論 説 報 告

第25巻第6號 昭和14年6月

上路補剛構桁を有する拱橋に關する研究

會員 小 澤 久 太 郎*

目 次

1. 緒 論

1. 緒 論

上路補剛構桁付拱橋の解法は横梁骨組線の変形を考慮しない所謂"彈性解法"によるを普通とするが實際には荷重により骨組線変形の影響を考慮に入れなければならない。本論文は斯かる変形を考慮に入れた上路補剛構桁付拱橋の解法を示したものである。

2. 曲桁の変位と外力との關係

圖-1 に於て曲桁中の一部分 ds を採り其の兩端を $S_1(x,y)$, $S_2(x+dx,\ y+dy)$ とし S_1 に於ける曲桁の切線と x 軸とのなす角を φ とすれば曲桁が上面に向つて凸形をなす場合には正の dx に對し角変化 $d\varphi$ は負となる。今斯かる曲桁が外力による曲げモーメント竝に垂直力の影響をうけて $-y$ の方向に $+\eta$, $+x$ の方向に $+\xi$ なる変位をなすとすれば, $S_1(x,\ y)$ は $S_1'(x+\xi,\ y+\eta)$, $S_2(x+dx,\ y+dy)$ は $S_2'(x+dx+\xi+d\xi,\ y+dy+\eta+d\eta)$ なる位

* 工学士 中國臨時政府建設總署公務局工務科長

置に來る，

図-1.

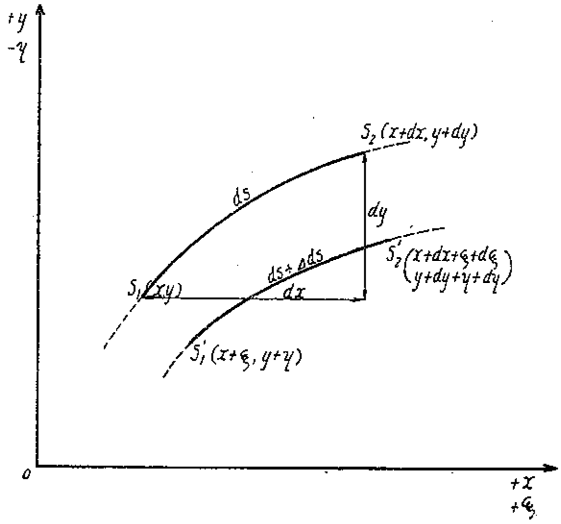


図-1 に於て

$$dy=ds\sin\varphi$$

dy の變化を Δdy とすれば

$$\Delta dy=\Delta ds\sin\varphi+ds\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$=\frac{\Delta ds}{ds}dy+\Delta\varphi dx$$

然るに

$$\eta=-\Delta y$$

$$\therefore\quad d\eta=-d\Delta y=-\Delta dy$$

$$=-\frac{\Delta ds}{ds}dy-\Delta\varphi dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣に 図-1 に於て

$$dx=ds\cdot\cos\varphi$$

故に dx の變化を Δdx とすれば

$$\Delta dx=\Delta ds\cdot\cos\varphi-ds\cdot\Delta\varphi\sin\varphi=\frac{\Delta ds}{ds}dx-\Delta\varphi dy$$

然るに

$$d\xi=+\Delta dx=\frac{\Delta ds}{ds}dx-\Delta\varphi dy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 式より

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=-\frac{\Delta ds}{ds}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d\Delta\varphi}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

扨て曲桁變形後に於ても曲桁中立軸は１平面内にあり且つ變形は總べて力の面に起るとし

r: 曲桁の曲率半徑（曲桁が上方に向つて凸形の場合を正とす）

ds_v: 曲桁の中立軸に直角なる極めて接近せる２平面間の纖維長

なる符號を用ひ，且つ曲桁中立軸に直角なる平面は變形後も曲桁中立軸に直角と假定すれば曲桁中立軸に直角なる極めて接近せる２平面間の角は桁が上方に向つて凸形なる場合には $+dx$ に對して $-d\varphi$ にて表はす事が出來る。

図-2

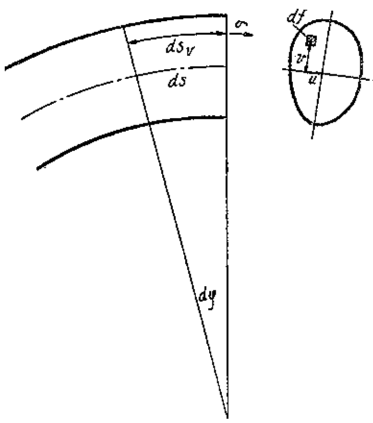


図-2 に於て曲桁上の極めて相接せる２點 $(x,\ y)$ $(x+dx,\ y+dy)$ に於て曲桁中立軸に直角なる２平面間の v に於ける變形前の纖維長を ds_v とし變形後の纖維長を $ds_v+\Delta ds_v$ とすれば

$$ds_v=ds-vd\varphi$$

且つ

$$\Delta ds_v=\Delta ds-v\Delta d\varphi$$

$$\therefore\quad\frac{\Delta ds_v}{ds_v}=\frac{\Delta ds-v\Delta d\varphi}{ds-vd\varphi}$$

然るに

$$ds=-rd\varphi$$

$$\therefore\quad\frac{\Delta ds_v}{ds_v}=\frac{\Delta ds-v\Delta d\varphi}{ds\left(1-\dfrac{vd\varphi}{ds}\right)}=\left(\frac{\Delta ds}{ds}-\frac{v\Delta d\varphi}{ds}\right)\left(\frac{r}{r+v}\right)\cdots(4)$$

今纖維應力 σ（引張（+））によつて ds_v なる纖維長が Δds_v なる變化をしたとすれば

$$\frac{\Delta ds_v}{ds_v}=\frac{\sigma}{E}$$

∴ $$\sigma=E\frac{\Delta ds_v}{ds_v}=E\left(\frac{\Delta ds_v}{ds}-\frac{v\Delta d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+v} \quad\cdots\cdots(5)$$

