

## 彙 報

第 23 卷 第 1 號 昭和 12 年 1 月

## レムニスケート曲線表

會員 工学博士 久野重一郎\*

## I. 全緩和屈曲

鉄道路線の屈曲部は、一般に、次の 2 部から作られてゐる。

## 1. 円曲線 2. 緩和曲線

最近では、自動車高速化のために、道路屈曲部でも、緩和曲線の必要が痛感せられるやうになつて來た。緩和曲線は、半径無限大の點に始まり、曲率半径が徐々に減じて、遂に有限一定の半径に於て、円曲線と滑かに接続するやうに作られる。これは、屈曲部高速走行の際、車体のうける遠心力が半径に反比例するものであるため、曲率半径を緩慢に変化させて、遠心力の急激に作用すること（ショック）を防ぐのが目的である。

以上は、在來、一般に行はれてゐる方法であるが、新しい傾向として、「円曲線を用ひない屈曲」の優秀性が、注目されるやうになつて來た<sup>(1)</sup>。それは、まづ半径  $\infty$  に始まり、曲率半径が徐々に減つて  $R$  に達し、次は、直に半径を徐々に増して、再び  $\infty$  に至り、直線部へ接続するといふ方法をとるのである。この際、前半と後半は、全く同じ曲線を使ひ（中點に對し裏返すわけで）、然かも、接続を円滑にするため、中點に於て前半と後半が同一切線をもつやうに作るわけである。即ち「オール緩和屈曲」とでも稱すべきものになる。

円曲線あるとき	$\infty$ —(漸減)— $R$ —(一定)— $R$ —(漸増)— $\infty$
オール緩和屈曲	$\infty$ —(漸減)— $R$ —————(漸増)— $\infty$

屈曲部全体を逆覽すると、オール緩和屈曲の方が、半径の変化は緩慢になる。従て、遠心力によるショックが減少する。交通事故防止の上からいつて、オール緩和屈曲の方が願はしいことである。オール緩和屈曲は、完全な曲線表さへできてゐれば、實行上、別に不便ないわけである。円曲線併用のときでも、曲線表を使つてゐるのであるから、その表を取替へれば足りることである。問題は、一に數表の出現にかゝつてゐる。

オール緩和屈曲の目的に對し、3 次拋物線は一般にいふて不適當である。それは、ラセン角  $24^{\circ}6'$  の點までは、曲率半径が漸減して呉れるけれども、それから先きは、だんだん増して、遂に  $\infty$  になるからである。円曲線併用の場合の緩和曲線は、ラセン角  $24^{\circ}$  以上にはめつたにならないけれども、オール緩和屈曲で、殊に道路の場合には、 $24^{\circ}$  の制限は痛い。オール緩和屈曲の目的に適ふ曲線は、次の二つを出ないであらう。

1. lemniscate 曲率半径が原點からの弦長に反比例して變る曲線。ラセン角  $135^{\circ}$  (交角  $270^{\circ}$ ) まで使用可能。
2. clothoid 曲率半径が原點からの曲線長に反比例して變る曲線。ラセン角の制限なし。

理論的にいへば、クロトイドの方が、優れてゐる。しかしクロトイドの完全な曲線表を作ることとは、かなり困難である。次にレムニスケートが緩和曲線として優れてゐることは、ずつと前から知られてゐた。その實用化に對

\* 九州帝國大学助教授

<sup>(1)</sup> Annales des Travaux Publics de Belgique, Tome 34, 1933, p. 676.

Neumann, Der neuzeitliche Strassenbau, 1932, S. 50.

Dawson, Elements of Curve Design, 1932, p. 124.

