

弾性係数一様ならざる棒の振り

(昭和13年7月16日 土木学会第2回年次学術講演會に於て)

會員 最上 武 雄*

要旨 本文は、断面内で弾性係数が一様でない様な場合に、振りの問題にどんな影響があるかと言ふ事を断面の形が円形、楕円、形矩形の場合に就て調べやうとしたものである。

1. 木材や鑄物の棒の様な場合又棒の断面内の温度が一様でない様な場合は、断面中での弾性係数の分布は一様ではないのであるから、この棒を振る場合には、弾性係数が一様である棒を振つた場合と異つた応力分布を呈し振り剛さも異つて来る筈である。これがどの程度に効いて来るかと言ふ事を調べやうとするものである。

2. 棒の軸に沿つて z 軸を、それに直角にお互ひに直交する 2 軸 x, y を採り、 x, y, z 軸の方向の変形を u, v, w とし

$$u = -\tau y z, v = \tau x z, w = \tau \phi \dots\dots\dots (1)$$

と假定し、 ϕ を x, y のみの函数とすれば、0 でない歪度成分は e_{xz}, e_{yz} のみとなり、他はすべて 0 となる。

$$e_{xz} = \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right); e_{yz} = \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \dots\dots\dots (2)$$

となり、0 でない応力成分は、 μ を振り弾性係数とすれば

$$\widehat{xz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + y \right); \widehat{yz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \dots\dots\dots (3)$$

となるから平衡の式は、自重を考へなければ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{又は} \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) + \mu \nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

これが問題に對する基本式で、 ϕ の境界條件としては境界に直角な応力が 0 と云ふことから、 v を断面周囲の法線とすれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu) \dots\dots\dots (6)$$

3. (5), (6) 兩式を満足する ϕ は振りの問題の解であることを説明する事が必要である。これには

$\iint \widehat{xz} dx dy = \iint \widehat{yz} dx dy = 0$ である事を證明すれば Saint Venant の原理に依つて解であることが分るのである。但し上の積分は断面全体に亙つて行ふものとする。

$$I = \iint \tau \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \right\} \right] dx dy$$

とおくと (3), (5) 兩式に依り

$$\begin{aligned} I &= \iint \tau \left[x \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) + x \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) + \mu x \nabla^2 \phi + \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy \\ &= \iint \tau \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) dx dy = \iint \widehat{xz} dx dy \end{aligned}$$

* 東京帝國大学助教授

處が又

$$I = \oint \tau \mu x \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \cos(x, \nu) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \cos(y, \nu) \right] ds = 0$$

$$\therefore \iint \widehat{xz} dx dy = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$\iint yz dx dy$ の方も同様に證明される。

4. 振りモーメント M は (3) 式より

$$M = \iint (y\widehat{xz} + x\widehat{yz}) dx dy = \tau \iint \mu \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy$$

5. 円形断面

ϕ = 定数なる函数は次の條件

$$x \frac{\partial \mu}{\partial y} - y \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

が満足される限り基本式と境界條件を満足する。(8) 式は極坐標で書けば

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

であるから弾性係数が半径のみの函数なる時に限り、円形断面では Coulomb の假定が成り立つのである。

6. 矩形断面 (図-1)

矩形の 2 邊に平行に夫々 x, y を取り邊長を夫々 $2a, 2b$ とする。この場合には簡単のため弾性係数は y のみの函数とし

$$\mu = \mu_0 \exp \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda} y^{2\lambda} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で表されるとすると、(5) 式は

$$\frac{d\mu}{dy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) + \mu r^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。

$$\phi = -xy + u \dots\dots\dots (12)$$

とすると

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} + r^2 u = 0 \dots\dots\dots (13)$$

境界條件は

$$x = \pm a \text{ で } \frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad y = \pm b \text{ で } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

となる。今 u が

$$u = \sum_s A_s X_s(x) Z_s(y) \dots\dots\dots (15)$$

と表されるとすれば X_s, Z_s の満足すべき式は夫々

$$\frac{d^2 X_s}{dx^2} - \frac{\nu s^2}{b^2} X_s = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{d^2 Z_s}{dy^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} \frac{dZ_s}{dy} + \frac{\nu s^2}{b^2} Z_s = 0 \quad \text{又は} \quad \frac{d}{dy} \left\{ \mu \frac{dZ_s}{dy} \right\} = -\frac{\nu s^2}{b^2} \mu Z_s \dots\dots\dots (17)$$

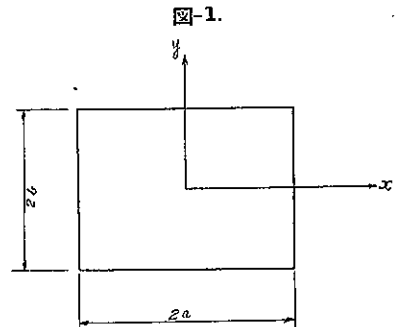


図-1.