故に　N: 外力の曲桁中立軸に平行なる方向への分力（圧縮力（+））

M: 外力の曲げモーメント（曲桁上側に圧縮力の生ずるが如き曲げモーメントを（+））

とすれば

$$\left.\begin{aligned}&N+\int\sigma df=0\\&M+\int\sigma v df=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

なる條件式が成立つ。(5) 及 (6)式より

$$\left.\begin{aligned}&N=-E\frac{\Delta ds}{ds}\int\frac{r}{r+v}df+E\frac{\Delta d\varphi}{ds}\int\frac{rv}{r+v}df\\&M=-E\frac{\Delta ds}{ds}\int\frac{rv}{r+v}df+E\frac{\Delta d\varphi}{ds}\int\frac{rv^2}{r+v}df\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6')$$

且つ　$$\int df=F,\qquad \int vdf=0$$

但し F: 曲桁斷面積

故に

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{rdf}{r+v}=\int df-\int\frac{vdf}{r+v}=F-\frac{1}{r}\int vdf+\frac{1}{r}\int\frac{v^2df}{r+v}=F+\frac{1}{r^2}\int\frac{rv^2}{r+v}df\\&\int\frac{rv}{r+v}df=\int vdf-\int\frac{v^2df}{r+v}=-\frac{1}{r}\int\frac{rv^2}{r+v}df\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

(7) 式に於て

$$\int\frac{rv^2}{r+v}df=\int v^2df-\frac{1}{r}\int v^3\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}\cdots\right)df\fallingdotseq I\quad\cdots\cdots(8)$$

但し I: 曲桁の惰性率

(7) 及 (8) 式の値を (6') 式に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}&\frac{N}{E}=-\frac{\Delta ds}{ds}F-\left(\frac{\Delta d\varphi}{ds}+\frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds}\right)\frac{I}{r}\\&\frac{M}{E}=\left(\frac{\Delta d\varphi}{ds}+\frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds}\right)I\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(9)$$

(9) 式より

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{N}{EF}+\frac{M}{EFr}\fallingdotseq\frac{N}{EF}\\&\frac{\Delta d\varphi}{ds}=\frac{N}{EFr}+\frac{M}{EFr^2}+\frac{M}{EI}\fallingdotseq\frac{N}{EFr}+\frac{M}{EI}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(10)$$

(10) 式より

$$\frac{\Delta d\varphi}{dx}=\frac{\Delta d\varphi}{ds}\times\frac{ds}{dx}=\frac{N}{EFr\cos\varphi}+\frac{M}{EI\cos\varphi}\quad\cdots\cdots(11)$$

(10) 並に (11) 式を (3) 式に代入すれば

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{N}{EF}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{N}{EFr\cos\varphi}-\frac{M}{EI\cos\varphi}$$

$$=-\frac{N}{EFr}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}\right)-\frac{M}{EI\cos\varphi}\fallingdotseq-\frac{2H}{EF_0r}-\frac{M}{EI_0}$$

F_0：拱頂に於ける拱の斷面積，I_0：拱頂に於ける拱の惰性率，H：拱に加はる水平推力

$$\therefore\quad M=-\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{2H}{EF_0r}\right)EI_0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

曲桁の抵抗モーメントを M' とすれば

$$M+M'=0$$

$$\therefore\quad M'=\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{2H}{EF_0r}\right)EI_0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

2. 補剛構桁及拱の撓，曲げモーメント並に拱に傳はる荷重

3. 補剛構桁及拱の撓

補剛構桁竝に拱の上端に圧縮を生ぜしむるが如き曲げモーメントを正號とし荷重，反力は下向きを正號とすれば，

補剛構桁に傳はる曲げモーメントは

$$[M]=\mathfrak{M}-H(y-\eta)+M' \qquad \cdots\cdots(14)$$

にて表はされる。但し

$\mathfrak{M}$：補剛構桁を單構桁と考へし場合の曲げモーメント

M'：拱の抵抗モーメント$=EI_0\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2}+\dfrac{2H}{EF_0r}\right)$

然らば補剛構桁の彈性曲線の式は

$$EJ\frac{d^2\eta}{dx^2}=-[M]=-\mathfrak{M}+H(y-\eta)-EI_0\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{2H}{EF_0r}\right) \qquad \cdots\cdots(15)$$

但し　J：補剛構桁の惰性率

(15) 式を變化すれば

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+c^2\eta+c^2F(x)=0 \qquad \cdots\cdots(16)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}F(x)&=\frac{\mathfrak{M}}{H}-y+\frac{2I_0}{F_0r}\\ c^2&=\frac{H}{E(J+I_0)}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(17)$$

となり (16) 式の解は

$$\eta=A\sin cx+B\cos cx-F(x)+\frac{1}{c^2}F''(x) \qquad \cdots\cdots(18)$$

にて表はされる。

今，拱軸線を抛物線として原點を起拱點に採れば拱軸線は

$y=\dfrac{4f}{l^2}x(l-x)$　　但し　f：拱矢，l：支間

にて表はされ拱頂に於ける拱軸線の曲率半徑は

$$r_0=-\frac{1}{\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{l^2}{8f}$$

にて與へられる。然らば補剛構桁及拱の撓は

$$\eta=A\sin cx+B\cos cx-\left[\frac{\mathfrak{M}}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right] \quad\cdots\cdots(19)$$

にて表はされる。上式中 A, B は環境條件より決定さるべき常數である。

4. 拱の抵抗モーメント及拱に傳はる曲げモーメント

(19) 式より

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=-c^2A\sin cx-c^2B\cos cx-\left[\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right] \quad\cdots\cdots(20)$$

(20) 式を (13) 式に代入すれば拱の抵抗モーメントは

$$\left.\begin{aligned}M'&=-EI_0\left\{c^2A\sin cx+c^2B\cos cx+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}\\&=-\frac{I_0}{J+I_0}H\left\{A\sin cx+B\cos cx+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right)-\frac{2(J+I_0)}{F_0r}\right\}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(21)$$