し、大きい障害は、曲線長が初等函数で表はせない点にあつた。無限級数で示すことを考へた人もあるが<sup>(2)</sup>、それは、原点の極く近傍だけでいへることだ。

## II. レムニスケート曲線表

全緩和屈曲をレムニスケートで行ふ場合の數表として、筆者は表-1 を作製した。

### 記號の説明

曲線中點 M. B. C. (始點) から E. C. (終點) までの長さの中點。M の前半と後半は、全く同じ曲線で、一方を裏返しにして作る。

$R_m$  中點に於ける曲率半径。表-1 では  $R_m=100$  にとつてある。100 といふのは 100 m でもよし、100 ft でもよい。

$I$  交角。兩切線の交點に於ける外角。

$T$  切線長。切線交點と B. C. (或は E. C.) の距離。

$\theta_m, \rho_m$  中點極座標。B. C. (或は E. C.) へトランシットをおき、切線から  $\theta_m$  だけふれた方向に於て、長さ  $\rho_m$  をとれば、その端が曲線中點 M になる。 $\theta_m$  は偏角、 $\rho_m$  は弦長。

$x, y$  中點直角座標。B. C. (或は E. C.) から、切線にそふて  $x$  だけ進み、次に切線から直角に  $y$  だけとると、その端が、曲線中點 M になる。

$L_m$  中點までの曲線長。B. C. (或は E. C.) から中點 M へ至る曲線の長さ。屈曲部全体の長さは  $2L_m$  になる。

$a$  軸長。レムニスケートの全ループを考へたとき、その最長弦の長さ(偏角  $45^\circ$  に對する  $p$  である)。軸長は、レムニスケートの大きさを示す數値であつて、例へば円の直径といったやうなものに當る。

$\phi_m$  中點のラセン角。曲線中點 M に於て、曲線へ切線を引くとき、それが  $x$  軸の正方向となす角。

### 表の使ひ方

計算例。交角  $60^\circ$ 、最小半径 120 m が指定された場合をとらう。表-1 の値は  $R_m=100$  に對するものだから、指定の 120 m に對するものは、長さに關するすべての表値へ、

$$120 \div 100 = 1.2$$

を掛ける。その結果を示すと、表-2 のやうである。

これで、曲線始點、曲線中點、曲線長、軸長などが知れることになる。屈曲部全長は 249.286 m になる。

切線長  $T$  の値は、交角  $135^\circ$  までしか記してない。交角が大きくなると、切線長が急に増すため、計算しなかつた。交角  $135^\circ$  以上に對しては、次のやうな方法で、B. C. (或は E. C.) を求めて頂きたい。

1. 図上で、切線の内側へ、 $y$  だけ離れて平行線を引く、これを兩切線について行ふと、平行線の交點ができる。それが曲線中點 M。

2. M から切線へ向つて垂線を下し、その垂線の足から(切線交點とは反對の方向へ)、切線上  $x$  だけ離れて B. C. (或は E. C.) を印する。

表-2. 半径の違いに伴ふ計算

	表の値	1.2 倍した値
$T$	111.834	133.601 m
$\theta_m$	$10^\circ$	$10^\circ$ (不変)
$\rho_m$	102.696	123.127 m
$x$	101.047	121.256 m
$y$	17.817	21.380 m
$L_m$	103.869	124.643 m
$a$	175.447	210.536 m

<sup>(2)</sup> Annales des Ponts et Chaussées, 1932, p. 312. (Bize) その他。

3. B. C. と M を結ぶ直線の偏角は  $\theta_m$ , 長さは  $\rho_m$  に等しい筈。

#### 表の作り方

表-1 は, [表-1 の 5] の末尾に記した数式にもとづいて計算した。  $\rho_m, \alpha, \psi, T$  等は, チャンバース 7 桁表を使つたため, 有効数字 6 桁しか正しく出なかつた。曲線長の式を, レム = スケートの方程式から出すと,

$$L_m = a \int_0^{\theta_m} (\sin 2\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

になる。このまゝでは, どうにもならぬので, パラメータ  $\psi$  を, 次式で挿入した。

$$\cos 2\psi = 2 \sin 2\theta_m - 1$$

すると, 曲線長は, 次のやうに書かれる。

$$L_m = \frac{1}{\sqrt{2}} a \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-0.5 \sin^2 \psi}} - \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-0.5 \sin^2 \psi}} \right\},$$

或は 
$$L_m = \frac{1}{\sqrt{2}} a \left\{ K(45^\circ) - F(45^\circ, \psi) \right\}$$

