論 説 報 告

第25巻第3號 昭和14年3月

中空円筒体の水平振動に就て

准員 岡 本 舜 三*

要 旨 本文は配水塔の如き中空円筒体の水平地震動による耐震性を明らかにする爲にその地震応力を求めたものである。猶同時に水圧による応力及熱応力をも求め，之と地震応力との大きさを比較し，地震応力が無視し得ざる値に達することを示した。

1. 緒 言

調圧水槽や配水塔の如き円壔形の筒体の基盤が水平地震動の如き週期的変位をせる場合に壔体のなす振動に關する性質を明らかにする爲に下端を地盤に固く埋込まれたる薄き一様なる壁厚を有する中空円筒体が下端に於て時間の三角函數で表はされる强制振動を受けたる場合に壁に生ずる応力狀態を求める。この場合筒体の自重及內部の水の靜水，動水圧及熱応力は振動に主要なる影響はしないものと假定する。彈性論から見れば薄き円筒殼の振動問題であるが之は 8 次方程式を解くを要し計算が複雜になるから一つ假定を設け，それによつて比較的簡單なる解を得た。もとより本解法は彈性学の応用であるから總ての彈性学的性質を假定してゐる。從つて鉄筋コンクリート構造物に適用して直ちに眞なりとはなし難いが近似的な解を與へるであらうことは想像される。計算を終つて痛感することは震力の値と，コンクリート壁体のポアソン比の値の決定の困難なることであつて，之等に對する確固たる理論の出現を望んでやまない。本文では初に水圧及熱応力の靜的応力を求め，地震応力が之等の平時の応力に比して如何なる程度のものなるやを示した。

計算の結果について恩師山口先生の御一覽を頂いた。厚く感謝の意を表する次第である。

2. 一 般 記 號

図-1 の如き円壔座標 (x, r, ϕ) を用ひる。x 軸を母線に一致せしめ偏角 ϕ を OA 軸よりはじめて右廻りに測るものと規約す。從つて半径一樣なる円筒では筒上の一點は x と ϕ のみによつて定められる。中央面によつて作られる円筒の直径を $2a$，壁厚を $2h$，筒の高さを l にて表はす。図-2 の如き壁体の一部分をとり，母線の方向を x，壁面に垂直の方向を z，切線の方向を y とせる右手座標系を考へ，各軸方向の応力，変位，変形を次の記號にて表はす。

図-1.

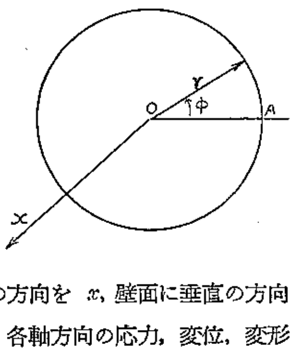
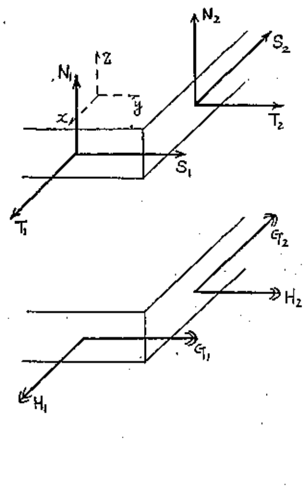


図-2.



面 力 T_1, T_2: 垂面応力

N_1, N_2: radial な方向の切面応力

* 道路技師 工学士 愛媛縣土木課勤務

S_1, S_2: tangential な方向の切面応力

H_1, H_2: 捩りモーメント

G_1, G_2: 曲げモーメント

且其の方向は夫々図に示すものを正の方向とす。

変　位　u: x 軸方向の変位

v: y 軸方向の変位（ϕ の増加する方向を正とす）

w: z 軸方向の変位（内部に向ふ変位を正とす）

変　形　K_1, K_2, τ: x, y, z 軸方向の Bending.

ε_1, ε_2, ω: x, y, z 軸方向の Extension.

猶其の他に次の常数を用ふ。

ρ: 壁体単位体積當重量

c: 壁体物質の体膨脹係数

E: ヤング率

μ: 剪弾性係数

σ: ポアソン比

D: $\dfrac{2}{3}\dfrac{Eh^3}{1-\sigma^2}$

而る時は力と変形との關係は近似的に次式で與へらる。

$$\left.\begin{aligned}
T_1&=D\left[\frac{3}{h^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2)+\frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{K_1}{a}-\frac{2\sigma+\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{K_2}{a}\right]\\
T_2&=D\left[\frac{3}{h^2}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1)-\frac{\sigma+2\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{K_1}{a}-\frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)}\frac{K_2}{a}\right]\\
S_1&=\frac{1}{2}D(1-\sigma)\left[\frac{3}{h^2}\omega+\frac{\tau}{a}\right]\\
S_2&=\frac{1}{2}D(1-\sigma)\left[-\frac{3}{h^2}\omega+\frac{\tau}{a}\right]\\
G_1&=-D(K_1+\sigma K_2)\\
G_2&=-D(K_2+\sigma K_1)\\
H_1&=D(1-\sigma)\tau\\
H_2&=-D(1-\sigma)\tau\\
N_1&=-D\left[\frac{\partial}{\partial x}(K_1+\sigma K_2)+\frac{1-\sigma}{a}\frac{\partial\tau}{\partial\phi}\right]\\
N_2&=-D\left[(1-\sigma)\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}(K_2+\sigma K_1)\right]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上式に於て T_1, T_2, S_1, S_2 に及ぼす bending の影響は特別な部分（例へば境界の附近）を除いては僅少であるから第2項以下は無視するも差支へない。

変位と変形の關係は次の如く與へらる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_2&=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial\phi}-w\right)\\
\omega&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi} & \tau&=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\phi}+v\right)\\
K_1&=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & K_2&=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}+\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