茲に ν_s は $\left(\frac{dZ_s}{dy}\right)_{y=\pm b} = 0$ (18)

の s 番目の根であるとする。(17) 式の第 2 の形に Z_r をかけ $-b$ から b まで積分すれば

$$\int_{-b}^b Z_r \frac{d}{dy} \left\{ \mu \frac{dZ_s}{dy} \right\} dy = \mu Z_r \frac{dZ_s}{dy} \Big|_{-b}^b - \int_{-b}^b \mu \frac{dZ_s}{dy} \frac{dZ_r}{dy} dy$$

$$= - \int_{-b}^b \mu \frac{dZ_s}{dy} \frac{dZ_r}{dy} dy = - \frac{\nu_s^2}{b^2} \int_{-b}^b \mu Z_r Z_s dy$$

同様にして $-\int_{-b}^b \mu \frac{dZ_r}{dy} \frac{dZ_s}{dy} dy = -\frac{\nu_r^2}{b^2} \int_{-b}^b \mu Z_r Z_s dy$

$$\therefore \frac{\nu_s^2 - \nu_r^2}{b^2} \int_{-b}^b \mu Z_r Z_s dy = 0$$

$$\therefore \nu \neq s \text{ の時は } \int_{-b}^b \mu Z_r Z_s dy = 0 \dots\dots\dots(19)$$

\therefore 任意の函数 $f(y)$ を

$$f(y) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s Z_s(y) \dots\dots\dots(20)$$

の形に展開したとすれば

$$C_s = \frac{\int_{-b}^b \mu f(y) dy}{\int_{-b}^b \mu Z_r Z_s dy} \dots\dots\dots(21)$$

(10) 式を (17) 式に入れ $Z_s = Z$, $(\nu_s/b)^2 = m^2 \dots\dots(22)$ と書き $Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} y^{\nu} \dots\dots(24)$ 式の形として代入すれば, y の凡ての値に對して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \{ B_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) + m^2 B_{\nu} \} y^{\nu} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2A_{\lambda+1} B_{\lambda+1} (\lambda+1)(\nu+1) y^{2\lambda+2\nu+1} = 0$$

又は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ B_{n+2}(n+1)(n+2) + m^2 B_n \} y_n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2A_{\lambda+1} B_{n-2\lambda} (\lambda+1)(n-2\lambda) y^n = 0$$

が成立しなければならぬから

$n = 0, 1, 2, \dots\dots$ に對して

$$B_{n+2}(n+1)(n+2) + m^2 \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2A_{\lambda+1} B_{n-2\lambda} (\lambda+1)(n-2\lambda) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

これから B_{ν} がきまり (24) 式により y について奇函数と偶函数が出て来るが奇函数の方が今の問題には適するから之をとれば

$$Z_s(y) = B_1 \left[y - \frac{\nu_s^2 + 2A_1 b^2}{2 \cdot 3} \frac{y^3}{b^2} + \left\{ \frac{(\nu_s^2 + 2A_1 b^2)(\nu_s^2 + 6b^2 A_1)}{5! b^4} - \frac{2A_2}{4 \cdot 5} \right\} y^5 - \dots \right] \dots\dots\dots(26)$$

すると ν_s は

$$1 - \frac{\nu_s^2 + 2A_1 b^2}{2 \cdot 3} + \left\{ \frac{(\nu_s^2 + 2A_1 b^2)(\nu_s^2 + 6A_1 b^2)}{4!} - \frac{2A_2 b^4}{4} \right\} - \dots\dots\dots = 0 \dots\dots\dots(27)$$

の s 番目の根である。境界條件に合ふやうに X_s は $\sinh(\nu_s a/b)$ をとれば (21), (14), (15) 式に依り

$$A_s = \frac{2 \int_{-b}^b \mu y Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) dy}{\frac{v_s}{b} \cosh \frac{v_s}{b} a \int_{-b}^b \mu Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) dy} \dots\dots\dots (28)$$