$K$  は, 楕円函数週期定数の一つで modulus  $45^\circ$  のときの値である。

$$K(45^\circ) = 1.8540746773$$

$F$  は, 第 1 種楕円積分で, これも modulus  $45^\circ$  のものである。 $L_m$  の計算を筆者は, 次のやうにしてやつた。

- (1) Legendre の楕円積分表から,  $\psi$  を argument とする  $L_m$  を計算。10 桁。
- (2) argument を  $\psi$  から  $\theta$  へ変換。但し  $\theta$  は  $1^\circ$  おき。
- (3)  $10'$  おきの  $\theta$  に對する  $L_m$  を算出。小数第 10 位を 4 捨 5 入して, 9 桁表とす。
- (4) 小数 5 位までをとり, 表-1 へ記載。

### III. 中間點の座標

#### 中間點偏角の選び方

$$(1) \quad n = \frac{L_m}{20}$$

端数を切捨て、整数  $n$  を決める。分母の 20 は, 中間點に對する相隣る弦長の差が, 「大体 20 m になること」を目標にして選んだ 20 である。但し, (3) 項のやうな取扱ひをするため, 20 m より小さくなる。

$$(2) \quad \theta_1 \leq \frac{\theta_m}{n^2}$$

これを満足する  $\theta_1$  を計算。

- (3) 表-1 を利用するためには,  $\theta_1$  は, (上式を満たす範圍の最大値で, しかも)  $10'$  の倍數にとる。
- (4)  $\theta_1$  が決つたら, 第 2 點以降の偏角を, 次のやうに選ぶ。

第 2 點 $\theta_2 = 4\theta_1$	第 $n$ 點 $\theta_n = n^2\theta_1$
第 3 點 $\theta_3 = 9\theta_1$	第 $n+1$ 點 $\theta_{n+1} = (n+1)^2\theta_1$
第 4 點 $\theta_4 = 16\theta_1$	.. .. .
.. .. .	.. .. .

中點偏角  $\theta_m$  を超えるやうになつたらやめる。

計算例.  $I = 60^\circ$ ,  $R_m = 120$  m の場合には,  $\theta_m = 10^\circ$ ,  $L_m = 124.643$  m である。

- (1)  $n = 124.643 \div 20 = 6$  (端数切捨)

(2)  $\theta_1: 10^\circ + 6' = 17'$

(3) 表-1 を利用するには、「この 17' を超えぬ範囲で、10' の倍数にとること」が必要、だから、結局 10' といふことになる。

(4)  $\theta_1 = 10'$  として、次の諸偏角を計算

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 10' \times 4 = 40' & \theta_6 &= 10' \times 36 = 6^\circ 0' \\ \theta_3 &= 10' \times 9 = 1^\circ 30' & \theta_7 &= 10' \times 49 = 8^\circ 10' \\ \theta_4 &= 10' \times 16 = 2^\circ 40' & \theta_8 &= 10' \times 64 = 10^\circ 40' \\ \theta_5 &= 10' \times 25 = 4^\circ 10' & & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

中點偏角  $\theta_m$  は  $10^\circ$  であるから、 $\theta_8$  は捨てる。そして、B. C. から中點までの間へ、7 個の點を挿入するわけである。

**中間點弦長の計算**

偏角  $\theta$  なる中間點の弦長は、

$$\rho = a (\sin 2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

右邊の軸長  $a$  は、表-1 に示してあるし、 $(\sin 2\theta)^{\frac{1}{2}}$  も、表-1 の最右行に記した。前の計算例では、 $a = 210.536\text{m}$  であるから、前項で得た各偏角を用ひて、中間點弦長を求めると、表-3 のやうである。

表-3. 中間點の弦長

中間點	偏角 $\theta$	$\sqrt{\sin 2\theta}$	弦長 $\rho$	點差 $\Delta$
1	0° 10'	0.076274	16.058	16.058
2	0 40	0.152542	32.116	16.049
3	1 30	0.228771	48.165	16.023
4	2 40	0.304877	64.188	15.983
5	4 10	0.380699	80.151	15.848
6	6 0	0.455973	95.990	15.651
7	8 10	0.530307	111.649	—
中點	10 0	0.584825	124.643	—

