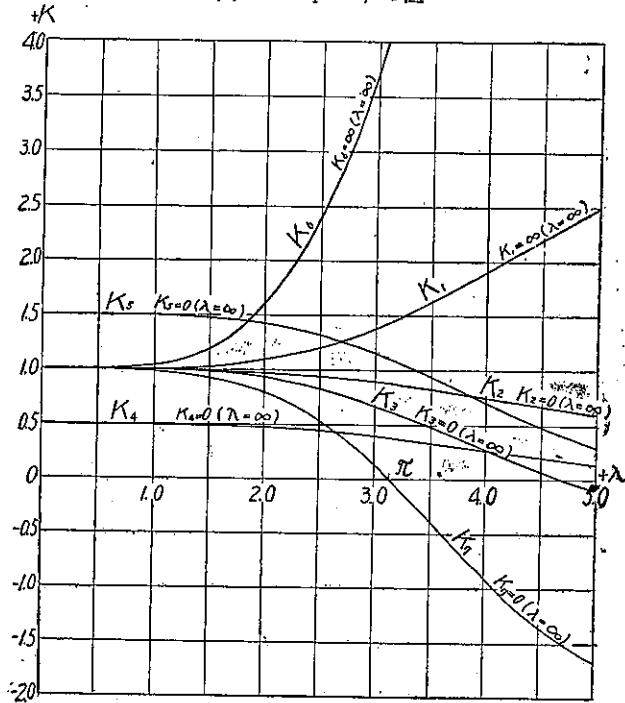
K の値が非常に大きい、即ち岩盤である様な場合には、 λ も亦大きくなる。 $K=\infty$ なる極限を考へると $\lambda=\infty$ となるから、この場合 図-2 より

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \infty, & K_2 &= 0, & K_3 &= 0 \\
 K_4 &= 0, & K_5 &= 0, & K_6 &= \infty \\
 K_7 &= 0
 \end{aligned}$$

が得られる。これらの値を直接 式-2 に代入すれば、 ∞/∞ なる不定形となるから、多少変形して極限值を求めた結果は次の様である。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{12} &= -\frac{2C_{12}}{2+k}, & M_{13} &= -M_{12} \\
 M_{34} &= -\frac{C_{12}}{2+k}, & M_{31} &= -M_{34} \\
 M_m &= 0 \\
 y_3 &= 0, & y_m &= 0 \\
 p_3 &= \infty, & p_m &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

図-2. $K_1 \sim K_7$ の値



この場合、曲げモーメントは、隅角 3 及 4 を固定端と考へた兩脚固定ラメンのそれである。撓変位は共に零である。反力は中央で零、兩端で ∞ となつて居るが、この反力分布に就ては、6 の計算例に示してある反力分布図(図-4)中 K の大きい場合を参照すれば、大体の傾向は推知されよう。

4. 上版に等分布荷重を受ける場合

ω (kg cm^{-1}) を以て等分布荷重の單位長に對する荷重強とすれば

$$C_{12} = \frac{\omega l^2}{12}, \quad p = \frac{\omega l}{2}$$

であるから、式-2 はこの場合次の様に見える。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= -\frac{\omega l^2}{12} \frac{3k' + 2k K_1 - k k' K_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{13} &= -M_{12} \\ M_{34} &= -\frac{\omega l^2}{12} \frac{k K_1 - k'(3+2k)k_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{31} &= -M_{34} \\ M_m &= -\frac{\omega l^2}{12} \frac{k K_2 + k'(3+2k)K_4 + k(2+k)K_5}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ y_a &= \frac{\omega}{b} \frac{1}{K} \frac{\frac{k\lambda^4 K_2}{36} + k'(3+2k)K_1 + k(2+k)K_6}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ y_m &= \frac{\omega}{b} \frac{1}{K} \frac{-\frac{k\lambda^4 K_4}{36} + k'(3+2k)K_3 + k(2+k)K_7}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ p_a &= K y_a, & p_m &= K y_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