にて與へられる。又 (21) 式より拱に傳はる曲げモーメントは

$$\left.\begin{aligned}M&=-M'=EI_0\left\{c^2A\sin cx+c^2B\cos cx+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}\\&=\frac{J_0}{J+I_0}H\left\{A\sin cx+B\cos cx+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right)-\frac{2(J+I_0)}{F_0r}\right\}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

にて表はされる。

5. 補剛構桁に傳はる曲げモーメント

補剛構桁に傳はる曲げモーメントは (14) 式に依りて

$$[M]=\mathfrak{M}-H(y-\eta)+M'$$

にて與へられる。今上式に (19) 及 (21) 式を代入すれば補剛構桁に傳はる曲げモーメントの式として

$$[M]=\frac{J}{J+I_0}H\left\{A\sin cx+B\cos cx+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(23)$$

なる式を得る。

6. 補剛構桁の剪力並に拱に傳はる荷重

補剛構桁の剪力は

$$[S]=-\frac{d[M]}{dx} \quad\cdots\cdots(24)$$

(23) 及 (24) 式より

$$[S]=\frac{-J}{J+J_0}H\left\{cA\cos cx-cB\sin cx\right\} \quad\cdots\cdots(25)$$

又補剛構桁單位長に傳はる荷重は

$$[Q]=\frac{d[S]}{dx}=+\frac{J}{J+I_0}c^2H\left\{A\sin cx+B\cos cx\right\} \quad\cdots\cdots(26)$$

故に w：單位長當り荷重とすれば，拱に傳はる荷重は

$$Q=w-\frac{J}{J+I_0}c^2H\left\{A\sin cx+B\cos cx\right\}\cdots\cdots(27)$$

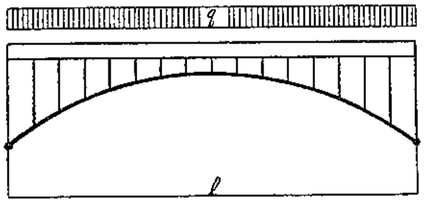
にて表はされる。

3. 常 數 の 決 定

(91)~(27) 式中に於ける A, B は種々の荷重狀態によつて決定さる可き常數である。本章に於ては各荷重狀態に就て A, B を決定せんとす。

7. 死荷重（q/橋長單位長）のみ負載する場合

圖-3.



$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}qx(l-x),\qquad \therefore\ \frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}=-q$$

故に (19) 式より撓は

$$\eta=A\sin cx+B\cos cx-\left[\frac{1}{2H}qx(l-x)-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\cdots\cdots(28)$$

にて表はされる。今 $x=0$, $x=l$ に於て $\eta=0$ なる條件式より A, B を決定すれば

$x=0$ に於て

$$\eta=0=B-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right],\qquad \therefore\ B=\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{q}{H}-\frac{8f}{l^2}\right]\cdots\cdots(29)$$

$x=l$ に於て

$$\eta=0=A\sin cl+B\cos cl-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right],\qquad \therefore\ A=\frac{1-\cos cl}{\sin cl}B\cdots\cdots(30)$$

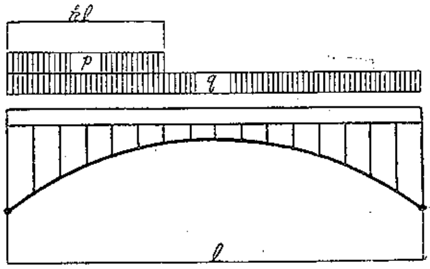
8. 死荷重及活荷重の負載する場合

(a) 等分布死荷重（q/橋長單位長）の外に等分布活荷重（p/橋長單位長）が全橋長に等布する場合 (30) 式並に (31) 式の q の代りに $(p+q)$ と置けば良い。

(b) 側片活荷重の負載する場合

等分布死荷重（q/橋長單位長）の外に橋端より kl なる區間に等分布活荷重（p/橋長單位長）が負載する場合（圖-4 參照）

圖-4.



1. $0<x<kl$

$$\mathfrak{M}_1=\frac{1}{2}qx(l-x)+\frac{1}{2}px[kl(2-k)-x]$$

故に撓及撓角は (19) 式より

$$\left.\begin{aligned}\eta_1&=A_1\sin cx+B_1\cos cx-\left[\frac{\mathfrak{M}_1}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{H}(p+q)+\frac{8f}{l^2}\right]\\ \frac{d\eta_1}{dx}&=cA_1\cos cx-cB_1\sin cx-\left[\frac{1}{H}\frac{d\mathfrak{M}_1}{dx}-\frac{4f}{l^2}(l-2x)\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

2. $kl<x<l$

$$\mathfrak{M}_2=\frac{1}{2}qx(l-x)+\frac{1}{2}pk^2l(l-x)$$

故に撓及撓角は

$$\left.\begin{aligned}\eta_2&=A_2\sin cx+B_2\cos cx-\left[\frac{\mathfrak{M}_2}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{-q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\\\frac{d\eta_2}{dx}&=cA_2\cos cx-cB_2\sin cx-\left[\frac{1}{H}\frac{d\mathfrak{M}_2}{dx}-\frac{4f}{l^2}(l-2x)\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

玆に於て $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ を決定するには

$x=0$ に於て $\eta_1=0,\quad x=l$ に於て $\eta_2=0$

$x=kl_1$ に於て $\eta_1=\eta_2 \qquad \dfrac{d\eta_1}{dx}=\dfrac{d\eta_2}{dx}$

なる條件式を利用すれば良い。然らば

$x=0$ に於て

$$\eta_1=0=B_1-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{H}(p+q)+\frac{8f}{l^2}\right] \qquad \therefore\quad B_1=\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{H}(p+q)-\frac{8f}{l^2}\right]+\frac{2I_0}{F_0r}\cdots\cdots(33)$$

$x=l$ に於て $\eta_2=0$ の條件より

$$0=A_2\sin cl+B_2\cos cl-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\left[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\cdots\cdots(34)$$