トランシットを B. C. (或は E. C.) へおき、各點の  $\theta$  と  $\rho$  とを用ひて、夫々の點を布設して行くわけである。偏角を  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, \dots$  にとつたため、弦長は大体等差級数になつた。

**枝距法**

切線上へ  $x$ 、それから直角に枝距  $y$  を出して中間點を布設する場合には、在來の方法と同様、 $x, y$  を計算して行ふことになる。

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \cos \theta_1, & y_1 &= \rho_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= \rho_2 \cos \theta_2, & y_2 &= \rho_2 \sin \theta_2 \\ x_3 &= \rho_3 \cos \theta_3, & y_3 &= \rho_3 \sin \theta_3 \\ \dots & \dots \dots & \dots & \dots \dots \end{aligned}$$

**IV. 在來のレムニスケート數表**

(1) Lamoen の表 (Annales des Travaux Publics de Belgique, 1933, p. 680).

$R_m = 1$  にとつて、小數位 6 桁まで曲線長を出してゐる。この表の一部を抽出して、表-4 に示した。第 2 階差のひどく不規則であることが目につくのである。即ち、この表は、計算法の不備にもとづく誤差があつて、數表

としては、價值低いものといはねばならぬ。

(2) Dawson の表 (Elements of Curve Design, 1932, Table 7).

無限級數で計算したため、 $\theta$  が大きくなるほど、曲線長の誤差が増してゐる。桁數も十分といへない。表-5 にその一部を示した。

(3) 無限級數を示して、曲線長の計算が可能であるやうに記したものは、かなりあるやうだけれども、いづれも、原點附近だけでいへることである。本來、楕圓積分でしか表し得ないものである以上、さう簡単な式にはならぬ筈である。

## V. 結 言

本表は、實用表としては、遺憾ながら、次の不備を認めないわけには行かない。

1. 交角數値のとり方が粗い。
2. 長さに關する數値の桁數が、もう 1 桁多くあつてよい。(ρ,  $\theta$ ,  $y$  を 7 桁正確に出すためには、チャンバース程度の數表では役に立たないのである。)

將來、もし機會があれば、この不備を除きたい考へである。表の構成法についても、大方の御示教を望む次第である。

全緩和屈曲の方法を採用する場合、カントをどうするかの問題を生ずる。これは、稻田博士の御話によると、なんとか解決の途があり得るといふことであつた。だから、カントの問題は、全緩和屈曲の採用に、大きい障害とは、ならぬであらう。

鐵道の緩和曲線に關し、種々教へて頂いたことにつき、茲に稻田博士に對し、深く謝意を表する次第である。

## 備 考

本文の主体は、表-1 にあるのであります。そのうちでも、曲線長を出すのに、最も苦勞したのであります。しかし、實用表としては、十分といへない点があらうと思ひます。それで、將來、もつと完全なものに致したい希望をもつてゐるのであります。それにつきまして、讀者諸賢から、次の点に關し、率直な教に接したいと考へます。

1. レムニスケート屈曲に對し、本質的な障害がありませうか。
2. 曲線表に記す項目として、表-1 にある 10 欄のほか、なにか大切な要素が抜けてはゐないでせうか。
3. 項目の配列順序につき、変更を加へる必要は、ないでせうか。
4. 曲線長や座標の數値は、有效數字幾桁あれば、理想的でせうか (曲線長は、私の手許では、有效數字 9 桁まで正しく計算してあります)。

表-1 の 1 ( $R_m=100, \phi_m=3\theta_m$ )

