論説報告

第23巻第7號 昭和12年7月

交番応力を受くる部材の断面積決定法に就て

會員 工学博士 田 中 豐*

On the Required Sectional Area of a Bridge-Member Subjected to the Alternating Stresses

By Yutaka Tanaka, Dr. Eng., Member.

要旨

現在, 日米系の橋梁示方書に採用せられて居る, 抗交番力軟鋼部材の断面積決定法, $A \geq \frac{S_{max}}{\sigma_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{S_{min}}{S_{max}}\right)$ を Weyrauch 式及 γ 法より検討し, 其の妥當性に就て, 著者の所見を述べ, 之に對する認識を新たならしめんとするものである。

I. Weyrauch 式の検討

交番応力を受くる構造用軟鋼の耐久限度 (Dauerfestigkeit) σ_D を下式に依りて示し,

$$\sigma_D=\sigma_u\left(1+\frac{\sigma_u-\sigma_w}{\sigma_u}\cdot\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}\right) \qquad (1)$$

$\sigma_u=\frac{2}{3}\sigma_\beta,\ \frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{1}{2}$ と置けば

$$\sigma_D=\frac{2}{3}\sigma_\beta\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}\right) \qquad (2)$$

となる。之を一般に耐久限度を示す Weyrauch 式と稱して居る。

上式中 σ_β: 材料の極强応力度, σ_u: σ_{min} が 0 なる場合の耐久限度 (Ursprungsfestigkeit),
σ_w: σ_{max} が $-\sigma_{min}$ に等しき場合の耐久限度 (Schwingungsfestigkeit),
σ_{min}: 絶對値の小なる応力度, σ_{max}: 絶對値の大なる応力度。

然るに, σ_D は σ_{max} と同大なるべきを以て, $\sigma_D=\sigma_{max}$ と置けば, (2) 式に依り

$$\sigma^2_{max}-\frac{2}{3}\sigma_\beta\ \sigma_{max}-\frac{1}{3}\sigma_\beta\ \sigma_{min}=0 \qquad (3)$$

即ち σ_{max} は σ_{min} に對して拋物線狀の變化をなし, 其の大さは, 次の如くである。

但し $\sigma_{min}=0$ なるとき $\sigma_{max}=\frac{2}{3}\sigma_\beta$ なるべきであるから

$$\sigma_{max}=\frac{1}{3}\sigma_\beta+\sqrt{\frac{1}{9}\sigma_\beta^2+\frac{1}{3}\sigma_\beta\ \sigma_{min}} \qquad (4)$$

或は

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_\beta}=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1+3\frac{\sigma_{min}}{\sigma_\beta}}\right) \qquad (5)$$

次に, (3) 式を σ_{max} に就て微分すれば

$$2\sigma_{max}-\frac{2}{3}\sigma_\beta-\frac{1}{3}\sigma_\beta\frac{d\sigma_{min}}{d\sigma_{max}}=0 \qquad (6)$$

* 東京帝國大学教授

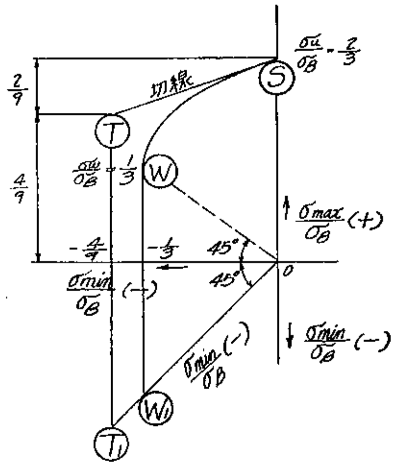
即ち

$$\frac{d\sigma_{\min}}{d\sigma_{\max}}=\frac{6}{\sigma_\beta}\left(\sigma_{\max}-\frac{1}{3}\sigma_\beta\right)=6\left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_\beta}-\frac{1}{3}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

であるから，$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_\beta}=\frac{1}{3}$ に於て $\frac{d\sigma_{\min}}{d\sigma_{\max}}=0$ なること，及 $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_\beta}=\frac{2}{3}$ なるとき $\frac{d\sigma_{\min}}{d\sigma_{\max}}=2$ なることを知る。

これ等の關係を知りて，Weyrauch 式 (2) は 図-1 に於ける SWW$_1$O を以て示すことが出來る。此の場合，$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_\beta}$ を示す抛物線 WS の頂點が W 點に在ることは注目に値する一事項であつて，全交番応力 ($\sigma_{\max}=-\sigma_{\min}$) 附近に於ける，$\sigma_{\max}$ の變化が特に顯著であることを示して居る。又，全交番応力の場合の耐久限度 (σ_w) は $\frac{1}{3}\sigma_\beta$ であつて，$\sigma_{\min}=0$ なる場合の耐久限度 (σ_u) は $\frac{2}{3}\sigma_\beta$ であるから，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{1}{2}$ となる。此の比値に就ては，本文 III 節に述ぶる如く，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{2}{3}$ とする方がよいのではないかと考へられる。

図-1.