$x=kl$ に於て $\eta_1=\eta_2$ の條件より

$$A_1\sin ckl+B_1\cos ckl-\frac{p}{c^2H}=A_2\sin ckl+B_2\cos ckl\cdots\cdots(35)$$

$x=kl$ に於て $\dfrac{d\eta_1}{dx}=\dfrac{d\eta_2}{dx}$ の條件より

$$A_1\cos ckl-B_1\sin ckl=A_2\cos ckl-B_2\sin ckl\cdots\cdots(36)$$

(34)~(36) 式より $A_1,\ A_2,\ B_2$ を求むれば

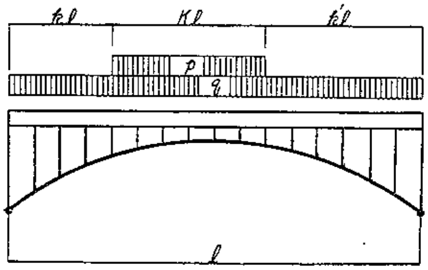
$$\left.\begin{aligned}B_2&=B_1-\frac{p}{c^2H}\cos ckl\\A_2&=\frac{1}{\sin cl}\left[-B_2\cos cl+\frac{q}{c^2H}-\frac{8f}{c^2l^2}+\frac{2I_0}{F_0r}\right]\\A_1&=A_2+\frac{p}{c^2H}\sin ckl\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(37)$$

を得。

(c) 中央部片活荷重の負載する場合

等分布死荷重（q/橋長單位長）の外に中央部 kl なる區間に等分布活荷重（p/橋長單位長）が負載する場合（圖-5）

圖-5.



1. $0<x<kl$

$$\mathfrak{M}_1=\frac{1}{2}qx(l-x)+\left(\frac{1}{2}K+k'\right)pKlx$$

$$\eta_1=A_1\sin cx+B_1\cos cx-\left[\frac{\mathfrak{M}_1}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)\right.$$

$$+\frac{2I_0}{F_0r}\Big]+\frac{1}{c^2}\Big[\frac{-q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big] \qquad \cdots\cdots(38)$$

$$\frac{d\eta_1}{dx}=cA_1\cos cx-cB_1\sin cx-\Big[\frac{1}{H}\frac{d\mathfrak{M}_1}{dx}-\frac{4f}{l_2}(l-2x)\Big]$$

2. $kl<x<(k+K)l$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_2=\frac{1}{2}qx(l-x)+\Big[\Big(\frac{1}{2}K+k'\Big)pKlx-\frac{1}{2}p(x-kl)^2\Big]\\
&\eta_2=A_2\sin cx+B_2\cos cx-\Big[\frac{\mathfrak{M}_2}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\Big]+\frac{1}{c^2}\Big[-\frac{p+q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big]\\
&\frac{d\eta_2}{dx}=cA_2\cos cx-cB_1\sin cx-\Big[\frac{1}{H}\frac{d\mathfrak{M}_2}{dx}-\frac{4f}{l^2}(l-2x)\Big]
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(39)$$

3. $(k+K)\ l<x<l$

$$\mathfrak{M}_3=\frac{1}{2}qx(l-x)+\Big(\frac{1}{2}K+k\Big)pKl(l-x)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_3=A_3\sin cx+B_3\cos cx-\Big[\frac{\mathfrak{M}_3}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\Big]+\frac{1}{c^2}\Big[\frac{-q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big]\\
&\frac{d\eta_3}{dx}=cA_3\cos cx-cB_3\sin cx-\Big[\frac{1}{H}\frac{d\mathfrak{M}_3}{dx}-\frac{4f}{l^2}(l-2x)\Big]
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(40)$$

茲に於て A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 を決定するには

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{i} & x=0 \text{ に於て} & \eta_1=0\\
\text{ii} & x=kl & \eta_1=\eta_2\\
\text{iii} & x=kl & \dfrac{d\eta_1}{dx}=\dfrac{d\eta_2}{dx}\\
\text{iv} & x=(k+K)l & \eta_2=\eta_3\\
\text{v} & \text{〃} & \dfrac{d\eta_2}{dx}=\dfrac{d\eta_3}{dx}\\
\text{vi} & x=l & \eta=0
\end{array}\right\}\text{の 6 條件式を利用するが良い。}$$

i の條件より

$$0=B_1-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c^2}\Big[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big]$$

$$\therefore\quad B_1=\frac{1}{c^2}\Big(\frac{q}{H}-\frac{8f}{l^2}\Big)+\frac{2I_0}{F_0r} \qquad \cdots\cdots(41)$$

ii の條件より

$$A_1\sin ckl+B_1\cos dkl-\frac{q}{c^2H}=A_2\sin ckl+B_2\cos ckl-\frac{p+q}{H} \qquad \cdots\cdots(42)$$

iii の條件式より

$$A_1\cos ckl-B_1\sin ckl=A_2\cos ckl-B_2\sin ckl \qquad \cdots\cdots(43)$$

iv の條件式より

$$A_2\sin c(k+K)l+B_2\cos c(k+K)l-\frac{p+q}{c^2H}$$

$$=A_3\sin c(k+K)l+B_3\cos c(k+K)l-\frac{8}{c_2H} \qquad \cdots\cdots(44)$$

v の條件式より

$$A_2\cos c(k+K)l-B_2\sin c(k+K)l=A_3\cos c(k+K)l-B_3\sin c(k+K)l \quad \cdots\cdots(45)$$

vi の條件式より

$$0=A_3\sin cl+B_3\cos cl-\frac{2I_0}{F_0r}+\frac{1}{c_2}\left[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]$$

$$A_3=\frac{-1}{\sin cl}\left[B_3\cos cl-\frac{2I_0}{F_0r}\quad\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right] \quad \cdots\cdots(46)$$

之等 (41)～(46) の條件式より

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=\frac{q}{c^2H}-\frac{8f}{c^2l^2}+\frac{2I_0}{F_0r}\\
B_2&=B_1+\frac{p}{c^2H}\cos ckl\\
B_3&=B_2-\frac{p}{c^2H}\cos c(k+K)l\\
A_3&=-\frac{1}{\sin cl}\left[B_3\cos cl-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right]\\
A_2&=A_3+\frac{p}{c^2H}\sin c(k+K)l\\
A_1&=A_2-\frac{p}{c^2H}\sin ckl
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(47)$$