交角 $I$	切線長 $T$	中点極座標		中点直角座標		曲線長 $L_m$	軸長 $a$	中間点用	
		$\theta_m$	$\rho_m$	$x$	$y$			$\theta$	$\sqrt{\sin 2\theta}$
0°	0	0° 0'	0	0	0	0	0	0° 0'	0
1	1.745	0 10	1.745	1.745	0.005	1.745	22.883	0 10	0.076274
2	3.491	0 20	3.491	3.491	0.020	3.491	32.360	0 20	0.107867
3	5.237	0 30	5.236	5.236	0.046	5.236	39.632	0 30	0.132107
4	6.983	0 40	6.981	6.980	0.081	6.981	45.762	0 40	0.152542
5	8.728	0 50	8.725	8.724	0.127	8.726	51.162	0 50	0.170542
6	10.478	1 0	10.470	10.468	0.183	10.471	56.044	1 0	0.186814
7	12.227	1 10	12.214	12.211	0.249	12.216	60.532	1 10	0.201772
8	13.977	1 20	13.958	13.954	0.325	13.961	64.709	1 20	0.215697
9	15.728	1 30	15.701	15.695	0.411	15.705	68.631	1 30	0.228771
10	17.480	1 40	17.443	17.436	0.507	17.449	72.340	1 40	0.241132
11	19.235	1 50	19.185	19.176	0.614	19.193	75.866	1 50	0.252887
12	20.989	2 0	20.927	20.914	0.709	20.937	79.234	2 0	0.264115
13	22.740	2 10	22.668	22.651	0.857	22.681	82.464	2 10	0.274880
14	24.509	2 20	24.408	24.387	0.994	24.434	85.570	2 20	0.285234
15	26.272	2 30	26.147	26.122	1.141	26.167	88.566	2 30	0.295222
16	28.037	2 40	27.885	27.855	1.297	27.909	91.463	2 40	0.304877
17	29.805	2 50	29.622	29.586	1.464	29.651	94.269	2 50	0.314231
18	31.576	3 0	31.359	31.316	1.641	31.393	96.993	3 0	0.323309
19	33.349	3 10	33.094	33.043	1.828	33.134	99.640	3 10	0.332133
20	35.126	3 20	34.828	34.769	2.025	34.875	102.217	3 20	0.340724
21	36.903	3 30	36.558	36.490	2.232	36.615	104.729	3 30	0.349096
22	38.687	3 40	38.289	38.211	2.449	38.355	107.181	3 40	0.357270
23	40.478	3 50	40.023	39.933	2.676	40.095	109.576	3 50	0.365253
24	42.269	4 0	41.752	41.650	2.912	41.833	111.918	4 0	0.373059
25	44.065	4 10	43.480	43.365	3.159	43.572	114.210	4 10	0.380699
26	45.865	4 20	45.206	45.076	3.416	45.309	116.455	4 20	0.388183
27	47.670	4 30	46.930	46.786	3.682	47.046	118.655	4 30	0.395518
28	49.479	4 40	48.653	48.492	3.958	48.783	120.814	4 40	0.402713
29	51.293	4 50	50.375	50.196	4.244	50.518	122.933	4 50	0.409775
30	53.158	5 0	52.094	51.896	4.540	52.254	125.013	5 0	0.416711
31	54.938	5 10	53.812	53.594	4.846	53.988	127.058	5 10	0.423526
32	56.768	5 20	55.528	55.288	5.161	55.721	129.068	5 20	0.430227
33	58.604	5 30	57.243	56.979	5.486	57.454	131.045	5 30	0.436817
34	60.447	5 40	58.955	58.667	5.821	59.186	132.991	5 40	0.443302
35	62.295	5 50	60.665	60.351	6.166	60.918	134.906	5 50	0.449686
36	64.150	6 0	62.374	62.032	6.520	62.648	136.792	6 0	0.455973
37	66.012	6 10	64.080	63.709	6.883	64.378	138.650	6 10	0.462167
38	67.881	6 20	65.784	65.382	7.257	66.106	140.482	6 20	0.468272
39	69.758	6 30	67.485	67.052	7.640	67.834	142.287	6 30	0.474290
40	71.640	6 40	69.185	68.717	8.032	69.561	144.067	6 40	0.480225
41	73.743	6 50	71.182	70.676	8.469	71.287	145.823	6 50	0.486077
42	75.431	7 0	72.577	72.036	8.844	73.012	147.557	7 0	0.491856
43	77.339	7 10	74.269	73.689	9.265	74.736	149.267	7 10	0.497557
44	79.254	7 20	75.959	75.337	9.695	76.459	150.956	7 20	0.503185
45	81.179	7 30	77.646	76.981	10.135	87.181	152.623	7 30	0.508743

表-1 の 2 ( $R_m=100, \phi_m=3\rho_m$ )

