

論 說 報 告

第 23 卷 第 7 號 昭和 12 年 7 月

鉛 直 線 を 軸 と す る 渦 の 相 似

會 員 大 坪 喜 久 太 郎*

Similarity of Rotating Liquids about Vertical Axis

By Kikutarô Otubo, C. E., Member.

要 旨

Euler 及 Navier-Stokes の運動方程式から誘導せられた廻転流体の運動方程式に就て相似律を求め其の法則の正しい事を實證する爲に鉛直軸の流出渦を起す 2 つの模型を作製し一つは他の幾何学上 1/2 の比にし其の流量並に自由面形の相似率を求め更に實験結果から得られた其の渦の自由面の方程式に就ての検討を附加したものである。

目 次

	頁
1. 緒 論	709
2. 無渦流(整流)の相似	710
3. 實験装置	714
4. 流量の相似	714
5. 自由面の相似	714
6. 自由面の方程式	715

1. 緒 論

流体運動には無渦流(整流)と渦流とがある。而して液体の相似律研究には一般工学上に取扱ふ 2 つの種類に就て行ふ可きである。即ち開渠又は溢流堰の様に自由面を有する場合と水道管又は水力發電用の水圧管の如く圧力を受けつゝ流れる場合である。前者に於ては流体運動を左右する圧力の差は流れの幾何学上の大きさに直ちに影響を受ける。例へば溢流堰の場合、接近流速を無視すれば其の流量は堰頂上の水深のみならず堰の幾何学上の大きさ即ち堰の長さ幅にも左右せられる。然るに後者の場合には運動を左右する動圧力は幾何学上の大きさには無關係である。例へば管中の流れを採つて考へれば其の流量は其の圧力管の両端に存在する圧力の差に依るので圧力管の大きさに無關係であり純理論上動圧力は完全に任意に選定する事が出来る。換言すれば自由面を有する流体運動に於ては運動を誘起する圧力は運動する場所の幾何学上の形状に依つて殆ど一定し、従て此の運動を起す圧力の比は其の大きさに無關係であり得ないが圧力を受けて流れる場合は無關係であり得る。他方又流体の性質から相似律確立の條件を 2 つに分けねばならぬ、完全流体と粘性流体は之である。水の粘性は水理工学上の諸問題解決に無視して差支えない場合が多い、従て多くは完全流体として取扱つても實際上誤差は少ない。以上液体運動の兩 2 大別の範疇を組合せて 4 つの場合に就て夫々の相似律を求めねばならぬ。

a. 自由面を有する流れ： 1. 完全流体, 2. 粘性流体。

b. 圧力を受けて居る流れ： 3. 完全流体, 4. 粘性流体。

而して 1 及 3. の完全流体に對しては Euler の運動方程式から又 2 及 4. の粘性流体に對しては Navier-Stokes

* 北海道帝國大学助教授 工学士

の運動方程式から出発して相似律を確定する事が出来る。運動方程式の外に連続等式の相似も確立せなくてはならぬのであるが吾人の普通取扱ふ液体に於ては非圧縮性と假定しても差支へない故に後述の如く此の相似律は考慮するには及ばない。此の研究は流出渦に就てあるから自由面を有する流れの場合のみの相似律を検討し圧力を受けて居る場合を後日に譲る事とし又渦流に對する相似は紙面の關係上割愛する。