なる常數を決定する事が出來る。

4. 水平推力の算定

9. 水平推力算定の條件式

2 に於て補剛構桁及拱の撓，曲げモーメント等を求めたが何れも水平推力 H の項を含んでゐる。故に H の算定を行はなければ上記の諸量を決定する事が出來ない。本章に於ては各種荷重狀態に就き H を決定せんとするのであるが其が爲には先づ橋梁に荷重を加へた場合に外力のなす仕事，內力のなす仕事を考へなければならぬ。

(a) 外力のなす仕事

橋梁に或る荷重が加はつた際に垂直材を通じて拱に傳はる荷重は (27) 式により

$$Q=w-\frac{J}{J+I_0}c^2H\left\{A\sin cx+B\cos cx\right\}$$

にて與へらる。然して拱のなす變位は (19) 式により

$$\eta=A\sin cx+B\cos cx-\left[\frac{\mathfrak{M}}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right]$$

で與へられるから無荷重狀態より或る荷重狀態に至る迄に外力のなす仕事は

$$W_1=\frac{1}{2}\int_a^b Q\eta dx=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{w-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A\sin cx+B\cos cx)\right\}\left\{A\sin cx+B\cos cx\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\mathfrak{M}}{H}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right]\right\}dx \quad \cdots\cdots(48)$$

にて表はされる。

(b) 內力のなす仕事

內力のなす仕事は拱に作用する曲げモーメントによる仕事，垂直力による仕事に分ける事が出來る。

1. 曲げモーメントによる仕事

拱に作用する曲げモーメントは (23) 式により

$$M=EI_0\left\{c^2A\sin cx+c^2B\cos cx+\left(\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}\right)-\frac{2H}{EF_0r}\right\}$$

にて與へられる。故に斯る曲げモーメントに由る曲桁內の仕事は

$$W_2=\int_0^l\frac{1}{2EI}M^2ds=\frac{1}{2EI_0}\int_0^lM^2dx=\frac{EI_0}{2}\int_0^l\left\{c^2(A\sin cx+B\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx \quad\cdots\cdots(49)$$

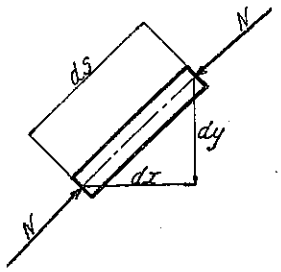
2. 垂直力による仕事

拱の一部分 ds を採りて N なる垂直力の作用する場合を考へれば (図-6 參照)

$$F=F_0\frac{ds}{dx} \qquad N=H\frac{ds}{dx}$$

但し $\left\{\begin{array}{l}F：\text{拱斷面積}\\ F_0：\text{拱頂斷面積}\end{array}\right.$

図-6



區間 ds の縮小は

$$\Delta ds=\frac{H\dfrac{ds}{dx}}{EF_0\dfrac{ds}{dx}}ds=\frac{H}{EF_0}ds$$

故に N なる垂直力の作用したがための內力の仕事は

$$W_3=\frac{1}{2}H\int_0^l\frac{ds}{dx}\times\frac{H}{EF_0}ds=\frac{1}{2}H^2\frac{1}{EF_0}\int_0^l\left(\frac{ds}{dx}\right)^2dx\cdots\cdots(50)$$

然るに拱は拋物線と假定するが故に

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^4}(l-2x)^2}dx$$

$$\therefore\quad\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^4}(l-2x)^2}\cdots\cdots(51)$$

(51) 式を (50) 式に代入すれば

$$W_3=\frac{1}{2}H^2\frac{1}{EF_0}\left(l+\frac{16}{3}\frac{f^2}{l}\right)\cdots\cdots(58)$$

を得。

茲に於て水平推力 H を求むるには

$$W_1=W_2+W_3\cdots\cdots(59)$$

なる條件式を解かなければならない。(59) 式中 W_3 は荷重狀態に拘らず同一式にて表はされるが W_1, W_2 は荷重狀態によつて異つた式となる。今各荷重狀態に於ける W_1, W_2 を計算すれば **10** 及 **11** の如くなる。

10. 死荷重のみ負載する場合

(a) 外力のなす仕事

外力のなす仕事は (48) 式によつて

$$W_1=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A\sin cx+B\cos cx)\right\}\left\{A\sin cx+B\cos cx\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}qx(l-x)-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{-q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A\sin cx+B\cos cx)\right\}\left\{A\sin cx+B\cos cx\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2}\frac{q}{H}-\frac{4f}{l^2}\right)lx+\left(\frac{1}{2}\frac{q}{H}-\frac{4f}{l^2}\right)x^2+\left(-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{1}{c^2}\frac{q}{H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\alpha-\beta(A\sin cx+B\cos cx)\right\}\left\{A\sin cx+B\cos cx)+\lambda x+\mu x^2+\nu\right\}dx$$

但し

$$\begin{cases}\alpha=q\\ \beta=\dfrac{J}{J+I_0}c^2H\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\dfrac{ql}{H}+\dfrac{4f}{l}\\ \mu=\dfrac{1}{2}\dfrac{q}{H}-\dfrac{4f}{l^2}\\ \nu=-\dfrac{2I_0}{F_0r}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{q}{H}+\dfrac{8f}{c^2l^2}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\alpha\nu l-\frac{1}{2}\beta(A^2+B^2)l+\frac{\alpha\lambda}{2}l^2+\frac{\alpha\mu}{2}l^3\right\}+\frac{\beta}{4c}(A^2-B^2)\sin 2cl+\frac{\beta}{2c}AB(\cos 2cl-1)\right.$$
$$+\left\{(\alpha+\beta\nu)\frac{\beta}{c}-\beta\lambda\frac{A}{c^2}+\beta\mu\frac{2}{c^3}B\right\}\sin cl-\left(\beta\lambda\frac{Bl}{c}+\beta\mu\frac{2l}{c^2}A\right)\sin cl$$
$$-\beta\mu\frac{l^2}{c}B\sin cl-\left\{(\alpha-\beta\nu)\frac{A}{c}+\beta\lambda\frac{B}{c^2}+\beta\mu\frac{2}{c^3}A\right\}(\cos cl-1)$$
$$\left.+\left(\beta\lambda\frac{Al}{c}-\beta\mu\frac{2l}{c^2}B\right)\cos cl+\beta\mu\frac{Al^2}{c}\cos cl\right]\quad\cdots\cdots\cdots(60)$$

