論 說 報 告

第24卷第3號 昭和13年3月

等変速度に適応する全緩和曲線

會員 江 藤 禮*

要 旨 速度を一様に変化させる場合，之に適応する様な“全緩和曲線”の算式を導きその用法を述べたものである。

1. 算式の誘導

路線屈曲部に円曲線を挿入せざる所謂“全緩和曲線”の採用が考へられる。走行車を 1 質點と見なし之が等変速度を有する場合を取り扱ふ。

図-1. 記號の說明

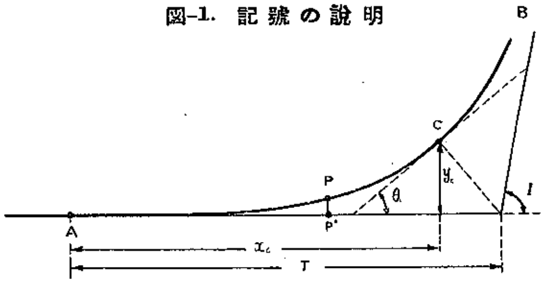

図-1 を參照し，次の記號を用ひる。

v: 速度，　ρ: 曲率半徑，　θ: ラセン角

L: 曲線始點からの長さ，　ε: 橫勾配

g: 重力加速度

なほ指定されたる點に對しては添字を附けて區別する。橫勾配及速度の変化狀態が異ればそれに對応して特殊な曲線が出來る譯であるが玆では簡單に次の様に假定する。

(1) 橫勾配は始點 A から中點 C まで曲線長に正比例して增加する。卽ち

$$\varepsilon=\varepsilon_C L/L_C \qquad (1)$$

(2) 速度は v_A から v_C まで曲線長に正比例して減少する。卽ち

$$v=v_A-\mu L \qquad (2)$$

但し $$\mu=(v_A-v_C)/L_C \qquad (3)$$

曲率半徑と速度との間には次の關係がある。

$$\rho=\frac{dL}{d\theta}=v^2/g\cdot\varepsilon=\frac{\lambda}{L}(v_A-\mu L)^2 \qquad (4)$$

但し $$\lambda=L_C/g\cdot\varepsilon_C \qquad (5)$$

最小半徑は $$\rho_C=v_C^2/g\cdot\varepsilon_C \qquad (6)$$

(4) 式を積分すれば

$$\theta=F(\xi)/\lambda\cdot\mu^2 \qquad (7)$$

上式に於て $$\xi=\mu L/v_A=\frac{L}{L_C}\left(1-\frac{v_C}{v_A}\right)=\frac{L}{L_C}\xi_C \qquad (8)$$

$$F(\xi)=\ln(1-\xi)+\frac{\xi}{1-\xi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\xi^{n+1} \qquad (9)$$

---

* 神戸高等工業学校教授　工学士

ξ は $\xi_A=0$ から $\xi_C=1-\dfrac{v_C}{v_A}$ まで変化するが常に 1 より小である。

次に曲線上の任意點 P の位置を直角座標で表はす。即ち A 點を座標原點にとり，$\overline{AP'}=x$, $\overline{PP'}=y$ とす。

$$dx=\frac{v_A}{\mu}\cdot\cos\theta\cdot d\xi,\quad dy=\frac{v_A}{\mu}\cdot\sin\theta\cdot d\xi$$

$\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ を夫々 θ の無限級數に展開し之に (9) 式を代入すれば x 及 y は ξ^n の無限級數で表はされる。之を簡明に次の形に置く。

$$x=L\left(1-\frac{A}{D^2}\right)\quad\cdots\cdots(10)$$

但し　$A=\alpha_0-\dfrac{\alpha_1}{E}+\dfrac{\alpha_2}{E^2}-\dfrac{\alpha_3}{E^3}+\text{etc.}$

$$y=L\frac{B}{D}\quad\cdots\cdots(11)$$

但し　$B=\beta_0-\dfrac{\beta_1}{E}+\dfrac{\beta_2}{E^2}-\dfrac{\beta_3}{E^3}+\text{etc.}$