2. 無渦流(整流)の相似

i. 自由面を有する流れて完全流体の場合

流れは無渦流(整流)であると假定すれば Euler の運動方程式並に連続等式

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

中流出渦の時は外力として重力のみ働き一定且つ一様な角速度 ω を以つて鉛直軸 z の廻りに流体が廻転して居ると見做ても流出渦の水平自由面の附近に於ては大體差支へない。此の假定の元に於ては z 軸を上向きに (+) に採れば

$$v_x, v_y, v_z = -\omega y, \omega x, 0$$

$$X, Y, Z = 0, 0, -g$$

であるから運動方程式⁽¹⁾は夫々

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad \dots\dots(3)$$

今 M_1 及 M_2 の2つの相似の運動を考へて見る。而して兩者の長さ、時間、圧力、角速度、流体の密度、其の動粘性係数の比を夫々 $\lambda, \theta, \alpha, a, m, k$ であるとする、かくすれば M_1 なる運動中のある點 1 に於ける流体の廻転運動の方程式並に連続等式は夫々

$$-\omega_1^2 x_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad -\omega_1^2 y_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - g \quad \dots\dots(3')$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial z_1} = 0 \quad \dots\dots(2')$$

又 M_2 なる運動中の點 1 に相似の位置にある點 2 に於ける流体の廻転運動方程式並に連続等式は同様

$$-\omega_2^2 x_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \quad -\omega_2^2 y_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y_2}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z_2} - g \quad \dots\dots(3'')$$

$$\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{y2}}{\partial y_2} + \frac{\partial v_{z2}}{\partial z_2} = 0 \quad \dots\dots(2'')$$

上記の諸式中の各項に就て

$$\omega_2^2 x_2 = a^2 \lambda \omega_1^2 x_1, \quad \dots\dots$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = \frac{1}{m} \frac{\alpha}{\lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad \dots\dots$$

$$\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda \theta^{-1} v_{x1})}{\partial(\lambda x_1)} = \theta^{-1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1}, \quad \dots\dots$$

なる關係がある故に (3'') 及 (2'') は次ぎの如く書換へる事が出来る。

(1) Lamb: Hydrodynamics, V-Edition p. 25.

$$-a^2 \lambda \omega_1^2 x_1 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad -a^2 \lambda \omega_1^2 y_1 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \quad 0 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - g \quad \dots (3''')$$

$$\theta^{-1} \left\{ \frac{\partial v_{z1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial z_1} \right\} = 0 \quad \dots (2''')$$

(3''') 及 (2''') と (3') 及 (2') との諸式を比較して見れば明かな様に先づ連続等式は非圧縮性の流体なれば如何なる比率の模型に於ても常に満足し流体の粘性にも將又圧力の如何に係らない、然るに廻転運動の方程式に於ては M_2 なる運動が M_1 なる運動に相似なる爲には

$$a^2 \lambda = \frac{\alpha}{m \lambda} = 1 \quad \dots (4)$$

なる關係を満足せなくてはならない。之が求める相似の條件である。(4) 式中には4つの比率があつて方程式は2つよりないから解く事が出来ないが吾々が實際模型實驗するに使用する液体の性質に依つて其等の密度の比 m を又模型の比を幾何学上長さの比 λ に作製する事に依り前以て知る事が出来結局問題を容易に解く事が出来る。(4) 式から

$$\alpha = m \lambda, \quad a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \dots (5)$$

となつて2つの未知数を求める事が出来る。今他の關係を求めれば

圧力: (5) 式から $\lambda = \frac{\alpha}{m}$ となつて圧力の比 α を密度の比 m で除した値は λ なる比率即ち兩模型の長さの比であつて自由面からの深さに相當して居る。此の事は常識上からも一般に知られて居る事で大氣の圧力以上の圧力を算定するには自由面から流れの任意の點までの深さが其の點の圧力である。而して常に自由面を起點として測定しなくてはならぬ。大氣の圧力以下の圧力の場合は所謂空洞現象 (cavitation) であつて上記の關係は成立しない。

速度: 2つの速度を夫々 V_1 及 V_2 とすれば

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_2 x_2}{\omega_1 x_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \lambda = \sqrt{\lambda}$$

速度の相似率が幾何学上長さの相似率の平方根に等しい事は水理学上有名な **Froude の法則** として既に技術者に膾炙されて居る。

相似断面の流量: A_1 及 A_2 を断面, Q_1 及 Q_2 を夫々の断面を通して流れる流量とすれば

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2 A_2}{V_1 A_1} = \sqrt{\lambda} \lambda^2 = \lambda^{5/2}$$