3. 自重による応力

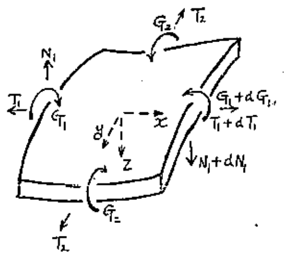
中空円壔に大なる軸圧力が加はれば挫屈することは知られてゐるが，かく大なる軸力の働くことは上記の構造物には豫想されない。一般には自重による応力は小なる故，それによる水平方向の変位を無視すれば，考へてゐる断面より上部にある全荷重を断面積にて除すれば垂直応力を得，其の他の応力は零となる。

4. 水圧による応力

對稱なる周邊外力（外向を正の方向とす）を受ける中空円筒の壁体の微部分（図-3）をとり力の平衡を考へれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} &a\frac{dN_1}{dx}+a\frac{d}{dx}\left(T_1\frac{dw}{dx}\right)+T_2=pa \\ &\frac{dT_1}{dx}-\frac{d}{dx}\left(N_1\frac{dw}{dx}\right)=0 \\ &N_1-\frac{dG_1}{dx}=0 \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

図-3.



簡單の爲に

$$T_1=0\quad\cdots\cdots(4)$$

と假定すれば

$$a\frac{dN_1}{dx}+T_2=pa\quad\cdots\cdots(5)$$

(3) と (5) より

$$a\frac{d^2G_1}{dx^2}+T_2=pa\quad\cdots\cdots(6)$$

然るに (4) の假定により

$$T_2=D\left[\frac{3}{h^2}(1-\sigma^2)\varepsilon_2-\frac{3\sigma(1-\sigma^2)}{2(1-\sigma)}\frac{K_1}{a}\right]$$

となる故本式と (1) を (6) に代入すれば次の基本方程式を得。

$$\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{3\sigma(1+\sigma)}{2a^2}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{3(1-\sigma^2)}{a^2h^2}w+\frac{p}{D}=0\quad\cdots\cdots(7)$$

K なる比重をもつ液体が筒内に滿水せる場合には

$$p=K(l-x)$$

壁厚が管徑に比して小なる場合には (7) の解は近似的に

$$w=e^{\frac{mx}{a}}\left(H_2\cos\frac{mx}{a}+K_2\sin\frac{mx}{a}\right)+e^{-\frac{mx}{a}}\left(H_1\cos\frac{mx}{a}+K_1\sin\frac{mx}{a}\right)-\frac{Ka^2}{2hE}(l-x)\quad\cdots\cdots(8)$$

但し　$m=\sqrt{\dfrac{a}{h}}\times\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}(1-\sigma^2)}\quad\cdots\cdots(9)$

となる。こゝに H_1, H_2, K_1, K_2 は境界條件によつて定まる積分常數である。特に下端附近のみを取扱ふ時は $e^{\frac{mx}{a}}$ の項を無視することが出來る。

$$w=e^{-\frac{mx}{a}}\left(H_1\cos\frac{mx}{a}+K_1\sin\frac{mx}{a}\right)-\frac{Ka^2}{2hE}(l-x)\quad\cdots\cdots(10)$$

鋼材のポアソン比は 0.30～0.33 であり，コンクリートのポアソン比は 0.12～0.20 である。m に對する σ の差の

影響はこの範圍では僅少であるからポアソン比の値を正確に推定し難き場合にも次式が成立する。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{鋼の場合} & m=0.91\sqrt{\dfrac{a}{h}} \\ \text{コンクリートの場合} & m=0.92\sqrt{\dfrac{a}{h}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(11)$$

筒体の上端が自由であり下端が基礎に埋込まれてゐる場合には境界條件は次の如くなる。

$$x=0 \text{ にて } \quad w=0 \quad \frac{dw}{dx}=0$$

$$x=l \text{ にて } \quad G_1=0 \quad N_1=0$$

之より
$$H_1=\frac{Ka^2l}{2hE} \qquad K_1=\frac{Ka^2l}{2hE}\left(1-\frac{a}{ml}\right)$$

$$\therefore \quad w=\frac{Ka^2l}{2hE}\left[e^{-\frac{mx}{a}}\left\{\cos\frac{mx}{a}+\left(1-\frac{a}{ml}\right)\sin\frac{mx}{a}\right\}-\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]\cdots\cdots(12)$$

よつて応力は

$$\left.\begin{array}{l}G_1=-\dfrac{Ka^2l}{2m^2}e^{-\frac{mx}{a}}\left\{\sin\dfrac{mx}{a}-\left(1-\dfrac{a}{ml}\right)\cos\dfrac{mx}{a}\right\} \\ N_1=-\dfrac{Kal}{2m}e^{-\frac{mx}{a}}\left\{\left(2-\dfrac{a}{ml}\right)\cos\dfrac{mx}{a}-\dfrac{a}{ml}\sin\dfrac{mx}{a}\right\} \\ T_2=Kal\left[\left(1-\dfrac{x}{l}\right)-\left\{1-\dfrac{3\sigma(1+\sigma)}{4m^2}\left(1-\dfrac{a}{ml}\right)\right\}e^{-\frac{mx}{a}}\cos\dfrac{mx}{a}\right. \\ \qquad\qquad \left.-\left\{1-\dfrac{a}{ml}+\dfrac{3\sigma(1+\sigma)}{4m^2}\right\}e^{-\frac{mx}{a}}\sin\dfrac{mx}{a}\right] \\ G^2=\sigma G_1\end{array}\right\}\cdots\cdots(13)$$

猶同一問題に對する岩崎富久博士の解法があるが後例に見るが如く殆ど一致せる結果を示してゐる。*

表-1.