附記　後節の所論に依り，$\sigma_u=\frac{2}{3}\sigma_\beta$，$\sigma_w=\frac{4}{9}\sigma_\beta$ として Weyrauch 式の修正式を求むれば次式が得られる。

$$\sigma_D=\frac{2}{3}\sigma_\beta\left(1+\frac{1}{3}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)$$

此の問題に關聯して，M. Ros[1] が同氏の實驗に基づき，熔接接手の許容応力として，Weyrauch 型の公式を採用し，$\frac{S_{\min}}{S_{\max}}$ の系數を場合によりて 0.3 及 0.4 として居る事實は參考に値するものと考へられる。

II. γ 法に就て

1933 年 O. Kommerell は Bautechnik 誌上に，所謂 γ 法に關する解說を發表し，獨逸の國有鉄道に於ては，1934 年以來此の方法を採用し，之に依つて，交番応力を受くる橋梁部材の断面積を決定すべきことを規定して居る。(B. E. 1934, 1936 參照) 而して，現在，獨逸の採用して居る γ 法は次の如きものである。

$$A \geq \frac{S_{\max}}{\sigma_0}\gamma \quad \cdots\cdots(8)$$

但し，A: 所要断面積，$S_{\max}$: 絕對値の大なる方の応力，σ_0: $S_{\max}$ が普通応力なる場合の許容応力度，であつて

γ は St. 37 に對して $\gamma=1-0.3\frac{S_{\min}}{S_{\max}}$ として居る。

(本文の所論は，交番応力を受くる場合に限定する，從て $\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\leq 0$ であり，S の絕對値を採れば $\gamma=1+0.3\left|\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right|$ となる。)

前記 Kommerell の解說に依れば

$$\gamma=\frac{\sigma_s}{\sigma_u}+\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_u}-\frac{\sigma_s}{\sigma_w}\right)\frac{S_{\min}}{S_{\max}} \quad \cdots\cdots(9)$$

但し σ_s: 降伏點応力度

であつて，St. 37 に對し $\sigma_s=2\,400\ \mathrm{kg/cm^2}$，$\sigma_u=2\,400\ \mathrm{kg/cm^2}$，$\sigma_w=1\,800\ \mathrm{kg/cm^2}$ とし，之に依つて

1) Prel. Publication, II Congress, I.A.B.S.E., 1936.

$$\gamma=1-\frac{1}{3}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\cong 1-0.3\frac{S_{\min}}{S_{\max}} \quad \cdots\cdots(10)$$

を採用したのである。

(9) 式は γ に對する一般式として與へられたものであるが，元來 γ 法に於ては (8), (9) 式によりて明かなる如く，一般に

$$A\sigma_0=S_{\max}\left(a+b\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)$$

卽ち

$$A\sigma_0=aS_{\max}+bS_{\min}$$

或は

$$\sigma_0=a\sigma_{\max}+b\sigma_{\min} \quad \cdots\cdots(11)$$

但し $\sigma_0, a, b=$定數

卽ち $\sigma_{\max}$ は $\sigma_{\min}$ の直線式にて示し得ることを前提として居るのであるから，此の點に於て Weyrauch 式と，著るしく趣を異にして居る。此の意味に於て，現在，日米系の橋梁示方書が採用して居る

$$A\geqq\frac{S_{\max}}{\sigma_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right) \quad \cdots\cdots(12)$$

の方式も亦，所謂 γ 法の一形式と謂ふことが出來る。

而して，問題を交番應力の場合に限定するときは，**圖-2** によりて，

$$\sigma_u=a\sigma_{\max}+b\sigma_{\min} \quad \cdots\cdots(13)$$

但し $a, b=$定數

と置き，$\sigma_{\min}=0$ なるとき $\sigma_{\max}=\sigma_u$ 故に $a=1$, 又 $\sigma_{\max}=\sigma_w$ なるとき $\sigma_{\min}=-\sigma_w$ なるべきに依り

$$b=\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1$$

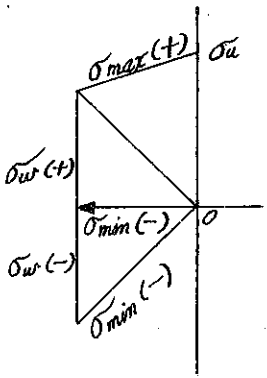
故に

$$\sigma_u=\sigma_{\max}+\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1\right)\sigma_{\min}$$

卽ち

$$\sigma_u=\sigma_{\max}\left\{1+\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1\right)\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

圖-2.