5. 上版中央に単一集中荷重を受ける場合

Q (kg) で単一集中荷重を表はせば

$$C_{12} = \frac{Ql}{8}, \quad p = \frac{Q}{2}$$

であるから、式-2 はこの場合次の様に見える。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= -\frac{Ql}{24} \frac{3(3k' + 2k K_1) - 2k k' K_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{13} &= -M_{12} \\ M_{34} &= -\frac{Ql}{24} \frac{3k K_1 - 2k'(3+2k)K_2}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1}, & M_{31} &= -M_{34} \\ M_m &= -\frac{Ql}{24} \frac{3k K_3 + 2k'(3+2k)K_4 + 2k(2+k)K_5}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ y_a &= \frac{Q}{bl} \frac{1}{K} \frac{\frac{k\lambda^4 K_2}{24} + k'(3+2k)K_1 + k(2+k)K_6}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ y_m &= \frac{Q}{bl} \frac{1}{K} \frac{-\frac{k\lambda^4 K_4}{24} + k'(3+2k)K_3 + k(2+k)K_7}{k'(3+2k) + k(2+k)K_1} \\ p_a &= K y_a, & p_m &= K y_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

6. 計 算 例

鉄筋コンクリート造面形ラーメンが等分布荷重 ω を受けてゐる。計算に必要な数値は次の如くである。猶地盤係数 K の値は色々変るものとする。

$$\begin{aligned} I_1 &= 4650 \text{ cm}^4, & I_2 &= 6100 \text{ cm}^4, & I_3 &= 2600 \text{ cm}^4, & l &= 440 \text{ cm} \\ h &= 310 \text{ cm}, & b &= 1 \text{ cm}, & E &= 140000 \text{ kg cm}^{-2}, & K &= 0 \sim 20 \text{ kg cm}^{-3} \\ k &= \frac{I_1}{I_3} \frac{h}{l} = \frac{4650}{2600} \frac{310}{440} = 1.260 \\ k' &= \frac{I_1}{I_2} = \frac{4650}{6100} = 0.762 \end{aligned}$$