(b) 曲げモーメントによる內力のなす仕事

彎曲による仕事は (49) 式によりて

$$W_2=\frac{EI_0}{2}\int_0^l\left\{c^2(A\sin cx+B\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$
$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^l\left\{c^2(A\sin cx+B\cos cx)-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$
$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^l\left\{c^2(A\sin cx+B\cos cx)+T\right\}^2dx$$

但し $\qquad T=\left(-\dfrac{q}{H}+\dfrac{8f}{l^2}-\dfrac{2H}{EF_0r}\right)$

$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^l\left\{c^4(A^2\sin^2cx+2AB\sin cx\cos cx+B^2\cos^2cx)+2c^2T(A\sin cx+B\cos cx)+T^2\right\}dx$$

$$=\frac{EI_0}{2}\left[\left\{c^4\frac{l}{2}(A^2+B^2)+lT^2\right\}-\frac{c^3}{4}(A^2-B^2)\sin 2cl\right.$$

$$\left.-\frac{c^3}{2}AB\cos 2cl+2cTB\sin cl-2cTA(\cos cl-1)\right]\cdots\cdots(61)$$

玆に於て水平推力を求めるには (60), (61), (58) 式の値を (59) 式に代入すれば良い。

11. 死荷重及活荷重の負載する場合

(a) 活荷重が全橋長に等布する場合

死荷重の場合の q の代りに $(p+q)$ と置けば可い。

(b) 側片活荷重の負載する場合

1. 外力のなす仕事

(48)式により

$$W_1=\frac{1}{2}\int_o^{kl}\left\{(p+q)-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_1\sin cx+B_1\cos cx)\right\}\left\{A_1\sin cx+B_1\cos cx\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{H}\left\{\frac{1}{2}qx(l-x)+\frac{1}{2}px((kl(2-k)-x))\right]-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{-(p+q)}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\right\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{kl}^{l}\left\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_2\sin cx+B_2\cos cx)\right\}\left\{A_2\sin cx+B_2\cos cx\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{H}\left\{\frac{1}{2}qx(l-x)+\frac{1}{2}pk^2l(l-x)\right\}-\frac{4f}{l^2}x(l-x)+\frac{2I_0}{F_0r}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{-q}{H}+\frac{8f}{l^2}\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_o^{kl}\left\{\alpha_1-\beta(A_1\sin cx+B_1\cos cx)\right\}\left\{(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+\lambda_1x+\mu_1x^2+\nu_1\right\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{kl}^{l}\left\{\alpha_2-\beta(A_2\sin cx+B_2\cos cx)\right\}\left\{(A_2\sin cx+B_2\cos cx)+\lambda_2x+\mu_2x^2+\nu_2\right\}dx$$

$$\cdots\cdots(62)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1&=p+q\\
\beta&=\frac{J}{J+I_0}c^2H\\
\lambda_1&=\left[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql-\frac{1}{H}\frac{1}{2}pkl(2-k)+\frac{4f}{l}\right]\\
\mu_1&=\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}q+\frac{1}{H}\frac{1}{2}p-\frac{4f}{l^2}\right]\\
\nu_1&=\frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{H}(p+q)+\frac{8f}{l^2}\right]-\frac{2I_0}{F_0r}\\
\alpha_2&=q\\
\lambda_2&=\left(-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql+\frac{1}{H}\frac{1}{2}pk^2l+\frac{4f}{l}\right)\\
\mu_2&=\left(\frac{1}{H}\frac{1}{2}q-\frac{4f}{l^2}\right)\\
\nu_2&=\left(-\frac{1}{H}\frac{1}{2}pk^2l^2-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{1}{c^2}\frac{1}{H}q+\frac{1}{c^2}\frac{8f}{l^2}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(63)$$

(62)式を計算すれば

$$W_1=\frac{1}{2}\Big[\Big\{[\alpha_1\nu_1-\frac{1}{2}\beta_1(A_1{}^2+B_1{}^2)]kl+\frac{\lambda_1\alpha_1}{2}k^2l^2+\frac{\alpha_1\mu_1}{2}k^3l^3\Big\}$$

$$+\frac{\beta_1}{4c}(A_1{}^2-B_1{}^2)\sin 2ckl+\frac{\beta_1}{2c}A_1B_1(\cos 2ckl-1)$$

$$+\Big\{(\alpha_1-\beta_1\nu_1)\frac{B_1}{c}-\beta_1\lambda_1\frac{A_1}{c^2}+\beta_1\mu_1\frac{2}{c^3}B_1\Big\}\sin ckl$$

$$-\Big(\beta_1\lambda_1\frac{B_1kl}{c}+\beta_1\mu_1\frac{2kl}{c^2}A_1\Big)\sin ckl-\beta\ \mu_1\frac{k^2l^2}{c}B_1\sin ckl$$

$$-\Big\{(\alpha_1-\beta_1\nu_1)\frac{A_1}{c}+\beta_1\lambda_1\frac{B_1}{c^2}+\beta_1\mu_1\frac{2}{c^3}A_1\Big\}(\cos ckl-1)$$

$$+\Big(\beta_1\lambda_1\frac{A_1kl}{c}-\beta_1\mu_1\frac{2kl}{c^2}B_1\Big)\cos ckl+\beta_1\mu_1\frac{A_1k^2l^2}{c}\cos ckl\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Big\{[\alpha_2\nu_2-\frac{1}{2}\beta_2(A_2{}^2+B_2{}^2)](l-kl)+\frac{\lambda_2\alpha_2}{2}(l^2-k^2l^2)+\frac{\alpha_2\mu_2}{2}(l^3-k^3l^3)\Big\}$$