交角 $I$	切線長 $T$	中点極座標		中点直交座標		曲線長 $L_m$	軸長 $a$	中間点用	
		$\theta_m$	$\rho_m$	$x$	$y$			$\theta$	$\sqrt{\sin 2\theta}$
45	81.179	7° 30'	.77.646	76.981	10.135	78.181	152.623	7° 30'	0.508743
46	83.113	7 40	79.330	78.621	10.583	79.902	154.269	7 40	0.514232
47	85.057	7 50	81.012	80.256	11.041	81.622	155.896	7 50	0.519654
48	87.010	8 0	82.691	81.886	11.508	83.340	157.504	8 0	0.525012
49	88.974	8 10	84.368	83.512	11.985	85.058	159.092	8 10	0.530307
50	90.948	8 20	86.041	85.133	12.470	86.774	160.662	8 20	0.535540
51	92.932	8 30	87.712	86.748	12.966	88.489	162.214	8 30	0.540714
52	94.927	8 40	89.379	88.358	13.468	90.203	163.749	8 40	0.545830
53	96.935	8 50	91.044	89.964	13.981	91.916	165.267	8 50	0.550889
54	98.963	9 0	92.705	91.564	14.521	93.628	166.768	9 0	0.555893
55	100.984	9 10	94.363	93.158	15.033	95.338	168.253	9 10	0.560843
56	103.027	9 20	96.019	94.747	15.572	97.047	169.722	9 20	0.565740
57	105.084	9 30	97.670	96.331	16.120	98.754	171.176	9 30	0.570586
58	107.153	9 40	99.319	97.909	16.677	100.461	172.614	9 40	0.575381
59	109.237	9 50	100.964	99.481	17.243	102.166	174.038	9 50	0.580127
60	111.334	10 0	102.606	101.047	17.817	103.869	175.447	10 0	0.584825
61	113.447	10 10	104.244	102.608	18.400	105.571	176.843	10 10	0.589475
62	115.574	10 20	105.879	104.162	18.992	107.272	178.224	10 20	0.594080
63	117.715	10 30	107.510	105.709	19.592	108.971	179.592	10 30	0.598638
64	119.875	10 40	109.138	107.252	20.201	110.669	180.946	10 40	0.603153
65	122.050	10 50	110.762	108.788	20.818	112.365	182.287	10 50	0.607623
66	124.243	11 0	112.382	110.317	21.443	114.059	183.615	11 0	0.612051
67	126.452	11 10	113.998	111.840	22.077	115.753	184.931	11 10	0.616437
68	128.681	11 20	115.611	113.357	22.719	117.444	186.235	11 20	0.620782
69	130.928	11 30	117.219	114.866	23.370	119.134	187.525	11 30	0.625085
70	133.194	11 40	118.824	116.369	24.028	120.822	188.805	11 40	0.629348
71	135.481	11 50	120.425	117.866	24.695	122.509	190.072	11 50	0.633573
72	137.787	12 0	122.021	119.355	25.370	124.194	191.328	12 0	0.637759
73	140.113	12 10	123.613	120.836	26.052	125.877	192.572	12 10	0.641907
74	142.465	12 20	125.202	122.313	26.743	127.558	193.805	12 20	0.646017
75	144.836	12 30	126.785	123.780	27.441	129.238	195.027	12 30	0.650091
76	147.232	12 40	128.365	125.240	28.148	130.916	196.238	12 40	0.654128
77	149.652	12 50	129.940	126.694	28.862	132.592	197.439	12 50	0.658130
78	152.097	13 0	131.511	128.140	29.584	134.267	198.629	13 0	0.662096
79	154.568	13 10	133.078	129.580	30.313	135.939	199.808	13 10	0.666028
80	157.065	13 20	134.640	131.011	31.050	137.610	200.977	13 20	0.669925
81	159.588	13 30	136.197	132.433	31.795	139.279	202.136	13 30	0.673788
82	162.139	13 40	137.750	133.848	32.545	140.946	203.285	13 40	0.677618
83	164.625	13 50	139.298	135.258	33.306	142.610	204.424	13 50	0.681415
84	167.136	14 0	140.841	136.657	34.073	144.273	205.554	14 0	0.685180
85	169.661	14 10	142.380	137.953	34.822	145.934	206.674	14 10	0.688913
86	172.208	14 20	143.914	139.234	35.625	147.593	207.784	14 20	0.692613
87	174.767	14 30	145.443	140.510	36.416	149.250	208.885	14 30	0.696283
88	177.312	14 40	146.967	141.778	37.211	150.905	209.976	14 40	0.699921
89	180.894	14 50	148.486	143.038	38.014	152.558	211.059	14 50	0.703529
90	183.712	15 0	150.000	144.889	38.823	154.209	212.132	15 0	0.707107