角速度及渦のベクトル: (5) 式から $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

時間: 時間のデメンションは T であり角速度のそれは T^{-1} であるから

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\lambda}$$

相似断面に働く力: F_1 及 F_2 を夫々断面 A_1 及 A_2 に働く力とすれば

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} = m \lambda \lambda^2 = m \lambda^3$$

仕事又はエネルギー: W_1 及 W_2 を2つの相似の仕事とすれば

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F_2 V_2}{F_1 V_1} = m \lambda^3 \sqrt{\lambda} = m \lambda^{7/2}$$

以上に於て比較する模型実験に同一流体を使用したとすれば $m=1$ となり $\alpha=\lambda$; $a=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; $\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\lambda}$; $\frac{Q_2}{Q_1}=\lambda^{3/2}$
 $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\lambda}$; $\frac{F_2}{F_1}=\lambda^3$; $\frac{W_2}{W_1}=\lambda^{7/2}$

此等の比率に依れば流量 Q , 力 F , 仕事 W 等の比率は極めて大であつて模型実験殊に純水理学の 実験を實驗室内に於て行ふに便である事が解せられる。

ii. 自由面を有する流れて粘性流体の場合

粘性流体に於ては Euler の運動方程式では不充分で粘性の項を加へた Navier-Stokes の運動方程式を採用せなくてはならぬ。即ち

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_x = \frac{dv_x}{dt}, Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_y = \frac{dv_y}{dt}, Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_z = \frac{dv_z}{dt} \dots \dots \dots (6)$$

但し $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$, $\frac{\mu}{\rho}$ = 液体の動粘性係数

而して廻転運動に對して前同様な假定をすれば上式は

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \omega \Delta x, -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \omega \Delta y, 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \omega \Delta z - g \dots \dots \dots (7)$$

今 M_1 及 M_2 なる 2 つの廻転運動中相似にある點 1 及 2 の廻転運動の方程式は夫々 (7') 及 (7'') 式で表さる。

$$-\omega_1^2 x_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta x_1; -\omega_1^2 y_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta y_1; 0 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta z_1 - g \dots (7')$$

$$-\omega_2^2 x_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \omega_2 \Delta x_2; -\omega_2^2 y_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y_2} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \omega_2 \Delta y_2; 0 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z_2} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \omega_2 \Delta z_2 - g \dots (7'')$$

上式中

$$\frac{\mu_2}{\rho_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = k a \lambda^{-1}; \dots \dots \dots$$

の関係があるから (7'') を書換へれば (7''') になる。

$$-a^2 \lambda \omega_1^2 x_1 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + k a \lambda^{-1} \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta x_1; -a^2 \lambda \omega_1^2 y_1 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + k a \lambda^{-1} \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta y_1;$$

$$0 = -\frac{\alpha}{m \lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + k a \lambda^{-1} \frac{\mu_1}{\rho_1} \omega_1 \Delta z_1 - g \dots \dots \dots (7''')$$

故に (7') と (7''') とを比較する事に依つて相似の條件を容易に求めらる。即ち

$$a^2 \lambda = \frac{\alpha}{m \lambda} = k a \lambda^{-1} = 1 \dots \dots \dots (8)$$

なる關係を満足しなくてはならぬ。(8) 式には 3 つの方程式と 5 つの未知数があるが液体の選定及幾何学上相似の模型を作製する事に依つて m 及 λ が決定し他の残りの 3 つの未知数が自然と決定して来る。而して (8) 式から k は

$$k = a^{-1} \lambda = \sqrt{\lambda} \lambda = \lambda^{3/2} \dots \dots \dots (9)$$