$\theta°$	θ(ラヂアン)	$e^{-\theta}\cos\theta$	$e^{-\theta}\sin\theta$	$\theta°$	θ(ラヂアン)	$e^{-\theta}\cos\theta$	$e^{-\theta}\sin\theta$
0	0.0000	1.0000	0.0000	210	3.6652	−0.0222	−0.0128
15	0.2618	0.7434	0.1992	240	4.1888	−0.0076	−0 0131
30	0 5236	0.5130	0.2962	270	4.7124	0.0000	−0.0090
60	1.0472	0.1755	0.3039	300	5.2360	0.0027	−0.0046
90	1.5708	0.0000	0.2079	330	5.7596	0.0027	−0.0016
120	2.0944	−0.0616	0.1066	360	6.2832	0.0019	0.0000
150	2.6180	−0.0632	0.0365	390	6.8068	0.0010	0.0006
180	3.1416	−0.0432	0 0000				

〔例〕 $l=1800$ cm, $a=734.5$ cm, $h=22.5$ cm なる鉄筋コンクリート中空円筒の水圧による彎曲率及剪力を求む。但し $E=2.1\times10^6$ kg/cm², $\sigma=0.12$ とす。

(11) により $\quad m=0.92\sqrt{\dfrac{734\ 5}{22.5}}=5.257 \qquad \dfrac{m}{a}=\dfrac{5.257}{734.5}=7.157\times10^{-3}$

* 岩崎富久氏著 上水道 206 頁

彎曲率 表-1 を用ひて (13) より求む。

$$\frac{Ka^2l}{2m^2}=\frac{734.5^2\times 1\,800}{2\times 5.257^2}=1.757\times 10^7 \qquad \frac{a}{ml}=\frac{1}{7.157\times 1800\times 10^{-3}}=0.0776$$

$$1-\frac{a}{ml}=1-0.0776=0.9224$$

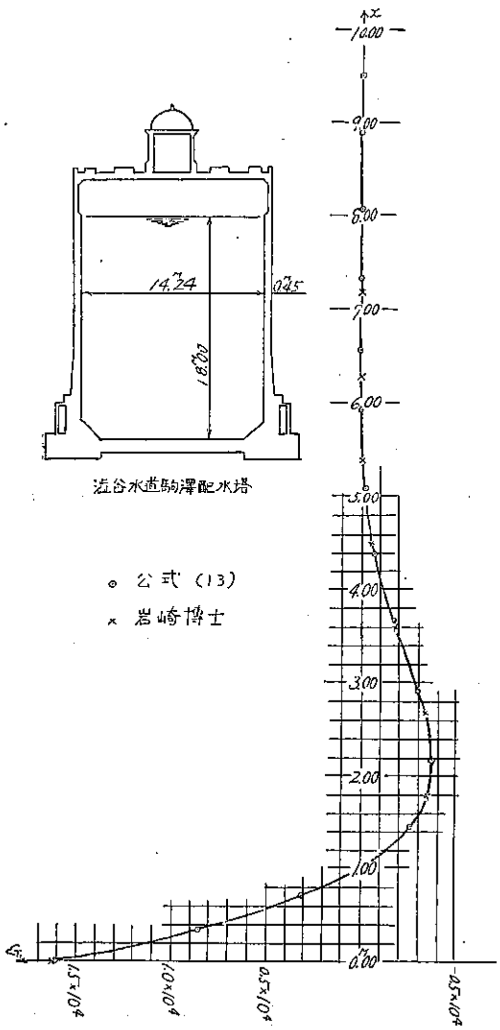
$$G_1=-1.757\,e^{-\frac{mx}{a}}\left(\sin\frac{mx}{a}-0.9224\cos\frac{mx}{a}\right)\times 10^7$$

$\theta=15°$ なる時 $G_1=-1.757\times 10^7(0.1992-0.9224\times 0.7434)=0.855\times 10^7$ g.cm/cm 幅

$$x=\frac{a\theta}{m}=\frac{0.2618}{7.157\times 10^{-3}}=37\,\text{cm}$$

以下同様にして 表-2 の結果を得。之と岩崎博士の計算の結果は殆ど一致する (図-4)。

図-4.



剪力 表-1 を用ひて (13) より求む。

$$\frac{Kal}{2m}=\frac{1\,800}{2\times 7.157\times 10^{-3}}=1.258\times 10^5$$

$$2-\frac{a}{ml}=2-0.0776=1.9224$$

$$N_1=1\,258\times 10^5 e^{-\frac{mx}{a}}\left(1.9224\cos\frac{mx}{a}-0.0776\sin\frac{mx}{a}\right)$$

$\theta=15°$ なる時 $N_1=-1.258\times 10^5(1.9224\times 0.7434$

$-0.0776\times 0.1992)=-1.778\times 10^5$ g/cm 幅

以下同様にして 表-2 の結果を得。

表-2.

x (cm)	G_1 (kg. cm)	N_1 (kg)	T_2 (kg)	岩崎氏による公式 x(cm)	岩崎氏による公式 G_1kg. cm
0	1.621×10^4	-2.418×10^2	0.004×10^3	0	$1.646\times 10_4$
37	0.855	−1.778	0.077	90	0.113
73	0.311	−1.212	0.238	180	−0.338
146	−0.250	−0.395	0.620	270	−0.324
219	−0.366	0.020	0.913	360	−0.169
293	−0.287	0.159	1.060	450	−0.052
366	−0.167	0.156	1.093	540	0.004
439	−0.069	0.105	1.056	630	0.016
512	−0.014		0.990		

張力 表-1 を用ひて (13) より求む。

$$Kal=734.5\times 1\,800=1.322\times 10^6$$

$$\frac{3\sigma(1+\sigma)}{4m^2}=\frac{3\times 0.12\times(1+0.12)}{4\times 5.257^2}=0.0036$$

$$1-\frac{3\sigma(1+\sigma)}{4m^2}+\left(1-\frac{a}{ml}\right)=1-0.0036\times 0.9224=0.9967$$

$$1-\frac{a}{ml}-\frac{3\sigma(1+\sigma)}{4m^2}=1-0.0776+0.0036=0.9260$$

$$T_2=1.322\left(1-\frac{x}{1\,800}-0.9967\,e^{-\frac{mx}{a}}\cos\frac{mx}{a}-0.9260\,e^{-\frac{mx}{a}}\sin\frac{mx}{a}\right)\times 10^6$$

$x=37$ cm なる時 $T_2=1.322\times 10^6\left(1-\dfrac{37}{1\,800}-0.9967\times 0.7434-0.9260\times 0.1992\right)=0.708\times 10^6$