表-1 の 3 ( $R_m=100, \phi_m=3\theta_m$ )

交角 $I$	切線長 $T$	中点極座標		中点直角座標		曲線長 $L_m$	軸長 $a$	中間点用	
		$\theta_m$	$\rho_m$	$x$	$y$			$\theta$	$\sqrt{\sin 2\theta}$
90°	183.712	15° 0'	150.000	144.889	38.823	154.209	212.132	15° 0'	0.707107
91	186.569	15 10	151.509	146.232	39.639	155.857	213.196	15 10	0.710654
92	189.466	15 20	153.013	147.566	40.462	157.503	214.252	15 20	0.714173
93	192.402	15 30	154.511	148.892	41.290	159.148	215.298	15 30	0.717662
94	195.385	15 40	156.005	150.209	42.128	160.790	216.336	15 40	0.721121
95	198.412	15 50	157.493	151.518	42.970	162.430	217.366	15 50	0.724553
96	201.551	16 0	158.976	152.817	43.820	164.067	218.387	16 0	0.727956
97	204.605	16 10	160.453	154.108	44.675	165.702	219.399	16 10	0.731328
98	207.775	16 20	161.925	155.390	45.537	167.335	220.403	16 20	0.734677
99	210.997	16 30	163.392	156.663	46.406	168.966	221.399	16 30	0.737997
100	214.274	16 40	164.853	157.927	47.280	170.594	222.387	16 40	0.741289
101	217.606	16 50	166.308	159.182	48.161	172.220	223.366	16 50	0.744554
102	220.997	17 0	167.758	160.428	49.048	173.844	224.338	17 0	0.747792
103	224.448	17 10	169.202	161.664	49.940	175.465	225.301	17 10	0.751004
104	227.962	17 20	170.640	162.891	50.839	177.084	226.257	17 20	0.754189
105	231.542	17 30	172.073	164.109	51.743	178.700	227.205	17 30	0.757348
106	235.161	17 40	173.500	165.317	52.653	180.314	228.144	17 40	0.760482
107	238.911	17 50	174.921	166.516	53.569	181.925	229.077	17 50	0.763589
108	242.705	18 0	176.336	167.705	54.491	183.534	230.001	18 0	0.766672
109	246.573	18 10	177.745	168.885	55.418	185.140	230.919	18 10	0.769729
110	250.531	18 20	179.148	170.055	56.350	186.744	231.828	18 20	0.772760
111	254.569	18 30	180.545	171.215	57.288	188.345	232.730	18 30	0.775767
112	258.385	18 40	181.935	172.365	58.231	189.943	233.625	18 40	0.778750
113	262.915	18 50	183.320	173.505	59.179	191.539	234.512	18 50	0.781707
114	267.231	19 0	184.698	174.636	60.132	193.132	235.392	19 0	0.784641
115	271.648	19 10	186.071	175.756	61.090	194.722	236.265	19 10	0.787550
116	276.173	19 20	187.437	176.867	62.053	196.310	237.131	19 20	0.790436
117	280.809	19 30	188.796	177.967	63.021	197.895	237.989	19 30	0.793297
118	285.562	19 40	190.149	179.057	63.994	199.477	238.839	19 40	0.796135
119	290.437	19 50	191.496	180.137	64.972	201.057	239.685	19 50	0.798949
120	295.442	20 0	192.836	181.207	65.954	202.633	240.522	20 0	0.801740
121	299.784	20 10	194.170	182.266	66.941	204.207	241.352	20 10	0.804508
122	305.867	20 20	195.497	183.315	67.932	205.778	242.175	20 20	0.807251
123	311.453	20 30	196.818	184.354	68.927	207.346	242.992	20 30	0.809975
124	316.895	20 40	198.132	185.382	69.927	208.911	243.802	20 40	0.812674
125	322.656	20 50	199.439	186.399	70.936	210.473	244.605	20 50	0.815350
126	328.593	21 0	200.739	187.406	71.938	212.032	245.401	21 0	0.818004
127	334.711	21 10	202.033	188.402	72.950	213.588	246.191	21 10	0.820636
128	341.041	21 20	203.320	189.388	73.966	215.141	246.973	21 20	0.823245
129	347.573	21 30	204.600	190.363	74.986	216.691	247.750	21 30	0.825832
130	354.330	21 40	205.872	191.327	76.099	218.238	248.519	21 40	0.828397
131	361.321	21 50	207.139	192.280	77.036	219.782	249.282	21 50	0.830940
132	368.564	22 0	208.398	193.223	78.067	221.323	250.039	22 0	0.833462
133	376.075	22 10	209.649	194.154	79.101	222.861	250.788	22 10	0.835961
134	383.870	22 20	210.894	195.075	80.139	224.396	251.522	22 20	0.838440
135	391.969	22 30	212.132	195.984	81.179	225.927	252.269	22 30	0.840896