となり動粘性係数の比率も一定となる。言換へれば動粘性係数の比率は $\lambda^{3/2}$ である様な特殊の場合の外は粘性流体に於て兩者の廻転運動の相似率は不可能である。若し $k = \lambda^{3/2}$ に相當する動粘性係数の流体を使用して実験遂行したとせば粘性流体に於ても流速, 流量其の他に關する相似率は完全流体の場合と全く同一の比率を以て満足せられる。(9) 式を吟味すれば結局する所 Reynolds の一般法則の特殊の場合を表して居る事が解る。今 V を速度,

D をある長さのデメンションで表される値とすれば (9) 式から

$$k = \lambda \sqrt{\lambda} \quad \text{又は} \quad \frac{\mu_2}{\rho_2} / \frac{\mu_1}{\rho_1} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{V_2}{V_1}$$

故に $VD/\frac{\mu}{\rho} = \text{const.}$ となつて Reynolds の定数が一定である事が粘性流体に於て相似の条件を満足せしめるに必要不可欠である事を證明して居る。換言すれば粘性流体運動の相似に於ては Froude⁽¹⁾ の相似律及 Reynolds の相似律を同時に満足す可きものであり Navier-Stokes の運動方程式は先づ完全に近い (Weber の相似律, 温度及音等に對する相似率を含まず) 相似率を腹藏した運動方程式である。Navier-Stokes の粘性流体に對する運動方程式を少しく検討すれば図-1 の微小平行六面体 dx, dy, dz の各面に働いて居る圧力⁽²⁾は

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = p_{zy} \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = p_{xz} \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = p_{yx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

なる3つの各面に直角の圧力と3つの平行な圧力から成つて居る。此の内 $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ を表し又 p の初めの尾字は其の軸に直角な面を, 第2の尾字は其の軸の方向を表して居る。 p は流体中の圧力であつて $p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$ である。非圧縮性の流体の連続等式から $\operatorname{div} v = 0$ であるから結局 Euler の運動方程式中の p の外に Navier-Stokes の運動方程式中には次の諸圧力が餘分に加つて居る。

$$\begin{aligned} p_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = p_{zy} \\ p_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = p_{xz} \\ p_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = p_{yx} \end{aligned}$$

M_1 及 M_2 の2つの運動中の諸圧力の比は

$$\frac{p_{x_2x_2}}{p_{x_1x_1}} = \dots = \frac{p_{y_2y_2}}{p_{y_1y_1}} = \dots = \frac{mk}{\sqrt{\lambda}} = m\lambda \dots \dots \dots (11)$$

同様にして単位容積に對して毎秒の非圧縮性流体内の摩擦に依るエネルギーの消耗を函数 $\bar{\Phi}$ ⁽³⁾ で表せば Lord Rayleigh に依つて

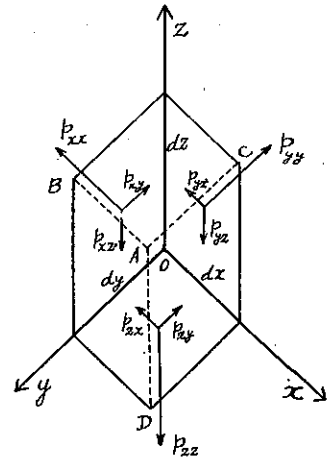
$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v_y \partial v_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial v_y \partial v_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v_x \partial v_x}{\partial x \partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial v_x \partial v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v_x \partial v_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial v_x \partial v_y}{\partial x \partial y} \right) \right\} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

(1) 著者第3回工学会大會講演集 (応用力学の部 No. 19)

(2) Lamb: Hydrodynamics V-Edition p. 544.

(3) Lamb: Hydrodynamics V-Edition p. 549.

図-1.