以下同様にして表-**2** の結果を得。

5. 熱　応　力

構造物の建造時に比しての温度差及温度変化に換算されたるコンクリートの收縮及外界の氣溫と內部水溫の差に依つて筒体には応力が發生する。熱応力の基本式は Duhamel の假定によれば

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\nu\Delta+2\mu\, e_{xx}-\beta\theta=X_x'-\beta\theta\\
Y_y&=\nu\Delta+2\mu\, e_{yy}-\beta\theta=Y_y'-\beta\theta\\
Z_z&=\nu\Delta+2\mu\, e_{zz}-\beta\theta=Z_z'-\beta\theta\\
Y_z&=\mu\, e_{yz}\\
Z_x&=\mu\, e_{zx}\\
X_y&=\mu\, e_{xy}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

但し　$\Delta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz},\quad \beta=\left(\nu+\dfrac{2}{3}\mu\right),\quad c=\dfrac{Ec}{3(1-2\sigma)},\quad \nu=\dfrac{2\sigma\mu}{1-2\sigma}$

こゝに θ は溫度変化で示方書に依れば一般構造物には溫度変化 ±15°C 硬化收縮の影響を 15°C と規定され，c は体膨脹係數である。鋼及コンクリートの線膨脹係數は

鋼	$11.7\times 10^{-6}\sim 12.2\times 10^{-6}$
コンクリート	10.0×10^{6}

であり体膨脹係數はその 3 倍とみなされる。壁の內外面の溫度を夫々 θ_i, θ_e としその間の溫度勾配を一様とすれば

$$\theta=\theta_0\left(1+k\frac{z}{h}\right)\cdots\cdots(16)$$

但し　$\theta_0=\dfrac{1}{2}(\theta_i+\theta_e)\qquad K=\dfrac{\theta_i-\theta_e}{\theta_i+\theta_e}$

とおくことを得，面力を求むれば

$$\left.\begin{aligned}
T_1&=\int_{-h}^{h}X_x\left(1-\frac{z}{a}\right)dz=\int_{-h}^{h}X_x'\left(1-\frac{z}{a}\right)dz-\int_{-h}^{h}\beta\theta\left(1-\frac{z}{a}\right)dz\\
&=T_1'-\beta\theta_0 h\left(2-\frac{2Kh}{3a}\right)\fallingdotseq T_1'-2\beta\theta_0 h\\
S_1&=\int_{-h}^{h}X_y\left(1-\frac{z}{a}\right)dz=S_1'\\
N_1&=\int_{-h}^{h}X_z\left(1-\frac{z}{a}\right)dz=N_1'\\
H_1&=-\int_{-h}^{h}zX_y\left(1-\frac{z}{a}\right)dz=H_1'\\
G_1&=\int_{-h}^{h}zX_z\left(1-\frac{z}{a}\right)dz=G_1'-\frac{2}{3}\beta\theta_0 h^2\left(k-\frac{h}{2}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

$$
\left.\begin{aligned}
T_2&=\int_{-h}^{h} Y_y dz=T_2'-2\beta\theta_0 h\\
S_2&=-\int_{-h}^{h} X_y dz=S_2'\\
N_2&=\int_{-h}^{h} Y_z dz=N_2'\\
H_2&=\int_{-h}^{h} zX_y dz=H_2'\\
G_2&=\int_{-h}^{h} zY_y dz=G_2'-\frac{2}{3}\beta\theta_0 kh^2
\end{aligned}\right|
$$

筒体の平衡方程式は 4 と同様に

$$
a\frac{dN_1}{dx}+a\frac{d}{dx}\left(T_1\frac{dw}{dx}\right)+T_2=0 \qquad \frac{dT_1}{dx}-\frac{d}{dx}\left(N_1\frac{dw}{dx}\right)=0 \qquad N_1-\frac{dG_1}{dx}=0
$$

$T_1=0$ とおけば $a\dfrac{d^2G_1}{dx^2}+T_2=0$

$T_1=0$ なる條件より

$$
T_2=D\left[\frac{3}{h^2}(1-\sigma^2)\varepsilon_2-\frac{3\sigma(1+\sigma)}{2}\frac{K_1}{a}\right]-2h\,\beta\theta_0(1-\sigma)
$$

$$
G_1=-D\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{2}{3}\beta\theta_0 h^2\left(k-\frac{h}{a}\right)
$$

を代入すれば

$$
aD\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{3\sigma(1+\sigma)D}{2a}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{3D(1-\sigma^2)}{ah^2}w+2\beta\theta_0 h(1-\sigma)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(18)
$$

即ち壁面に等布荷重

$$
p=\frac{2(1-\sigma)\beta h\theta_0}{a}=\frac{2(1-\sigma)Eh}{3(1-2\sigma)a}c\theta_0
$$

が作用せる時の撓度に等しい。($\theta_0=45°\mathrm{C}$ $c=3\times10^{-5}$ として前記配水塔につき計算すれば $p=38.58\,\mathrm{t/m^2}$ 即ち水面下 38.58 m における水圧に等しい) 第 2 項を無視して解けば

$$
w=-\frac{a^2h^2p}{3D(1-\sigma^2)}+e^{\frac{mx}{a}}\left(H_2\cos\frac{mx}{a}+K_2\sin\frac{mx}{a}\right)+e^{-\frac{mx}{a}}\left(H_1\cos\frac{mx}{a}+K_1\sin\frac{mx}{a}\right)\cdots\cdots(19)
$$

こゝに m は (11) にて與へらる。特に下端附近では

$$
w=-\frac{a^2h^2p}{3D(1-\sigma^2)}+e^{-\frac{mx}{a}}\left(H_1\cos\frac{mx}{a}+K_1\sin\frac{mx}{a}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(20)
$$