上式に於て

$$D=\lambda\mu^2=F(\xi_C)/\theta_C\quad\cdots\cdots(12)$$

$$E=(10\cdot D)^2\quad\cdots\cdots(13)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0=\xi^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\xi^n,\ \alpha_1=\xi^7\sum b_n\xi^n,\ \ \alpha_2=\xi^{11}\sum c_n\xi^n,\ \ \alpha_3=\xi^{15}\sum d_n\xi^n\\ \beta_0=\xi\sum e_n\xi^n,\ \beta_1=\xi^5\sum f_n\cdot\xi^n,\ \beta_2=\xi^9\sum g_n\xi^n,\ \beta_3=\xi^{13}\sum h_n\xi^n\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(14)$$

係數 $a, b, \cdots h$ に對し $n=1$ から $n=30$ までの數値を表-1 に記載して置いた。ξ が小なる時は級數は迅速に收斂するが ξ が 1 に近くなる時は收斂が緩漫となり表-1では不充分である。又多くの桁數を要求するならば更に α_4 β_4 …を考慮せねばならぬ。

曲線長を計算するには (3), (5), (12) 式から

$$L_C=(v_A-v_C)^2/D\cdot g\cdot\varepsilon_C\quad\cdots\cdots(15)$$

$$L=L_C\xi/\xi_C\quad\cdots\cdots(16)$$

切線長

$$T=x_C+y_C\cdot\tan\theta_C\quad\cdots\cdots(17)$$

附　記

特に速度 v が一定なる場合，即ち $\xi=0$ の時は (4) 式の代りに次の關係が成立する。

$$\rho=k/L\quad \text{但し}\ k=\lambda\cdot v^2=\text{常數}$$

之は Clothoid と呼ばれる曲線で之に關する性質や數表は周知の通りである。即ち

$$\rho_C=v^2/g\cdot\varepsilon_C,\qquad k=2\theta_C\rho_C^2$$

$$L_C=2\rho_C\theta_C,\qquad L=L_C\sqrt{\frac{\theta}{\theta_C}}$$

表-1.

n	a	b	c	d	e	f	g	h
1	0.0250000	0.028935	0.0167	$0.0^{8}57$	0.166667	0.29762	0.237	$0.0^{6}10$
2	555556	0.13889	0.1240	$0.0^{7}58$	166667	1.0417	1.447	91
3	853175	39459	5161	$0.0^{6}316$	150000	2.2763	5.064	$0.0^{5}437$
4	0.112500	83076	1.587	$0.0^{5}125$	133333	3.9938	13.34	$0.0^{4}153$
5	136806	1.6206	4.023	399	119048	6.1647	29.39	440
6	158413	2.7283	8.897	$0.0^{4}110$	107143	8.7517	57.24	$0.0^{3}109$
7	177630	4.2503	17.79	268	0.097222	11.716	101.8	242
8	19478	6.2449	32.83	592	88889	15.021	168.7	492
9	21014	3.7669	56.90	$0.0^{3}123$	81818	18.635	264.4	932
10	22396	11.867	93.62	236	75758	22.526	396.4	$0.0^{2}168$
11	23647	15.587	147.5	437	70513	26.67	572.6	286
12	24783	19.968	224.0	769	65934	31.04	801.5	468
13	25819	25.057	329.5	$0.0^{2}130$	61905	35.62	109×10	736
14	26767	30.879	471.9	212	58333	40.38	145	0.0114
15	2764	37.49	660.0	336	5515	45.53	190	169
16	2844	44.86	903.2	519	5229	50.42	244	246
17	2919	53.09	1214	782	4971	55.66	300	351
18	2988	62.16	1605	0.115	4737	61.04	383	49
19	3052	72.09	2089	167	4524	66.55	472	67
20	3112	82.93	2684	237	4329	72.09	575	91
21	317	94.7	341×10	34	415	77.9	692	0.12
22	322	107	427	46	399	83.7	827	16
23	327	121	531	62	383	89.6	979	21
24	332	136	653	83	369	95.6	115×10^2	27
25	336	151	797	1.1	356	102	134	34
26	340	168	964	1.5	344	108	156	43
27	344	185	116×10^2	1.9	333	114	179	54
28	348	204	138	2.4	322	120	218	67
29	352	224	164	3.1	312	127	233	.82
30	355	244	193	3.9	302	133	264	1.0