であるから、求むる ϕ は

$$\phi = -xy + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2 \sinh \frac{v_s}{b} x Z\left(\frac{v_s}{b}, y\right)}{\frac{v_s}{b} \cosh \frac{v_s}{b} a} \frac{\int_{-b}^b \mu y Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) dy}{\int_{-b}^b \mu Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) Z_s\left(\frac{v_s}{b}, y\right) dy} \dots\dots\dots (29)$$

7. 弾性係数一様な場合には (29) 式は普通の教科書に出てゐる式に一致する事が容易に證明される。詳しい計算は紙数の關係で割愛する。

8. 楕円断面

楕円坐標

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta) \dots\dots\dots (30)$$

$$x = c \cosh \xi \cos \eta \dots\dots\dots (31)$$

又は $y = c \sinh \xi \sin \eta$

を用ひる (図 2 参照)。弾性係数は ξ のみの函数で

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda} \xi^{\lambda}\right) \dots\dots\dots (32)$$

と表されるとする。

(31) 式を用ひ途中の計算は省略するが、境界條件を書き直せば

$$\xi = \xi_0 \text{ で } \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -c^2 \sin \eta \cos \eta \dots\dots\dots (33)$$

となり基本式は

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \log \mu}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + c^2 \frac{\partial \log \mu}{\partial \xi} (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) \sin \eta \cos \eta + c^2 \frac{\partial \log \mu}{\partial \eta} \cosh \xi \sinh \xi \cos \eta = 0 \dots\dots\dots (34)$$

となり、 μ が ξ のみの函数なら

$$\frac{d \log \mu}{d \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + c^2 \frac{d \log \mu}{d \xi} (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) \sin \eta \cos \eta = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$$\phi = \phi_1(\xi) \sin 2\eta \dots\dots\dots (36)$$

とおけば

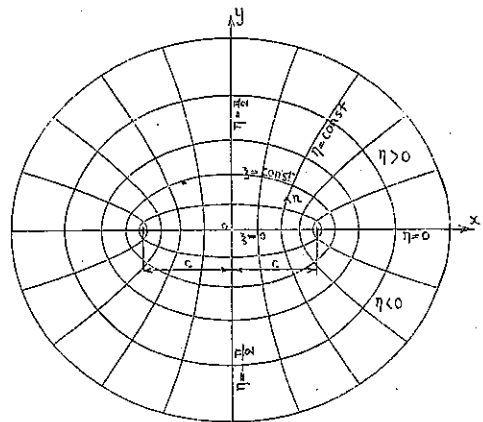
$$\frac{d \log \mu}{d \xi} \frac{d \phi_1}{d \xi} + \frac{d^2 \phi_1}{d \xi^2} - 4\phi_1 + \frac{d \log \mu}{d \xi} \frac{c^2}{2} (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) = 0 \dots\dots\dots (37)$$

又 $\phi_1 = -\frac{1}{2} c^2 \sinh \xi \cosh \xi + u \dots\dots\dots (38)$

とおけば

$$\frac{d^2 u}{d \xi^2} + \frac{d \log \mu}{d \xi} \frac{d u}{d \xi} - 4u = 0 \dots\dots\dots (39)$$

図-2.



これは(17)式で $(vs/b)^2 = -4$ とおいたものであるから同様に解けるのである。ξ について偶函数の方は、断面の warping に不連続を興へるから困るので、奇函数の方をとり、これを Au とすれば(39)式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_{\xi_0} &= -\frac{1}{2} \left\{ c_2 \cosh^2 \xi_0 - 2A \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} \right\} \sin 2\gamma \\ &= -\frac{1}{2} c^2 \sin 2\gamma \\ \therefore A &= \frac{c^2 (\cosh^2 \xi_0 - 1)}{2 \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