下端が基礎に埋込まれたる時の境界條件は

$x=0$ にて $w=0$ $\dfrac{dw}{dx}=0$

$$
\therefore\quad w=\frac{a(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)}c\theta_0\left[\sqrt{2}\,e^{-\frac{mx}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{mx}{a}\right)-1\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(21)
$$

w は平均溫度變化 θ_0 にのみ關係する。(17) により應力を求むれば

$$
G_1=\frac{2}{9}\frac{Eh^2c\theta_0}{1-2\sigma}\left[\sqrt{\frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}}\,e^{-\frac{mx}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{mx}{a}\right)-\left(k-\frac{h}{a}\right)\right]
$$

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=\frac{2(1-\sigma)Dmc\,\theta_0}{3(1-2\sigma)}e^{-\frac{mx}{a}}\cos\frac{mx}{a}\\
T_2&=\frac{2\sqrt{2}\,Eh(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)}c\,\theta_0 e^{-\frac{mx}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{mx}{a}\right)\\
G_2&=\frac{2Eh^2c\,\theta_0}{9(1-2\sigma)}\left[\sigma\sqrt{\frac{6(1+\sigma)}{1+\sigma}}e^{-\frac{mx}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{mx}{a}\right)-k\right]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(22)$$

6. 強　制　振　動

筒体の下端が水平震動をなす場合の强制振動を求むる。地震動は單位振幅を有する正弦波とみなし，筒体も亦この强制震動と同じ週期で振動するものと考へる。筒体の震動は2種に分けて考へられる。第1に壔体全体としての大きな震動と，全体としては動かず，激しい変形を繰返すものとである。前者は釣鐘の動揺にも比すべく後者は橦木で突かれた鐘の振動の如き場合である。地震動について考へるに筒体が左右に振動を强制された場合に上部に假想せる微円管に働く水平力は管を左右に移動せしむるが如き分布をなすであらう。從つてこの円管は左右に変位するも変形は少いと想像される。この理由から断面形は変位によつて変形せず常に円形が保持されるものと假定する。

彈性論によれば変位 u, v, w は

$$\left.\begin{aligned}
u&=U\sin n\phi\cos(pt+\varepsilon)\\
v&=V\cos n\phi\cos(pt+\varepsilon)\\
w&=W\sin n\phi\cos(pt+\varepsilon)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

とおくことが出來る。こゝに U, V, W は x のみの函數，n は整數，$2\pi/p$ は振動週期を示す。實際の地震では週期は 0.2～5 秒で硬地盤では週期が短い。5 秒程度のものは遠地地震によつて誘起されるもので大なる震害を與へるものは短週期の卓越振動である。こゝでは $n=1,\ \ \varepsilon=0$ とす。

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}
u&=U\sin\phi\cos pt\\
v&=V\cos\phi\cos pt\\
w&=W\sin\phi\cos pt
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

假定により　$W+V=0\cdots\cdots(25)$

なる故 extension 及 bending は (2) により次式となる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{dU}{dx}\sin\phi\cos pt & \varepsilon_2&=0\\
\omega&=\left\{\frac{U}{a}-\frac{dW}{dx}\right\}\cos\phi\cos pt & \tau&=0\\
K_1&=\frac{d^2W}{dx^2}\sin\phi\cos pt & K_2&=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(26)$$

從つて応力は (1) により

$$\begin{aligned}
G_1&=-D\frac{d^2W}{dx^2}\sin\phi\cos pt\\
G_2&=-\sigma D\frac{d^2W}{dx^2}\sin\phi\cos pt\\
H_1&=0\qquad H_2=0
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=-D\frac{d^3W}{dx^3}\sin\phi\cos pt\\
N_2&=-\frac{\sigma D}{a}\frac{d^2W}{dx^2}\cos\phi\cos pt\\
T_1&=D\left[\frac{3}{h^2}\frac{dU}{dx}+\frac{2-2\sigma-2\sigma^2}{2(1-\sigma)a}\frac{d^2W}{dx^2}\right]\sin\phi\cos pt\\
T_2&=D\left[\frac{3\sigma}{h^2}\frac{dU}{dx}-\frac{\sigma(1+2\sigma)}{2(1-\sigma)}\frac{d^2W}{dx^2}\right]\sin\phi\cos pt\\
S_1&=\frac{3D(1-\sigma)}{2h^2}\left[\frac{U}{a}-\frac{dW}{dx}\right]\cos\phi\cos pt\\
S_2&=-\frac{3D(1-\sigma)}{2h^2}\left[\frac{U}{a}-\frac{dW}{dx}\right]\cos\phi\cos pt
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(27)$$

運動方程式は次式にて與へらる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial S_2}{\partial\phi}+\frac{2\rho}{g}hp^2u=0\\
&\frac{\partial S_1}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial T_2}{\partial\phi}-\frac{N_2}{a}+\frac{2\rho}{g}hp^2v=0\\
&\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial N_2}{\partial\phi}+\frac{T_2}{a}+\frac{2\rho}{g}hp^2w=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

(28-2), (28-3) に (1) を代入すれば

$$\frac{3D}{h^3}\frac{1+\sigma}{2a}\frac{dU}{dx}-\frac{2\rho}{g}p^2W-\left\{\frac{3D(1-\sigma)}{2h^3}-\frac{(\sigma-4\sigma^2)D}{2(1-\sigma)ha^2}\right\}\frac{d^2W}{dx^2}=0\cdots\cdots(29)$$

$$\frac{3D}{h^3}\frac{\sigma}{a}\frac{dU}{dx}+\frac{2\rho}{g}p^2W-\frac{D}{h}\left\{\frac{d^4W}{dx^4}-\frac{\sigma-4\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2}\right\}=0\cdots\cdots(30)$$

兩式より $\dfrac{dU}{dx}$ を消去して

$$\frac{D}{h}(1+\sigma)\frac{d^4W}{dx^4}-\frac{3\sigma(1-\sigma)D}{h^3}\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{2\rho}{g}p^2(1+3\sigma)W=0^*\cdots\cdots(31)$$