$$x=\sqrt{\frac{k}{2}}\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta=L\Big(1-\frac{\theta^2}{10}+\frac{\theta^4}{216}$$

$$-\frac{\theta^6}{9\,360}+\frac{\theta^8}{685\,440}+\cdots+\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(1+4n)(2n)!}$$

$$+\cdots\Big)\cdots\cdots\cdots(18)$$

$$y=\sqrt{\frac{k}{2}}\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta=L\Big(\frac{\theta}{3}-\frac{\theta^3}{42}+\frac{\theta^5}{1\,320}$$

$$-\frac{\theta^7}{75\,600}+\frac{\theta^9}{6\,894\,720}+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^n\theta^{(2n+1)}}{(3+4n)(2n+1)!}+\cdots\Big)\cdots(19)$$

2. 公式の用法

v_A と v_C とを與へれば ξ_C が定まり $F(\xi_C)$ が算出される。次に θ_C を與へれば (12) 式で D が定まる。之は θ_C に反比例するから便宜上 $\theta_C=1°$ に對する値（之を D_0 と書き表はす）を求めて置けば任意の θ_C に對する D の値は容易に計算される。

表-2. には ξ を 0.01 から 0.50 まで 0.01 間隔にとり，夫らに對応する D_0 と α's 及 β's の數値が記載してある。玆に注意すべきは D 從つて E は θ_C と ξ_C とで定まるから 1 つの曲線に就ては常數となることである。A 或は B の値を計算するに當り任意項とそれに隣る項とが如何なる割合になるかを知る必要がある。表-3 には $\theta_C=90°$ の場合に就て吟味したので有效數字は大体 5 桁まで求めてよいことが分る（但し最終桁は信頼し難い）。θ_C は一般に 90° より小にとられ之が小さくなる程高次項の影響は小となる。

表-3.

ξ_C	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
α_0	673.18	190.68	43.795	6.5133	0.31537
$-\alpha_1/E$	71.65	20.69	4.806	0.7248	0.03566
α_2/E^2 $\times10^5$	3.99	1.18	0.271	0.0409	0.00202
$-\alpha_3/E^3$	0.13	0.04	0.009	0.0014	0.00007
A	605.39	171.13	39.251	5.8280	0.28166
A/D^2	0.15852	0.17366	0.18704	0.19880	0.21015
β_0	794.42	433.03	211.58	82.920	18.498
$-\beta_1/E$	123.70	69.75	35.01	14.028	3.203
β_2/E^2 $\times10^4$	9.33	5.38	2.69	1.083	0.250
$-\beta_3/E^3$	0.40	0.22	0.12	0.046	0.011
B	679.65	368.43	179.14	69.929	15.534
B/D	0.34778	0.37115	0.39105	0.40842	0.42432

表-2.