故に普通應力 $S_{\max}$ に對する許容應力度を σ_0 とし，$\sigma_0=\frac{\sigma_u}{\psi}$，但し ψ：安全率とすれば

$$\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=\frac{S_{\min}}{S_{\max}}$$ なるべきにより部材の所要斷面積 A は

$$A\geqq\frac{S_{\max}}{\sigma_0}\left\{1+\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1\right)\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

なるべく，從て γ は σ_s に無關係に

$$\gamma=1+\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1\right)\frac{S_{\min}}{S_{\max}} \quad \cdots\cdots(16)$$

と置くことが出來る。卽ち

上式に依りて明かなる如く，$\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1=\frac{1}{3}$ (獨逸) なる爲には $\frac{\sigma_u}{\sigma_w}=\frac{4}{3}=1.33$，$\frac{\sigma_u}{\sigma_w}-1=\frac{1}{2}$ (日，米) なる爲には $\frac{\sigma_u}{\sigma_w}=\frac{3}{2}=1.5$ たるを要するのである。

玆に於て，本文の問題は，懸つて，次の 2 問題に歸着する。卽ち (1) γ 法に於ける如く耐久限度 (σ_D 或は σ_{max}) を σ_{min} の直線式となすことの可否。(2) σ_u と σ_w の比を如何に撰ぶべきか。然も前節に述べたる如く，Weyrauch 式の形式は，之を實驗式なりとするも，猶之に多少の修正を必要とすべく，特に $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ の比値に就ては，更に研究考慮を要すべき點が少なくないのである。

III. $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ の比値並に σ_u 及 σ_w の値

前節に於て述べたる如く，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ の比値，卽ち全交番の場合の耐久限度 (σ_w) と最小応力度を零とする場合の耐久限度 (σ_u) との比値を知ることは，γ 法によると否とを問はず，疲勞公式の設定上重要な問題である。

此の問題に聯關して，耐久限度を σ_{min} に對して，Weyrauch 式に於ける如く，曲線を以て示すべきか，γ 法に於ける如く直線を以て示すべきかも亦，先決を要すべき問題である。

而して，本文の目的とする所は，主として，交番応力を受くる橋梁部材の强弱に就て論ぜんとするものであつて，所謂耐久限度としても，無限回數の繰返応力に就て，考ふる必要はないのであつて，繰返回數も 10^6 程度と考へれば實用的に充分である。從て，耐久限度としては，最近獨逸で稱して居る所謂 Zeitfestigkeit の意味と解釋して差支ないのである。

尙又，軟鋼の疲勞問題に就ても，今日未だ信賴し得べき充分な資料がないので，これ等の問題に對して明確なる結論を與ふることは困難である。然し乍ら最近約 10 年間に發表せられて居る資料を通覽して次の如き暫定的提言をなし得るものと考へられる。

卽ち，(1)，交番応力を受くる場合の σ_{max} は σ_{min} の變化に對して，幾分曲線的變化をなすものゝ樣であるが，一次的近似法としては之を $\sigma_{min}=0$ に對する限度と $\sigma_{min}=-\sigma_{max}$ なる限度とを連結せる直線を以て示すことが出來る。此の近似法による誤差は，一般に安全側に在る。(2)，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ の比としては $\frac{2}{3}$ を採るを適當と認める。(3)，σ_u 卽ち $\sigma_{min}=0$ なる場合の限度は極强 (普通の試驗片强さ) の $\frac{2}{3}$，σ_w 卽ち $\sigma_{min}=-\sigma_{max}$ なる場合の限度は $\frac{2}{3}\sigma_u$ 卽ち極强の $\frac{4}{9}$ を適當と認める。

上記の中 (1) は，前述の γ 法の手法とも考ふることも出來るのであるが，此の形式の代表的図式として，所謂 Goodman の動强理論 (dynamic theory)[1] がある。