之を解く爲に $W=e^{mx}$ とおきて代入すれば

$$(1+\sigma)h^2m^4-3\sigma(1-\sigma)m^2-\frac{2\rho p^2h^3}{gD}(1+3\sigma)=0$$

$$\therefore\ m^2=\frac{3\sigma(1-\sigma)}{2(1+\sigma)h^2}\left\{1\pm\sqrt{1+\frac{4\rho p^2h^2(1+\sigma)^2(1+3\sigma)}{3Eg\sigma^2(1-\sigma)}}\right\}\cdots\cdots(32)$$

平方根號中の第 2 項の order を推定する爲に $p=2\pi/0.3=20.94$, $\sigma=0.12$, $h=22.5$ cm, $E=2.1\times10^6$ kg/cm², $g=980$ cm/sec², $\rho=2.4$ g/cm² として計算すれば 4.647×10^{-4} となり，之によりこの項の order が 1 に比して甚だ小なることを知る。よつて m² を近似的に次の如くおくことが出來る。

$$m^2=\begin{cases}\dfrac{3\sigma(1-\sigma)}{(1+\sigma)h^2}=\alpha^2\\[2ex]-\dfrac{(1+\sigma)(1+3\sigma)}{\sigma}\dfrac{\rho p^2}{Eg}=-\beta^2\end{cases}$$

* 微少量 $\dfrac{\sigma(1-4\sigma)D}{2ha^2}\dfrac{d^2W}{dx^2}$ は無視す。

但し $\alpha=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{3\sigma(1-\sigma)}{1+\sigma}}$ ……(33)

$$\beta=p\sqrt{\frac{(1+\sigma)(1+3\sigma)}{\sigma}\frac{\rho}{Eg}} \quad \cdots\cdots(34)$$

$$\therefore \quad W=A_1e^{\alpha x}+A_2e^{-\alpha x}+B_1\sin\beta x+B_2\cos\beta x \quad \cdots\cdots(35)$$

こゝに A_1, A_2, B_1, B_2 は積分常數である。筒体の上端が自由であり下端が基礎に埋込まれ單位振幅を以て振動する時の境界條件は次の如くなる。

$x=0$ にて $W=1$ $\quad \frac{dW}{dx}=0$

$x=l$ にて $T_1=0$ $\quad G_1=0$ $\quad N_1-\frac{1}{a}\frac{\partial H_1}{\partial\phi}=0$ $\quad S_1+\frac{H_1}{a}=0$

故に $x=l$ にて $\frac{d^2W}{dx^2}=0$ 及 $\frac{d^3W}{dx^3}=0$ が成立すれば主要境界條件 $G_1=0$ 及 $N_1=0$ を滿足することが出來る。上端附近にては $e^{-\alpha x}$ の項を下端附近にては $e^{\alpha x}$ の項を無視すれば境界條件は次式となる。

$$A_2+B_2=1$$
$$-\alpha A_2+\beta B_1=0$$
$$\alpha^2e^{\alpha l}A_1-\beta^2B_1\sin\beta l-\beta^2B_2\cos\beta l=0$$
$$\alpha^3e^{\alpha l}A_1-\beta^3B_1\cos\beta l+\beta^3B_2\sin\beta l=0$$

之より積分常數を決定す。

$$A_1=\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad A_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad B_1=\frac{\Delta_3}{\Delta} \quad B_2=\frac{\Delta_4}{\Delta} \quad \cdots\cdots(36)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=-(1-\lambda^2)\sin\beta l+2\lambda\cos\beta l\\ \Delta_1&=\lambda^3e^{-\alpha l}\\ \Delta_2&=\lambda(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)\\ \Delta_3&=\cos\beta l+\lambda\sin\beta l\\ \Delta_4&=\lambda\cos\beta l-\sin\beta l\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(37)$$

こゝに $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$

$$\therefore \quad W=\frac{-1}{\Delta}[\sin\beta(l-x)-\lambda\cos\beta(l-x)-\lambda(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\lambda^3e^{-\alpha(l-x)}] \quad \cdots\cdots(38)$$

指數函數の項は兩端附近に於てのみ意義を生じ中間部の撓度は三角函數のみによつて表はされる。從つて之は棒体の剪断振動に類似の振動にして，自由振動週期は高さのみによる。

U を求むる爲に (38) を (29) に代入して

$$\frac{3D(1+\sigma)}{2ah^3}\frac{dU}{dx}=\frac{2\rho p^2}{g\Delta}[\sin\beta(l-x)-\lambda\cos\beta(l-x)-\lambda(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\lambda^3e^{-\alpha(l-x)}]$$
$$+\frac{3D(1-\sigma)}{2\Delta h^3}[-\beta^2\sin\beta(l-x)+\lambda\beta^2\cos\beta(l-x)-\alpha^2\lambda(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\alpha^2\lambda^3e^{-\alpha(l-x)}]$$

$x=0$ にて $U=0$ なる境の條件のもとに積分すれば

$$U=\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{\beta a}{\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\frac{1+\sigma}{1+3\sigma}\{\cos\beta(l-x)+\lambda\sin\beta(l-x)\}$$
$$-\frac{2\sigma}{1+3\sigma}(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)] \quad \cdots\cdots(39)$$

(38) 及 (39) より (2) により歪を計算すれば次式を得。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=-\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)}\frac{\alpha\beta a}{\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}+\frac{1+\sigma}{1+3\sigma}\lambda\{\sin\beta(l-x)-\lambda\cos\beta(l-x)\}]\sin\phi\\
\varepsilon_2&=0\\
\omega&=\frac{2\beta}{(+\sigma)\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\frac{(1+\sigma)^2}{1+3\sigma}\{\cos\beta(l-x)+\lambda\sin\beta(l-x)\}\\
&\qquad-\frac{\sigma(1-\sigma)}{1+3a}(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)]\cos\phi\\
K_1&=\frac{\alpha\beta}{\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}+\lambda\{\sin\beta(l-x)-\lambda\cos\beta(l-x)\}]\sin\phi\\
K_2&=0\\
\tau&=0
\end{aligned}\right\}\cdots(40)$$