ξ	D_0	$\alpha_0\times10^5$	$\alpha_1\times10^5$	$\alpha_2\times10^5$	$\alpha_3\times10^5$	$\beta_0\times10^4$	$\beta_1\times10^4$	$\beta_2\times10^4$	$\beta_3\times10^4$
0.50	17.58827	673.175	273.64	58.25	7.33	794.415	472.43	136.1	22.0
0.49	16.47579	596.844	213.34	39.89	4.44	750.006	392.87	99.43	14.1
0.48	15.42755	528.624	166.96	27.22	2.66	707.671	326.16	72.47	9.00
0.47	14.43995	467.683	128.77	18.52	1.59	667.314	270.40	52.71	5.73
0.46	13.50879	413.266	99.756	12.58	0.942	628.840	223.80	38.18	3.64
0.45	12.62814	364.704	77.081	8.506	557	592.164	184.90	27.62	2.30
0.44	11.80273	321.393	59.405	5.727	328	557.201	152.41	19.90	1.45
0.43	11.02169	282.793	45.612	3.831	192	523.877	125.33	14.25	0.905
0.42	10.28490	248.423	34.972	2.563	112	492.117	102.87	10.24	501
0.41	9.589835	217.849	26.705	1.708	0.0645	461.855	82.180	7.26	349
0.40	8.934125	190.681	20.386	1.141	369	433.025	68.731	5.22	217
0.39	8.315554	166.556	15.399	0.7389	210	405.566	55.910	3.64	132
0.38	7.732094	145.172	11.621	4814	119	379.421	45.360	2.56	0.0800
0.37	7.181814	126.241	8.7317	3129	$0.0^{2}663$	354.535	36.625	1.79	482
0.36	6.662955	109.506	6.5286	2013	368	330.857	29.551	1.24	288
0.35	6.173821	94.7365	4.8564	1287	202	308.338	23.710	0.852	171
0.34	5.712859	81.7257	3.5928	0.08155	110	286.931	18.926	583	100
0.33	5.278620	70.2868	2.6417	5122	$0.0^{3}579$	266.597	15.063	397	$0.0^{2}580$
0.32	4.869723	60.2505	1.9301	3186	312	247.284	11.922	269	334
0.31	4.484890	51.4697	1.4005	1961	163	228.954	9.3836	179	189
0.30	4.122907	43.7951	1.0086	1194	$0.0^{4}837$	211.580	7.3464	119	106
0.29	3.782656	39.6738	0.72059	$0.0^{2}7183$	424	195.118	5.7029	0.0775	$0.0^{3}583$
0.28	3.456763	31.3172	51031	4264	211	179.536	4.4194	504	315
0.27	3.163128	26.2989	35803	2497	103	164.800	3.3928	267	170
0.26	2.881892	21.9710	24868	1439	$0.0^{5}495$	150.879	2.5840	204	$0.0^{4}893$
0.25	2.618492	18.2530	17078	$0.0^{3}8165$	236	137.745	1.9500	127	464
0.24	2.372062	15.0722	11589	4547	106	125.369	1.4612	$0.0^{2}783$	231
0.23	2.141825	12.3633	0.077573	2482	$0.0^{6}468$	113.723	1.0930	472	114
0.22	1.927035	10.0679	51219	1327	204	102.783	0.79397	281	$0.0^{5}549$
0.21	1.726969	8.13348	33280	$0.0^{4}6923$	$0.0^{7}854$	92.5226	57522	164	257
0.20	1.540981	6.51327	21248	3518	345	82.9196	41126	$0.0^{3}931$	116
0.19	1.368418	5.16531	13303	1736	134	73.9509	28980	518	$0.0^{6}312$
0.18	1.208700	4.05221	$0.0^{2}81537$	$0.0^{5}8314$	$0.0^{8}503$	65.5949	20094	281	217
0.17	1.061238	3.14080	48769	5830	178	57.8311	13683	147	$0.0^{7}873$
0.16	0.925504	2.40147	27393	1696	$0.0^{9}601$	50.6396	0.091290	$0.0^{4}749$	337
0.15	800984	1.80815	16030	$0.0^{6}7168$	190	44.0014	59519	367	124
0.14	687211	1.33770	$0.0^{3}87380$	2876	$0.0^{10}362$	37.8981	37795	171	$0.0^{8}421$
0.13	583701	0.969852	45746	1086	153	32.3128	23316	$0.0^{5}760$	137
0.12	488747	686829	22951	$0.0^{7}3825$	$0.0^{11}380$	27.2282	13850	319	$0.0^{9}403$
0.11	404604	473141	10801	1238	$0.0^{12}842$	22.6284	$0.0^{2}79036$	125	108
0.10	329485	315368	$0.0^{4}47795$	$0.0^{8}3635$	164	18.4980	42926	$0.0^{6}449$	$0.0^{10}258$
0.09	263012	201968	19528	$0.0^{9}9468$	$0.0^{13}272$	14.8222	21959	147	$0.0^{11}538$
0.08	204827	123102	$0.0^{5}72266$	2123	$0.0^{14}371$	11.5861	10429	$0.0^{7}422$	$0.0^{12}940$
0.07	154591	0.0104612	23589	$0.0^{10}3950$	$0.0^{15}393$	8.77675	$0.0^{3}45085$	104	132
0.06	111978	371531	$0.0^{6}65323$	$0.0^{11}5743$	$0.0^{16}300$	6.38054	17230	$0.0^{8}209$	$0.0^{13}739$
0.05	0.0766775	175037	14443	$0.0^{12}5957$	$0.0^{17}146$	4.38481	$0.0^{4}35614$	$0.0^{9}316$	$0.0^{15}787$
0.04	483961	$0.0^{2}700577$	$0.0^{7}23056$	$0.0^{13}3793$	$0.0^{19}369$	2.77733	14054	$0.0^{10}319$	$0.0^{16}401$
0.03	268445	216648	$0.0^{8}28771$	$0.0^{14}1112$	$0.0^{21}332$	1.54625	$0.0^{5}24131$	$0.0^{11}168$	$0.0^{18}644$
0.02	116398	$0.0^{3}418339$	$0.0^{10}81607$	$0.0^{17}7492$	$0.0^{24}457$	0.680244	$0.0^{6}20440$	$0.0^{12}275$	$0.0^{20}502$
0.01	$0.0^{2}290347$	$0.0^{4}255642$	$0.0^{10}30364$	$0.0^{20}1798$	$0.0^{29}631$	168349	$0.0^{8}30827$	$0.0^{14}252$	$0.0^{24}712$