9. この場合にも弾性係数が一様ならば、普通の解になることは容易に證明されるが、同様の理由に依り省略する。

10. 数値例

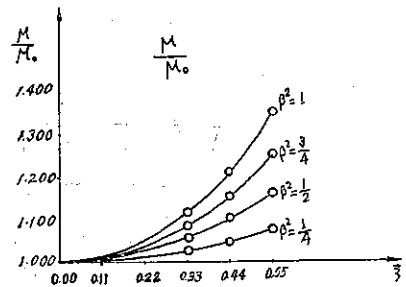
楕円形断面の場合について数値計算を行つて見やう。弾性係数の分布は

$$\mu = \mu_0 e^{\beta^2 \xi^2}$$

とすれば(この分布の仕方は図-3 参照) 簡単な計算の結果

$$\begin{aligned} \frac{M}{\tau \mu_0} &= \iint (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) e^{\beta^2 \xi^2} dx dy \\ &= \frac{\pi c^4}{4} \left[2 \int_0^{\xi_0} (\cosh^2 2\xi - \cosh^2 \xi) e^{\beta^2 \xi^2} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh 2\xi_0 - 1}{\left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}} \int_0^{\xi_0} \frac{du}{d\xi} e^{\beta^2 \xi^2} d\xi \right] \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

図-3.



$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}z}{\mu_0 \tau} &= e^{\beta^2 \xi_0^2} \left[-2c \sinh \xi \sin \gamma + \frac{b^2}{c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \gamma)} \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{du}{d\xi} \sinh \xi \cos \gamma \sin 2\gamma - 2u \cosh \xi \sin \gamma \cos 2\gamma \right\} \right] \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{y}z}{\mu_0 \tau} = \frac{b^2 e^{\beta^2 \xi_0^2}}{c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \gamma)} \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} \left\{ \frac{du}{d\xi} \cosh \xi \sin 2\gamma \sin \gamma + 2u \sinh \xi \cos 2\gamma \cos \gamma \right\} \dots\dots\dots (44)$$

である事が分かる。

$a=4 \text{ cm}$, $b=2 \text{ cm}$ とすれば, $c^2=12$, $\xi_0=0.549$ であるから $2u$, $du/d\xi$ は表-1. の如くなる。

表-1. $2u$

ξ	$\beta^2 = 1$	$\beta^2 = 3/4$	$\beta^2 = 1/2$	$\beta^2 = 1/4$
0.11	0.924	0.925	0.926	0.927
0.22	0.456	0.460	0.464	0.468
0.33	0.695	0.706	0.715	0.725
0.44	0.942	0.961	0.976	0.996
0.549	1.192	1.215	1.251	1.284

表-2. $\frac{dM}{d\xi}$

ξ \ β^2	1	3/4	1/2	1/4
0.11	1.0028	1.0034	1.0040	1.0050
0.22	1.0213	1.0300	1.0320	1.0370
0.33	1.0681	1.0890	1.1080	1.1290
0.44	1.1535	1.2130	1.2510	1.3100
0.549	1.2828	1.4110	1.4860	1.6190

(a) 応力 \hat{x}_2, \hat{y}_2 を $\beta^2=1/2$ に對して計算すれば表-3 の如く之を图示すれば図-4, 5 の如くである。

図-4.

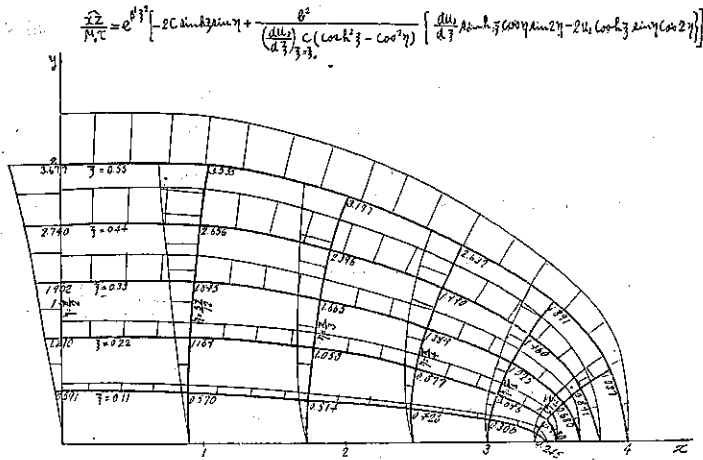


図-5.