であつて $k=\lambda^{3/2}$ の関係を採用すれば M_1 及 M_2 の相似の運動中の摩擦に依るエネルギー消耗の比は

$$\frac{\bar{\Phi}_2}{\bar{\Phi}_1} = \frac{mk}{\lambda} = m\sqrt{\lambda} \dots\dots\dots(13)$$

の関係があり従て相似の容積に於けるエネルギー消耗の相似率は

$$\frac{E_2}{E_1} = m\sqrt{\lambda}\lambda^3 = m\lambda^{7/2} \dots\dots\dots(14)$$

である。之は既に前に求めた値と同一であつて $k=\lambda^{3/2}$ なる使用流体の動粘性係数の比が $\lambda^{3/2}$ に等しい事、Reynolds の定数の相等しくなくてはならぬ事又逆に粘性流体に於ては同一流体を使用すれば相似律は成立しない事を言ひ表して居る。

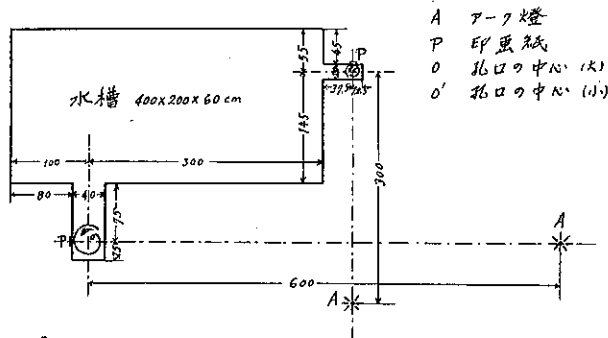
3. 実験装置

実験に使用された水槽は図-2 の如く $400 \times 200 \times 600$ cm であつて $\lambda=2$ に相當した 2 つの突出部を水槽の兩側に突出し其の内に鉛直線を軸とする流出渦を作る爲に $\lambda=2$ なる相似の渦形室を作り其の断面は次ぎの (15) 式で表はされる對數渦形を採用した。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 6.6 e^{0.699 \theta} \\ r_2 &= 13.2 e^{0.699 \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

而して渦形室の中心に流出孔を穿ち夫々の直径の比率を正しく $1/2$ に作つた。實驗は 18.6° C の水を以つて行はれた。

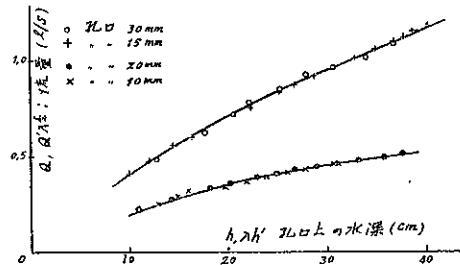
図-2. 實驗に使用した水槽の平面図



4. 流量の相似

最初に水深の函数とした流量の変化を求めたのであるが其の結果は図-3 に示した通りである。其の内上の曲線は流出口の直径が夫々 30 mm 及 15 mm のものに相當し下の曲線は 20 及 10 mm 径のものに相當したものであるが此の實驗の條件の元に於ては此の 2 曲線に依り完全に $\frac{Q_2}{Q_1} = \lambda^{5/2}$ なる第 2 節に述べた相似率を満足し相似律の正しい事を證明して居る。

図-3. 流出渦の相似



5. 自由面の相似

之には流量の相似率を決定したものと同一の模型を採用した。而して自由面の形を得るには図-2 に示した様にアーク燈を實驗室の許す範圍内の遠距離におき出来るだけ平行光線を得る様にし其の位置は矢張り丁度兩模型の比である $1/2$ の所に固定し図の P 點に印畫紙をおいて自由面の蔭像を寫した。其の際 PA なる軸に沿ふて光線を透過する様に設備せなくてはならぬ事は勿論である。図-4、図-5 は其の蔭像を示したものである。2 つの自由面の形を比較するには渦の垂直軸と自由面に接する水平線との交點 OO' を先づ決定する。かくて図に示す様に $O1, O2, O3, O4, O5$ (図-4) 及 $O'1', O'2', O'3', O'4', O'5'$ (図-5) の長さを図上測定する。表-1 は各模型の相似流量に相當する 2 つの渦の自由面が夫々鉛直軸を含む面との交線か