$$+\frac{\beta_2}{4c}(A_2{}^2-B_2{}^2)(\sin 2cl-\sin 2ckl)+\frac{\beta_2}{2c}A_2B_2(\cos 2cl-\cos 2ckl)$$

$$+\Big\{(\alpha_2-\beta_2\nu_2)\frac{B_2}{c}-\beta_2\lambda_2\frac{A_2}{c^2}+\beta_2\mu_2\frac{2}{c^3}B_2\Big\}(\sin cl-\sin ckl)$$

$$-\Big(\beta_2\lambda_2\frac{B_2l}{c}+\beta_2\mu_2\frac{2l}{c^2}A_2\Big)(\sin cl-k\sin ckl)-\beta_2\mu_2\frac{l^2}{c}B_2(\sin cl-k^2\sin ckl)$$

$$-\Big\{(\alpha_2-\beta_2\nu_2)\frac{A_2}{c}+\beta_2\lambda_2\frac{B_2}{c^2}+\beta_2\mu_2\frac{2}{c^3}A_2\Big\}(\cos cl-\cos ckl)$$

$$+\Big(\beta_2\lambda_2\frac{A_2l}{c}-\beta_2\mu_2\frac{2l}{c^2}B_2\Big)(\cos cl-k\cos ckl)+\beta_2\mu_2\frac{A_2l^2}{c}(\cos cl-k^2\cos ckl)\Big] \quad \cdots\cdots(64)$$

2. 曲げモーメントによる內力のなす仕事

彎曲による仕事は (40) 式より

$$W_2=\frac{EI_0}{2}\int_0^{kl}\Big\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}_1}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{kl}^{l}\Big\{c^2(A^2\sin cx+B_2\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}_2}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big\}^2dx$$

$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^{kl}\Big\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)-\frac{1}{H}(p+q)+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{kl}^{l}\Big\{c^2(A^2\sin cx+B_2\cos cx)-\frac{1}{H}q+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big\}^2dx$$

$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^{kl}\Big\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+T_1\Big\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{kl}^{l}\Big\{c^2(A_2\sin cx+B_2\cos cx)+T_2\Big\}^2dx$$

但し
$$T_1=\Big(-\frac{p+q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big)$$

$$T_2=\Big(-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\Big)$$

$$=\frac{EI_0}{2}\Big[\Big\{c^4\frac{kl}{2}(A_1{}^2+B_1{}^2)+klT_1{}^2\Big\}-\frac{c^3}{4}(A_1{}^2-B_1{}^2)\sin 2c\,kl$$

$$-\frac{c^3}{2}A_1B_1(\cos 2ckl-1)+2cT_1B_1\sin ckl-2cT_1A_1(\cos ckl-1)\Big]$$

$$+\frac{EI_0}{2}\Big[\Big\{c^4\Big(\frac{l}{2}-\frac{kl}{2}\Big)(A_2{}^2+B_2{}^2)+(l-kl)T_2{}^2\Big\}$$

$$-\frac{c^3}{4}(A_2{}^2-B_2{}^2)(\sin 2\,cl-\sin 2\,ckl)-\frac{c^3}{2}A_2B_2(\cos 2cl-\cos 2ckl)$$

$$+2cT_2B_2(\sin cl-\sin ckl)-2c\,T_2A_2(\cos cl-\cos ckl)\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

茲に於て水平推力を求むるには (64), (65), (58) 式の値を (59) 式に代入すれば良い。

(c) 中央部片活荷重の負載する場合

1. 外力のなす仕事

外力のなす仕事は (48) 式により

$$W_1=\frac{1}{2}\int_o^{kl}\Big\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_1\sin cx+B_1\cos cx)\Big\}\Big\{A_1\sin cx+B_1\cos cx)$$

$$-\Big[\frac{1}{H}\Big\{\frac{1}{2}qx(l-x)+\Big(\frac{1}{2}K+k'\Big)pKlx\Big)\Big\}-\frac{4x(l-x)f}{l^2}+\frac{2I_0}{F_0r}\Big]+\frac{1}{c^2}\Big[-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{kl}^{(k+K)l}\Big\{(p+q)-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_2\sin cx+B_2\cos cx)\Big\}\Big\{(A_2\sin cx+B_2\cos cx)$$

$$-\Big[\frac{1}{H}\Big\{\frac{1}{2}qx(l-x)+\Big(\frac{1}{2}K+k'\Big)\,pKlx-\frac{1}{2}p(x-kl)^2\Big\}-\frac{4x(l-x)}{l^2}f$$

$$+\frac{2I_0}{F_0r}\Big]+\frac{1}{c^2}\Big[-\frac{p+q}{H}+\frac{8f}{l^2}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\Big\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_3\sin cx+B_3\cos cx)\Big\}\Big\{(A_3\sin cx+B_3\cos cx)$$

$$-\Big[\frac{1}{H}\Big\{\frac{1}{2}qx(l-x)+\Big(\frac{1}{2}K+k\Big)pKl(l-x)\Big\}-\frac{4x(l-x)f}{l^2}+\frac{2J_0}{F_0r}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\int_o^{l}\Big\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_1\sin cx+B_1\cos cx)\Big\}\Big\{(A_1\sin cx+B_1\cos cx)$$

$$+\Big[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql-\frac{1}{H}\Big(\frac{1}{2}K+k'\Big)pKl+\frac{4f}{l}\Big]x+\Big[\frac{1}{H}\frac{1}{2}q-\frac{4f}{l^2}\Big]x^2$$

$$+\Big[-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\Big]\Big\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{kl}^{(k+K)l}\Big\{(p+q)-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_2\sin cx+B_2\cos cx)\Big\}\Big\{(A_2\sin cx+B_2\cos cx)$$