図-3 (a).
隅角及下版中央に生ずる曲げモーメントの値と K の関係

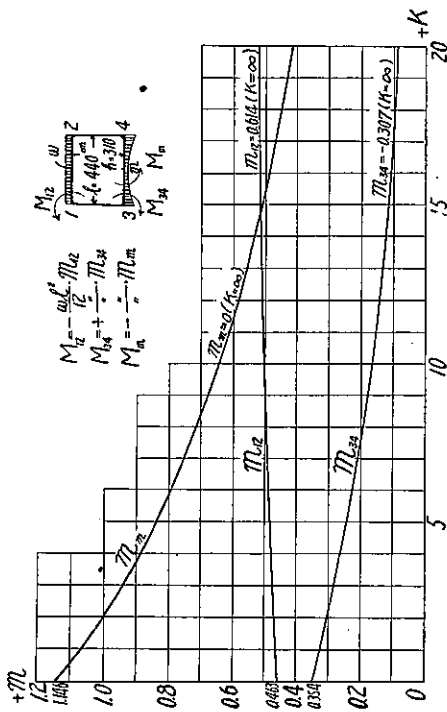


図-3 (b).
垂直材下及下版中央の及力の値と K の関係

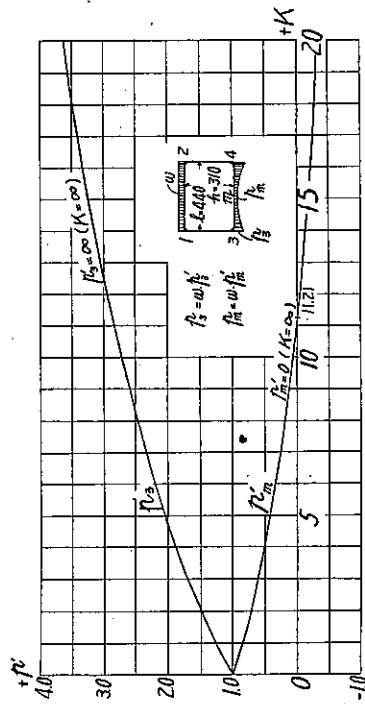
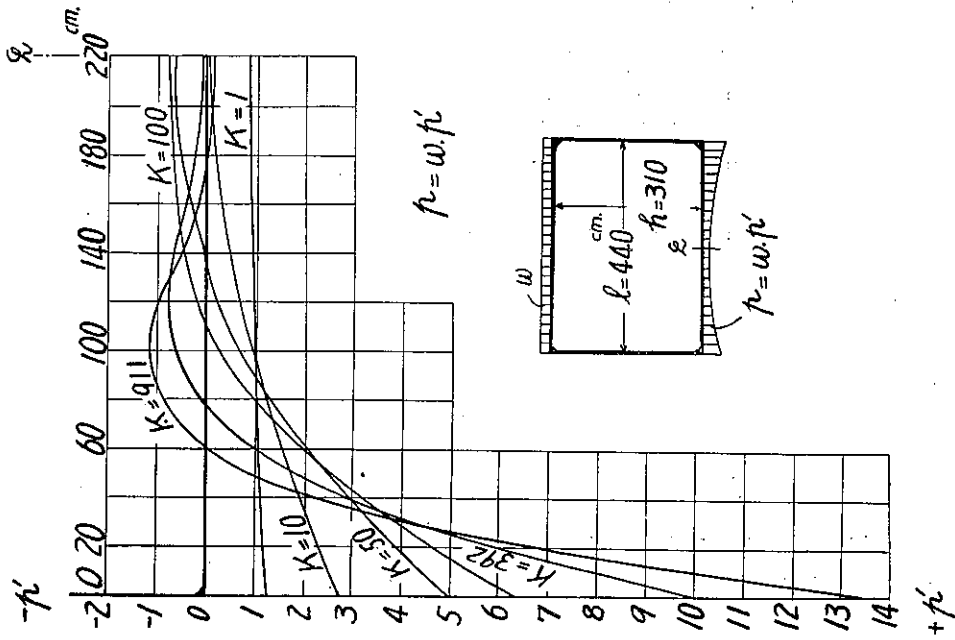


図-4.
 K の値により変化する下版及力の分布状態



次に K を変数として表はした λ は、

$$\lambda = l \left(\frac{b}{4EI_2} \right)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 440 \left(\frac{1}{4 \times 140\,000 \times 6\,100} \right)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 1.820 K^{\frac{1}{4}}$$

であるから、 K の色々の値に對する λ を求めて、式-3 の $K_1 \sim K_7$ を計算する。かくして求められた $k, k', \lambda, K_1 \sim K_7$ を式-2 に用ひて、曲げモーメント、変位及反力を計算して、図に示したものが図-3 (a) 及 (b) である。図には、便宜上、 $M_{12} = -\frac{\omega l^2}{12} m_{12}$, $M_{34} = \frac{\omega l^2}{12} m_{34}$, $M_m = -\frac{\omega l^2}{12} m_m$, $p_3 = \omega p_3'$, $p_m = \omega p_m'$ として m_{12} , m_{34} , m_m , p_3' , p_m' を示した。茲で曲げモーメントの符號が負であるのは、その方向が時計進行方向と反對であることを示し、反力の符號が負であるのは、浮上りを意味することは勿論である。

図-3 (a) より、 M_{12} の値は地盤の強さに殆ど關係しないけれども、 M_{34} 及 M_m の値は相當變化してゐる事が分る。又 図-3 (b) に於て、 p_3 の値は K が大きくなる程、即ち地盤が良い程大きくなり、 p_m の値は反對に減じて來る。而もこの場合、 $\lambda_m = 3.33$, 即ち $K = 11.21$ になれば $p_m = 0$ となり、更に K の値が増せば、 p_m は負の値を持つ様になる。即ち中央部に浮上りを生ずることになる。猶 図-4 は二、三の K の値に對して計算された反力分布の状態を圖示したものである。