故に応力は

$$\left.\begin{aligned}
T_1&=\frac{3D}{h^2}\varepsilon_1\\
T_2&=\frac{3\sigma D}{h^2}\varepsilon_1\\
S_1&=\frac{3}{2}D(1-\sigma)\frac{\omega}{h^2}\\
S_2&=-\frac{3}{2}D(1-\sigma)\frac{\omega}{h^2}\\
G_1&=-DK_1\\
G_2&=-\sigma DK_1\\
H_1&=H_2=0\\
N_1&=\frac{D\alpha^2\beta}{\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}-\lambda^2e^{-\alpha(l-x)}+\lambda^2\{\cos\beta(l-x)+\lambda\sin\beta(l-x)\}]\sin\phi\\
N_2&=\frac{\sigma D\alpha\beta}{-a\Delta}[(\cos\beta l+\lambda\sin\beta l)e^{-\alpha x}+\lambda\{\sin\beta(l-x)-\lambda\cos\beta(l-x)\}]\cos\phi
\end{aligned}\right\}\cdots(41)$$

となる。$\Delta=0$ 即ち

$$\tan\beta l=\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\quad\cdots\cdots(42)$$

なる時は振動は共鳴する。この式より β を得て (34) より自由振動週期を決定することを得。βl の近似値は次式にて得らる。

$$\beta_0 l\doteqdot K\pi\left\{1+\frac{2}{\alpha l-2}\right\}\qquad K=1,\ 2,\ 3$$

故に自由振動数 n_0 は

$$n_0=\frac{1}{2l}\left\{1+\frac{2}{\alpha l-2}\right\}\sqrt{\frac{\mu g}{\rho}}\sqrt{\frac{2\sigma}{1+3\sigma}}\quad\cdots\cdots(43)$$

個有週期は塔の高さのみにより壁厚の影響は極めて僅少である。比重 ρ/g, 剪彈性係數 μ, 高さ l の棒体の剪断振動の振動週期は $\frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\mu g}{\rho}}$ であつて上記の値と殆ど一致してゐる。$\mathfrak{p}$ の値の決定は根本的で，而かも最も困難な問題であつて，現在之を適當に定める理論はない様である。地震等によればその週期は 0.2～5 秒程度であるが，其の內其の土地で大なる震害を與へる振動は凡そ一定の週期を持つて居り，例へば東京山手地方では 0.3 秒,

丸ノ内，神田で 0.6 秒及 0.2 秒，深川で 0.2 秒及 0.8 秒，赤羽や横濱高島町で 0.2～1 秒（卓越週期を認めず）であつて最大加速度を與へる週期も亦之等の固有週期と思はるゝものに現はれることが認められてゐる。

而して從來構造物に假定せる震力は古來の地震記錄，地質，地層の状況から判斷して決定すべきも，最大 400gal（齊田学士の說では支那大陸の地震も吾國と同程度と推定さる）であるから，この最大加速度を與へるものも又上記振動數を有するものと想像される。もし振動週期を 0.2～1.0 秒の範圍にとるならば振幅は 0.41～10.13 cm となる。地震による應力は必ずしも加速度に正比例するものではない故最大加速度を與へる振動についてのみ計算するのは妥當ではないが他により適當な方法が見出されぬ今日では止むを得ないと考へる（因みに震力は振幅に比例し週期の自乘に反比例し比例恒數は $4\pi^2$ である)。

〔例〕 前掲配水塔に於て振幅 1.0 cm，振動週期 0.3 秒（震力 438 gal）なる地震力による應力を求む。

$$p=\frac{2\pi}{0.3}=20.94 \qquad \sigma=0.12 \qquad E=2.1\times10^5\ \mathrm{kg/cm^2} \qquad g=980 \qquad \gamma=2.4$$

$$D=\frac{2\times2.1\times10^5\times22.5^3}{3(1-0.12^2)}=1.618\times10^{12} \qquad \alpha=\sqrt{\frac{3\times0.12\times(1-0.12)}{1+0.12}}\times\frac{1}{22.5}=2.364\times10^{-2}$$

$$\alpha l=2.364\times10^{-2}\times1\,800=42.55 \qquad \beta=\sqrt{\frac{(1+0.12)(1+0.36)}{0.12}}\times\sqrt{\frac{2.4}{2.1\times10^5\times980}}\times20.94=2.548\times10^{-4}$$

$$\beta l=2.548\times10^{-4}\times1\,800=0.4586(26^\circ\,16'\,40'')$$

$$\lambda=\frac{2.548\times10^{-4}}{2.364\times10^{-2}}=1.078\times10^{-2} \qquad \cos\beta l=0.8966 \qquad \sin\beta l=0.4427$$

$$\cos\beta l+\lambda\sin\beta l=0.8966+0.4427\times1.078\times10^{-2}=0.9014$$

$$\Delta=2\times1.078\times10^{-2}\times0.8966-(1-1.162\times10^{-4})\times0.4427=-0.4234$$

以上により決定せられたる常數を用ひて (41) 式により應力を求むることを得。

表-3. 1 cm 幅に對する應力

x(cm)	T_1(kg)	T_2(kg)	S_1(kg)	G_1(kg. cm)	G_2(kg. cm)	N_1(kg)	N_2(kg)
0	0.712×10^5	0.085×10^5	0.000×10^4	0.209×10^5	0.251×10^4	-0.490×10^3	0.341×10
37	0.299	0.036	0.240	0.087	0.104	−0.205	0.143
73	0.129	0.016	0.339	0.037	0.044	−0.087	0.062
146	0.026	0.003	0.402	0.008	0.010	−0.016	0.012
219	0.007	0.001	0.416	0.002	0.002	−0.003	0.003
293	0.003	0.000	0.421	0.002	0.002	−0.001	0.002