$$+\Big[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql-\frac{1}{H}\Big(\frac{1}{2}K+k'\Big)pKl-\frac{1}{H}pkl+\frac{4f}{l}\Big]x+\Big[\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql+\frac{1}{H}\frac{1}{2}p-\frac{4f}{l^2}\Big]x^2$$

$$+\Big[\frac{1}{H}\frac{1}{2}pk^2l^2-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{1}{c^2H}(p+q)+\frac{8f}{c^2l^2}\Big]\Big\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\Big\{q-\frac{J}{J+I_0}c^2H(A_3\sin cx+B_3\cos cx)\Big\}\Big\{(A_3\sin cx+B_3\cos cx)$$

$$+\left[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql+\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k\right)pKl+\frac{4f}{l}\right]x+\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}q-\frac{4f}{l^2}\right]x^2$$

$$+\left[-\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k\right)pKl^2-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right]\Bigg\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{kl}\Big\{\alpha_1-\beta_1(A_1\sin cx+B_1\cos cx)\Big\}\Big\{(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+\lambda_1x+\mu_1x^2+\nu_1\Big\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{kl}^{(k+K)l}\Big\{\alpha_2-\beta_2(A_2\sin cx+B_2\cos cx)\Big\}\Big\{(A_2\sin cx+B_2\cos cx)+\lambda_2x+\mu_2x^2+\nu_2\Big\}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\Big\{\alpha_3-\beta_3(A_3\sin cx+B_3\cos cx)\Big\}\Big\{(A_3\sin cx+B_3\cos cx)+\lambda_3x+\mu_3x^2+\nu_3\Big\}dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

上式中

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\alpha_3=q\\
&\alpha_2=p+q\\
&\beta_1=\beta_2=\beta_3=\frac{J}{J+I_0}c^2H\\
&\lambda_1=\left[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql-\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k'\right)pKl+\frac{4f}{l}\right]\\
&\mu_1=\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}q-\frac{4f}{l^2}\right]\\
&\nu_1=\left[-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right]\\
&\lambda_2=\left[-\frac{1}{H}\frac{1}{2}ql-\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k'\right)pKl-\frac{1}{H}pkl+\frac{4f}{l}\right]\\
&\mu_2=\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}(p+q)-\frac{4f}{l^2}\right]\\
&\nu_2=\left[\frac{1}{H}\frac{1}{2}pk^2l^2-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{1}{c^2H}(p+q)+\frac{8f}{c^2l^2}\right]\\
&\lambda_3=\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{H}ql+\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k\right)pKl+\frac{4f}{l}\right]\\
&\mu_3=\left[\frac{1}{2}\frac{1}{H}q-\frac{4f}{l^2}\right]\\
&\nu_3=\left[-\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}K+k\right)pKl^2-\frac{2I_0}{F_0r}-\frac{q}{c^2H}+\frac{8f}{c^2l^2}\right]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(67)$$

2. 曲げモーメントによる內力のなす仕事

彎曲による仕事は (49) 式より

$$W_2=\frac{EI_0}{2}\int_0^{kl}\left\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}_1}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{kl}^{(k+K)l}\left\{c^2(A_2\sin cx+B_2\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}_2}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\left\{c^2(A_3\sin cx+B_3\cos cx)+\frac{1}{H}\frac{d^2\mathfrak{M}_3}{dx^2}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$=\frac{EI_0}{2}\int_0^{kl}\left\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)-\frac{1}{H}q+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{kl}^{(k+K)l}\left\{c^2(A_2\sin cx+B_2\cos cx)-\frac{1}{H}(p+q)+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\left\{c^2(A_3\sin cx+B_3\cos cx)-\frac{1}{H}q+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right\}^2dx$$

$$=\frac{KI_0}{2}\int_0^{kl}\left\{c^2(A_1\sin cx+B_1\cos cx)+T_1\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{l}^{(k+K)l}\left\{c^2(A_2\cos cx+B_2\cos cx)+T_2\right\}^2dx$$

$$+\frac{EI_0}{2}\int_{(k+K)l}^{l}\left\{c^2(A_3\cos cx+B_3\cos cx)+T_3\right\}^2dx$$

但し
$$T_1=\left(-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right)$$

$$T_2=\left(-\frac{p+q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right)$$

$$T_3=\left(-\frac{q}{H}+\frac{8f}{l^2}-\frac{2H}{EF_0r}\right)$$

$$=\frac{EI_0}{2}\left[\left\{c^4\frac{kl}{2}(A_1^2+B_1^2)+klT_1^2\right\}-\frac{c^3}{4}(A_1^2-B_1^2)\sin 2ckl\right.$$

$$\left.-\frac{c^3}{2}A_1B_1(\cos 2ckl-1)+2cT_1B_1\sin ckl-2cT_1A_1(\cos 2ckl-1)\right]$$

$$+\frac{EI_0}{2}\left[\left\{c^4\frac{Kl}{2}(A_2^2+B_2^2)+KlT_2^2\right\}\right.$$

$$-\frac{c^3}{2}(A_2^2-B_2^2)\left\{\sin 2c(k+K)l-\sin 2ckl\right\}$$

$$-\frac{c^3}{2}A_2B_2\left\{\cos 2c(k+K)l-\cos 2ckl\right\}+2cT_2B_2\left\{\sin c(k+K)l-\sin ckl\right\}$$

$$\left.-2cT_2A_2\left\{\cos c(k+K)l-\cos 2ckl\right\}\right]+\frac{EI_0}{2}\left[\left\{c^4\frac{k'l}{2}(A_3^2+B_3^2)+k'lT_3^2\right\}\right.$$

$$-\frac{c^3}{4}(A_3^2-B_3^2)\left\{\sin 2cl-\sin 2c(k+K)l\right\}-\frac{c^3}{2}A_2B_2\left\{\cos 2cl-\cos 2c(k+K)l\right\}$$

$$+2cT_2B_2\left\{\sin cl-\sin c(k+K)l\right\}-2cT_2A_2\left\{\cos cl-\cos c(k+K)l\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

玆に於て水平推力の値を求むるには (67), (68), (58) 式の値を (59) 式に代入すれば良い。