3. 下版の浮上りの部分に反力が働かない場合の一般式

1. 一般式の誘導

一般に λ の値が λ_m を超過すれば、下版中央附近に浮上りを生ずることになる。前章では浮上り部分も反力が働くものとして解を進めたけれども、この假定は實際の場合と多少異なるであらう。それで以下、浮上り部分に反力を考へない場合の一般式に就き解を求めて見よう。

この場合前章と異なる點は、下版 3-4 だけであるから、3-E 間の彈性曲線は式-1 に依つて表はされる。E-F 間に於ては、その兩端に等しい曲げモーメント M_E が働いてゐるから、彈性曲線は円弧である。

次に断面 3 及 E に於ける境界条件並に隅角 1 及 3 の曲げモーメントの平衡條件より 7 つの未知數に關する聯立方程式を得。然るに、之等の未知數は代數函數又は、超越函數の形で式申に入つて居る關係上之が嚴正解は殆ど不可能であり、たゞ圖式的にのみ解法が可能である。かゝる計算の結果は省略し、特別の場合として $K = \infty$ なる場合の曲げモーメントを求むれば、次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} M_{34} &= -\frac{C_{12}k(\cos h 2\xi - \cos 2\xi)(2\sigma)^2 - pl k'(3+2k)(\cos h 2\xi + \cos 2\xi + 2)}{2k'(3+2k)(\sin h 2\xi - \sin 2\xi)(2\sigma) + k(2+k)(\cos h 2\xi - \cos 2\xi)(2\sigma)^2} \\ M_{12} &= -\frac{3}{3+2k} C_{12} + \frac{k}{3+2k} M_{34} \\ M_E &= -\frac{C_{12}k 4 \sin \xi \sinh \xi (2\sigma)^2 - pl k'(3+2k) 4 \cos \xi \cos h \xi - pl k(2+k) 2(\sin h \xi \cos \xi - \cos h \xi \sin \xi)(2\sigma)}{2k'(3+2k)(\sin h 2\xi - \sin 2\xi)(2\sigma) + k(2+k)(\cos h 2\xi - \cos 2\xi)(2\sigma)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

2. $K = \infty$ なる場合

特別の場合として $K = \infty$ なる場合の曲げモーメントを前記 式-8 より求むれば、次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} M_{34}^{\xi=0} &= -\frac{C_{12}k}{k'(3+2k) + k(2+k)} \\ M_{12}^{\xi=0} &= -\frac{C_{12}(3k' + 2k)}{k'(3+2k) + k(2+k)} \\ M_E^{\xi=0} &= -\frac{C_{12}k}{k'(3+2k) + k(2+k)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

これらは兩垂直材下に固定支持點を考へて、普通求められてゐる曲げモーメントの公式と同じである。即ち地盤が非常に良い場合には、反力を垂直材下に集中して考へねばならない。

4. 結 言

以上の結果より、大体次の事が云へる。

- (i) 函形ラーメンの応力は地盤の強さに大なる關係がある
- (ii) 特に反力の大きに就ては注意を要する
- (iii) 特別の荷重状態では、比較的簡単な式で応力計算が出来る
- (iv) 普通假定して居る反力分布は本文の特別の場合になる

然しながら、本文は數式上の結果であるから、如何なる程度迄實際の場合と合致するか疑問である。たゞ地盤が彈性支承——即ち反力が変位に比例する地盤で Idealboden の如き場合——と考へ得られる範圍に於てのみ正しい。猶荷重状態は特別の場合を考へたけれども、同様の方針で一般的な場合の解も、多少の計算の煩雜さを思へば、求め得られる。地盤係數の變化（一部杭打を行つた場合等）を考慮しても、面白い結果が出ると思ふ。