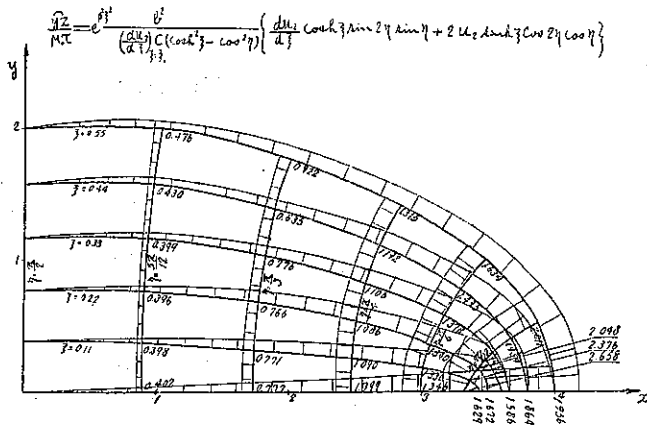


表-3. $\frac{\alpha z}{\mu_0 \tau}$

$\eta \backslash \xi$	0	0.11	0.22	0.33	0.44	0.549
0	0	0	0	0	0	0
$\pi/12$	0	0.245	0.480	0.680	0.891	1.087
$\pi/6$	0	0.306	0.646	1.025	1.460	1.891
$\pi/4$	0	0.426	0.877	1.389	1.990	2.637
$\pi/3$	0	0.514	1.058	1.665	2.396	3.197
$5\pi/12$	0	0.570	1.169	1.845	2.656	3.555
$\pi/2$	0	0.591	1.210	1.902	2.740	3.673

表-4. $\frac{\beta z}{\mu_0 \tau}$

$\eta \backslash \xi$	0	0.11	0.22	0.33	0.44	0.549
0	—	1.629	1.672	1.586	1.864	1.956
$\pi/12$	2.658	1.376	2.048	1.912	1.954	2.011
$\pi/6$	1.346	1.336	1.940	1.378	1.495	1.634
$\pi/4$	1.099	1.090	1.086	1.106	1.192	1.315
$\pi/3$	0.777	0.771	0.766	0.776	0.835	0.922
$5\pi/12$	0.402	0.398	0.396	0.399	0.430	0.479
$\pi/2$	0	0	0	0	0	0

比較のために弾性係数一様な場合を計算すれば表-5, 6 の如く之を図示すれば図-6, 7 の如し。

表-5. $\frac{\alpha z}{\mu_0 \tau}$

$\eta \backslash \xi$	0.000	0.11	0.22	0.33	0.44	0.549
0	0	0	0	0	0	0
$\pi/12$	0	0.158	0.318	0.482	0.652	0.830
$\pi/6$	0	0.305	0.615	0.931	1.258	1.602
$\pi/4$	0	0.431	0.870	1.317	1.779	2.265
$\pi/3$	0	0.528	1.066	1.613	2.179	2.774
$5\pi/12$	0	0.607	1.230	1.861	2.514	3.202
$\pi/2$	0	0.607	1.230	1.862	2.516	3.203

表-6. $\frac{\sqrt{z}}{\mu\tau}$

η	0	0.11	0.22	0.33	0.44	0.549
0	1.399	1.325	1.350	1.391	1.448	1.523
$\pi/12$	1.374	1.280	1.304	1.344	1.398	1.471
$\pi/6$	1.142	1.148	1.109	1.205	1.253	1.319
$\pi/4$	0.932	0.937	0.955	0.983	1.024	1.077
$\pi/3$	0.659	0.663	0.675	0.696	0.724	0.761
$5\pi/12$	0.341	0.343	0.350	0.360	0.375	0.394
$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

図-6.

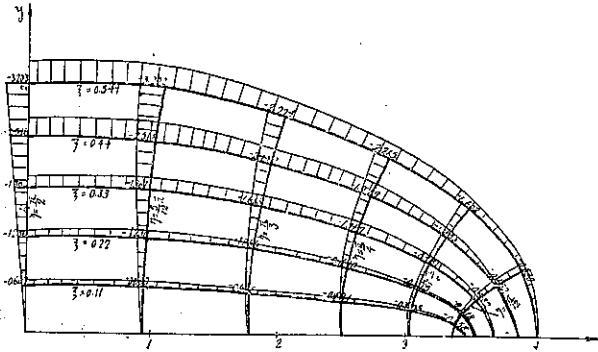
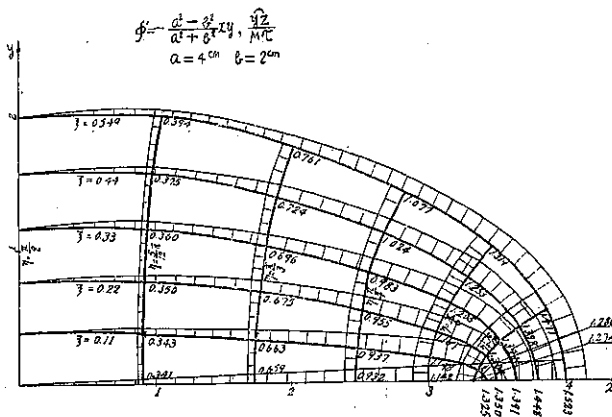


図-7.