Goodman の図式は，今日尙，一の代表的図式として，其の重きをなして居るものであつて，其の特徴とする所は，$\sigma_w=\frac{1}{3}\sigma_\beta$, $\sigma_u=\frac{1}{2}\sigma_\beta$, $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{2}{3}$ であつて，σ_u は σ_w と σ_β とを連結する直線上に在り，其の他の σ_{max} も亦 σ_{min} に對して，直線的に變化することを示して居る。從て Goodman 図式は，γ 法の先驅をなしたものと稱することが出來るのみならず，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{2}{3}$ となせることも亦，著者の敬服する所であるが，$\sigma_w=\frac{1}{3}\sigma_\beta$, $\sigma_u=\frac{1}{2}\sigma_\beta$ の値は，本文の所論に於て，直ちに採用し能はざる所である。

σ_u の値に就ては最近接手せる F. C. Lea 教授の試驗報告[2]を參照するも，$\sigma_u=0.7\sim0.8\ \sigma_\beta$ 位である。此の報告は，Haigh の試驗機を使用して行はれたる直力繰返応力に對する試驗報告であつて，最近の文獻として，注目に値すべき一資料である。此の結果を參照するも $\sigma_u=\frac{2}{3}\sigma_\beta$ とすることは，差支ないと考へられるのみならず，$\frac{2}{3}\sigma_\beta$ とするも尙過小の感があるのであるが，實用材料には所謂過度応力 (over stress) を受けた材料を使用する場合も

1) J. Goodman—Mechanics applied to engineering, 1899.

2) Journal of the Institution of Civil Engineers, Nov. 1936.

少なくないのであるから，軟鋼の場合に對しては其の降伏點と約同等の応力度 $\frac{2}{3}\sigma_\beta$ を以て σ_u とするを適當と考へる。

次に $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ の比値を $\frac{2}{3}$ とするを適當と認めた理由は，Illinois 大學の試驗報告[1]，Ros の試驗報告[2] 等を參照して，特に Illinois 大學の試驗報告の結論的提言を採用したものである。此の比を一定とすれば $\sigma_w=\frac{2}{3}\sigma_u$ によりて容易に σ_w を知ることが出來るのであるが，茲に，獨逸，國有鐵道が St. 37 に對して，前述の如く $\sigma_u=2\,400$ kg/cm²，$\sigma_w=1\,800$ kg/cm² を採用せる事實に對して一應の檢討を試むる必要がある。

此の場合 $\sigma_u=0.65\,\sigma_\beta$，$\sigma_w=0.49\,\sigma_\beta$，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{3}{4}$ であつて $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{3}{4}$ は $\frac{2}{3}$ と相當の懸隔がある。之等に對して，提案の眞相は之を知る能はざるも，本文の著者の意見としては，σ_w の値の決定に當りて，σ_w と σ_u との關聯性に就て考慮を缺いて居るものではないかと考へる。即ち $\sigma_w\cong\frac{1}{2}\sigma_\beta$ なる値を採用する爲には $\sigma_u\cong\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sigma_\beta=\frac{3}{4}\sigma_\beta$ 即ち試驗片の實 σ_u を採用すべきではないかと考へる。即ち獨逸の採用せる σ_w は試驗片の實 σ_w であつて，σ_u は實 σ_w より小なる σ_s を採用せる爲に此の様な結果となつたものと考へられる。

之の種の提案は，固より，其の提案者の意見によりて如何様になさるとも差支ないのであるが，以上の如き檢討によつて，少くとも，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{2}{3}$ なる比値に對する抗議とはならないことを注意して置き度いのである。

IV. 結　　語

前 3 節の事由に依り，本文の著者は交番応力を受くる橋梁部材の断面積決定法として，次式を一の暫定的實用公式として適切なるものなりと思惟する次第である。

$$A\geq\frac{S_{\max}}{\frac{\sigma_u}{\psi}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)\cdots\cdots(17)$$

但し ψ: 安全率

此の場合，$\frac{\sigma_u}{\psi}=\sigma_0$，但し σ_0: 普通の応力に對する許容応力度とすれば

$$A\geq\frac{S_{\max}}{\sigma_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)\cdots\cdots(18)$$

を得べく，本式は即ち構造用軟鋼に對して，現在吾々が橋梁の設計示方書中に採用して居る基本式に他ならないのである。

---

1) University of Illinois Bulletins, No. 136, 1923 & No. 142, 1924.
2) Prel. Publication, II Congress, I.A.B.S.E., 1936.