之を図示すれば 図-5 の如し。

(43) 式により自由振動週期を求むれば $T=0.021$ 秒となる。

表-3 に示す如く地震應力は水圧による應力と殆ど同じ程度の大さであるから之を無視することは出來ない。しかしその影響する所は下端附近のみであり上方に及ぶに從ひ急激に減少する。唯斜張力のみは全面に渉つて略一様に生じ，その大さは水圧による水平張力の最大値と同じ order のものである。下端における大なる應力は $e^{-\alpha x}$ の項の爲であるからこの項が消える時即ち近似的には $\cos\beta l=0$ なる塔高に對しては下端應力は小なる筈である。試みに上記の數値を以て l を求むればその高さ 60 m を超え，構造物としては實在し難い。從つて高さを變化せしめてこの局部的應力を輕減することは難いが，後述の如く屋根の重量を增すことによつて幾分應力を輕減す

ることが出來る。

7. 屋根の影響

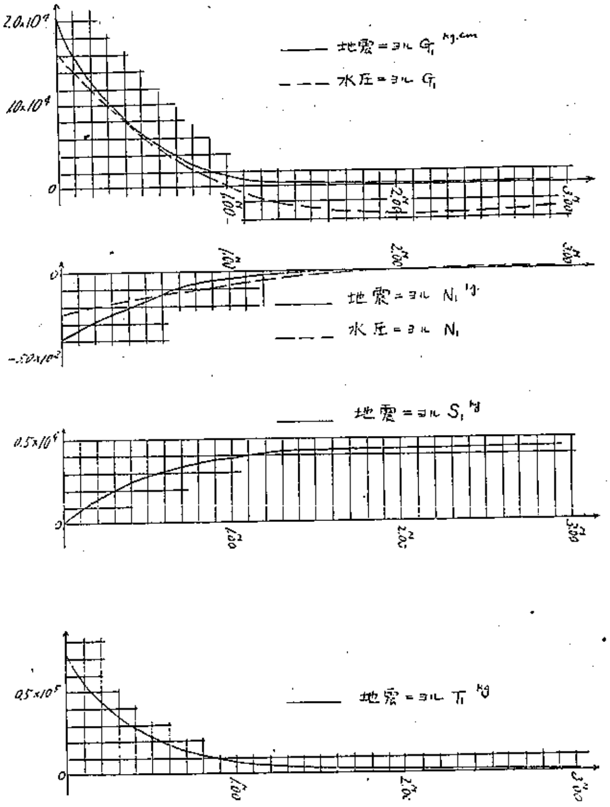
上部に重い錘がのつてゐる場合を取扱ふ。實際の屋根では相互に彈性的に結ばれてゐるが，計算を容易にする爲に重錘は何の關聯もなく一樣に載荷されてゐるものとみなして計算を進める。今 $\phi=\pi/2$ なる附近の斷片を考へると境界條件は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \text{ にて} & W=1 \quad \dfrac{dW}{dx}=0 \\ x=l \text{ にて} & \dfrac{d^2W}{dx^2}=0 \quad \dfrac{d^3W}{dx^3}+\dfrac{p^2Q}{gD}W=0 \end{array}\right\} \cdots(44)$$

こゝに Q は錘の壁体單位長さ當りの全重量である。之により基本方程式を解けば

$$\left.\begin{array}{l} \Delta'=\Delta+\gamma\Delta'' \\ \Delta_1'=\Delta_1+\gamma\Delta_1'' \\ \Delta_2'=\Delta_2+\gamma\Delta_2'' \\ \Delta_3'=\Delta_3+\gamma\Delta_3'' \\ \Delta_4'=\Delta_4+\gamma\Delta_4'' \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

こゝに第 1 項は (37) にて與へられ第 2 項は屋根の影響で次式にて與へらる。



$$\left.\begin{array}{l} \Delta''=\lambda(1-\lambda)\sin\beta l-(1-\lambda^2)\cos\beta l \\ \Delta_1''=\lambda^2 e^{-\alpha l}(\sin^2\beta l-\cos^2\beta l) \\ \Delta_2''=\lambda(\sin\beta l+\lambda^2\cos\beta l) \\ \Delta_3''=\sin\beta l+\lambda^2\cos\beta l \\ \Delta_4''=-(\cos\beta l+\lambda^2\sin\beta l) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

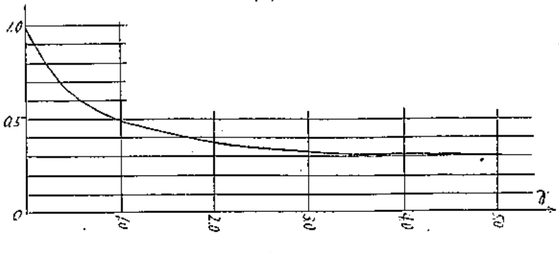
$$\text{但し}\quad \gamma=\frac{Qp^2}{gD\alpha\beta^2}=\frac{\sqrt{3\sigma(1-\sigma^2)}}{2(1+3\sigma)}\frac{Q}{\rho h^2}\cdots\cdots\cdots(47)$$

重錘の影響を見る爲に下端における G_1 の値を比較すれば

$$G_1=-D\alpha^2\frac{(\Delta_2-\lambda^2\Delta_4)+\gamma(\Delta_2''-\lambda^2\Delta_4'')}{\Delta+\gamma\Delta''}$$

前記配水塔について數値を代入し γ の影響を調ぶれば 圖-6 の如くなり屋根の増加は G_1 を減少せしめる。しかしある程度以上は之を增加せしむるもその影響は極めて僅少となる。之と同じ性質が N_1 についても見られる。斜張力については屋根の影響は少い。

圖-6.



8. 結　　語

以上で円筒体の水平振動の簡單な場合について計算せるも實在構造物にあたつては壁厚の變化，屋根の影響，振動の減衰等幾多の問題が殘されてゐる。しかし以上の計算によつて下端に於ける局部的なる地震応力の値を凡そ推定することは出來ると思ふ。之によれば配水塔の如き構造物の振動は剪斷振動に類似し，且下端附近に水圧による応力に匹敵すべき地震彎曲応力を生ずる外壁体全面に亘つて凡そ一様なる斜張力が作用する。而して緩なる地震動によつては塔体が共振する様なことはないが，寧ろ硬地盤に建てられたる高さの比較的高い塔が共振する危險のあることを推定することが出來る。