これで分かる如く不均一の場合 $\eta=0, \xi=0.11, 0.22, 0.33$ の處の \sqrt{z} は、不思議な形をしてゐる。(計算間違ひではないと思ふ) 最大剪断応力は断面の短軸の端で生ずる。 $\beta^2=1, 3/4, 1/2, 1/4$ に對する最大剪断応力を計算すれば表-7, 図-8 の如くであり、 $\beta^2=1, 3/4, 1/2, 1/4$ に對應する彈面内の弾性係数の分布の様子は、図-3 の如くである。

表-7. 最大剪断応力
 $\mu_0 \tau$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	5.3308	4.7511	4.1640	3.6870	3.2000

β^2 の夫々の分布に対応してその断面内の平均値 $\bar{\mu}$ に等しい一様な弾性係数を有する棒の最大剪断応力は表-8の如くである。

表-8. 平均の弾性係数を有する棒に於ける最大剪断応力
 $\bar{\mu} \tau$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	3.5635	3.4653	3.3725	3.2842	3.2000

表-7 と表-8 の対応する数字の比は表-9、図-4 の如くである。

表-9. $\frac{(\text{最大剪断応力})}{\mu_0 \tau} / \frac{(\text{最大剪断応力})}{\bar{\mu} \tau}$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	1.4959	1.3710	1.2346	1.1226	1.0000

(b) 振りモーメント $\beta^2=1, 3/4, 1/2, 1/4$ に対する振り剛さを計算し
図示すれば表-10、図-10 の如くである。

表-10. $\frac{\mu}{\mu_0 \tau}$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	32.9076π	30.733π	29.0628π	27.2520π	25.6π

弾性係数の断面内の平均値 $\bar{\mu}$ を有する一様な棒の振り剛さは表-11
の如くである。

表-11. $\frac{\bar{\mu}}{\mu_0 \tau}$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	28.5082π	27.722π	26.9798π	26.2733π	25.6π

表-10 と表-11 中の対応する数字の比を取れば表-12 の如く之を
図示すれば図-11 の如くである。

図-8.

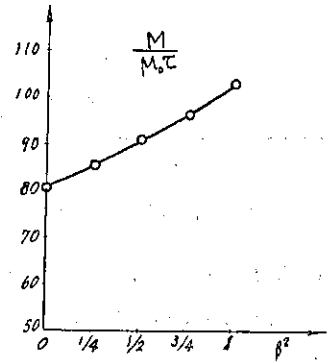


図-9.

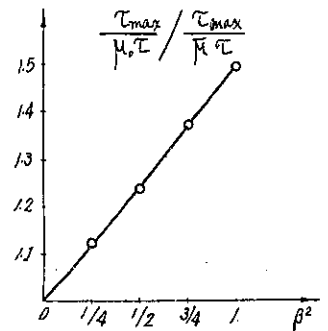


図-10.

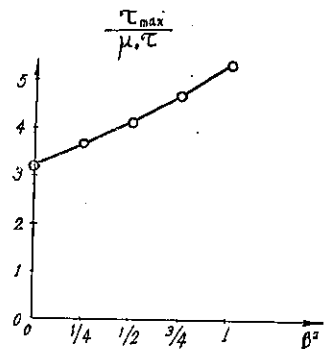


表-12. $\frac{\mu}{\mu_{0\tau}} / \frac{\mu}{\mu\tau}$

β^2	1	3/4	1/2	1/4	0
	1.1543	1.1086	1.0772	1.0372	1.000

表-9. 表-12 又は図-9 と 図-11 を比較すれば、弾性係数が図-3 の様な分布をなす不均一度の影響は、振り剛さに對するよりも剪断心力に對する方が遙かに大きいと言ふ事が分かる。

図-11.