表-1. (模型(大): 流出口の径 20mm; 水深 27.9 cm)
 (模型(小): " " 10 " ; " 14.0 ")

模型(大) (mm)	模型(小) (mm)	1/2(模型大) (mm)	誤差	
			(mm)	(%)
01=15.5	0'1'= 8.0	7.75	+0.25	+3.2
02=13.2	0'2'= 6.6	6.60	+0.00	0.0
03=13.1	0'3'= 6.3	6.55	-0.25	-3.8
04=17.6	0'4'= 8.7	8.80	-1.10	-1.4
05=26.8	0'5'=13.0	13.40	-0.40	-3.0

ら上記の方法で測定した結果である。之に依つて大体上述の相似律の正しい事を證明して居る。

6. 自由面の方程式

Vinci⁽¹⁾, Venturi, Boussinesq 等の諸水理学者は図形水平の経路の渦に於ては近似的に其の鉛直軸からの距離 r に速度 v が逆比例して居ると既に述べて居る。

$$vr = c \dots\dots\dots(16)$$

今摩擦を無視し Bernoulli の定理を応用すれば等圧面の方程式は

$$\frac{p-p_0}{\gamma} = h - \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{dp}{dr} = \gamma \frac{dh}{dr} - \frac{\gamma}{g} v \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{\gamma}{g} v \frac{dv}{dr} = - \frac{d(p - \gamma z)}{dr} \dots\dots\dots(17')$$

水平分力は $\frac{\gamma v^2}{gr} = \frac{d(p - \gamma z)}{dr}$ なる遠心力と平衡を保たねばならぬ。(17') 式と上式から

$$v + r \frac{dv}{dr} = \frac{d(vr)}{dr} = 0, \quad v = \frac{v_0 r_0}{r} \dots\dots\dots(16)$$

となり簡単に (16) 式を誘導する事が出来る。而して自由面に於ては $p=p_0$ であるから (17) 式に (16) 式の関係を代入すれば

$$z_0 - z = h = \frac{r^2 - r_0^2}{2g} = \frac{r_0^2 r_0^2}{2g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = \frac{c^2}{2g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

r_0 なる値は一般に大なる故に $\frac{1}{r_0^2}$ を無視すれば

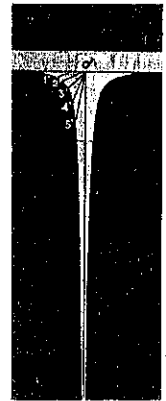
$$h = \frac{c^2}{2g} \frac{1}{r^2} \dots\dots\dots(18)$$

となる。図-6 の曲線は h を縦距に $\frac{1}{r^2}$ を横距に採つて畫いたものである。之を検すれば c は流出口の大きさに

図-4.



図-5.



(1) Ph. Forchheimer: Hydraulik S. 372.

依る。而して流出口の径が大なれば其の径が大なるよりも更に c の値はより大となり又一定の流出口に於ては水深が大なれば大なる程 c の値は小となる。而して自由面の方程式は以上の假定の下に導かれたものであるから自由面の内でも水平部附近のみに適用せられ流出口に近い自由面には最早通用しない。なぜなれば任意の水平面に於て流体は一定且一様な角速度を以つて円運動をして居るのではなく鉛直分速度もあり、螺旋状の運動をして居り、其の誤差の度は流出口に近づくにつれて大となるからである。他方又 r が小となれば ω は増大し流れは渦流 (turbulent flow)

となり相似律も無渦流のものでなく渦流の相似律に就て研究しなくてはならぬ。以上の原理は流体である空気の場合にも適用して差支へないと思ふ。たゞ c なる値は密度その他の関係上一般現象として水の場合より遙かに大である。其の際流出口即ち地上附近に於ては r が小となり ω は増大し強烈なる旋風を起し中心には所謂風眼の無風快晴地帯を出現するのである。

図-6. 自由面のメリデアン