なほ比較のため $\xi=0$ に於ける値を (18), (19) 式から求める。

$$x=(1-0.2201\,1)L,\quad y=0.4382\,6\,L$$

A/D^2 及 B/D は速度に直接支配されるのでなく $\left(1-\dfrac{v_C}{v_A}\right)$ なる比によつて定まる。然るに曲線長 L は $(v_A-v_C)^2$ に正

比例する。曲線設置に當つては中點 C の他に曲線上に數個の點をとるのであるが夫らを選ぶにはその ξ をして 0.01 の倍數となる樣にする。

3. 計 算 例

$$\begin{cases} \text{交角} & I=80^\circ \\ \text{速度} & v_A=25\,\mathrm{m/sec},\quad v_C=15\,\mathrm{m/sec} \end{cases}$$

を與ふ。

$$\theta_C=I/2=40^\circ,\quad \xi_C=1-\frac{v_C}{v_A}=0.4$$

$$D=D_0/\theta_C=0.2233\,53,\quad D^2=0\,0498\,87$$

$$E=4.9887,\quad E^2=24.89,\quad E^3=124$$

横勾配は便宜上 $g\cdot\varepsilon_C=1$ なる樣に選ぶ。卽ち $\varepsilon_C=1/9.8=0.102$ となる。之は傾斜角で約 5°50′ に當る。

中點 C に對し

$$\rho_C=v_C^2/g\varepsilon_C=225\,\mathrm{m},\quad L_C=(v_A-v_C)^2/g\varepsilon_C D=447.72\,\mathrm{m}$$

$$A=186.641\times10^{-5},\quad x_C=L_C\left(1-\frac{A}{D^2}\right)=430.97\,\mathrm{m}$$

$$B=419.456\times10^{-4},\quad y_C=B/D=84.08\,\mathrm{m}$$

$$T=x_C+y_C\cdot\tan\theta_C=501.52\,\mathrm{m}$$

曲線 AC を 4 等分し各分點（A 點より數へる）に對應する數値を求める。

分點 1 に對し

$$\xi=0.1,\quad L_1=\frac{L_C}{4}=111.93\,\mathrm{m},\quad v_1=22.5\,\mathrm{m/sec.}$$

$$\rho_1=4v_1^2=2\,025\,\mathrm{m},\quad x_1=111.92\,\mathrm{m},\quad y_1=0.93\,\mathrm{m}$$

分點 2 に對し

$$\xi=0.2,\quad L_2=\frac{L_C}{2}=223.86\,\mathrm{m},\quad v_2=20\,\mathrm{m/sec}$$

$$\rho_2=2v_2^2=800\,\mathrm{m},\quad x_2=223.57\,\mathrm{m},\quad y_2=8.30\,\mathrm{m}$$

分點 3 に對し

$$\xi=0.3,\quad L_3=\frac{3}{4}L_C=335.79\,\mathrm{m},\quad v_3=17.5\,\mathrm{m/sec}$$

$$\rho_3=\frac{4}{3}v_3^2=229.69\,\mathrm{m},\quad x_3=332.86\,\mathrm{m},\quad y_3=31.59\,\mathrm{m}$$