表-1 の 4 ( $R_m=100, \phi_m=5\theta_m$ )

交角 $I$	マセン角 $\phi_m$	中点極座標		中点直角座標		曲線長 $L_m$	軸長 $a$	中間点用	
		$\theta_m$	$\rho_m$	$x$	$y$			$\theta$	$\sqrt{\sin 2\theta}$
135°	67° 30'	22° 30'	212.132	195.984	81.179	225.927	252.269	22° 30'	0.840896
136	68 °	22 40	213.363	196.883	82.223	227.455	253.000	22 40	0.843332
137	68 30	22 50	214.586	197.770	83.270	228.980	253.724	22 50	0.845746
138	69 °	23 °	215.802	198.647	84.321	230.502	254.442	23 °	0.848139
139	69 30	23 10	217.011	199.512	85.374	232.021	255.153	23 10	0.850511
140	70 °	23 20	218.212	200.366	86.429	233.536	255.859	23 20	0.852862
141	70 30	23 30	219.406	201.209	87.488	235.048	256.558	23 30	0.855192
142	71 °	23 40	220.593	202.040	88.549	236.557	257.250	23 40	0.857502
143	71 30	23 50	221.772	202.860	89.682	238.062	257.937	23 50	0.859790
144	72 °	24 °	222.943	203.669	90.679	239.564	258.618	24 °	0.862058
145	72 30	24 10	224.108	204.466	91.748	241.062	259.292	24 10	0.864306
146	73 °	24 20	225.264	205.252	92.819	242.557	259.960	24 20	0.866533
147	73 30	24 30	226.413	206.027	93.892	244.048	260.622	24 30	0.868740
148	74 °	24 40	227.554	206.790	94.967	245.536	261.278	24 40	0.870927
149	74 30	24 50	228.688	207.542	96.044	247.021	261.927	24 50	0.873091
150	75 °	25 °	229.813	208.282	97.123	248.502	262.572	25 °	0.875240
151	75 30	25 10	230.931	209.010	98.204	249.979	263.210	25 10	0.877366
152	76 °	25 20	232.041	209.727	99.287	251.453	263.842	25 20	0.879472
153	76 30	25 30	233.144	210.432	100.371	252.924	264.468	25 30	0.881559
154	77 °	25 40	234.238	211.126	101.456	254.390	265.088	25 40	0.883626
155	77 30	25 50	235.325	211.808	102.544	255.853	265.702	25 50	0.885672
156	78 °	26 °	236.403	212.478	103.609	257.312	266.310	26 °	0.887700
157	78 30	26 10	237.474	213.136	104.722	258.768	266.912	26 10	0.889708
158	79 °	26 20	238.536	213.783	105.813	260.220	267.508	26 20	0.891693
159	79 30	26 30	239.591	214.418	106.905	261.668	268.099	26 30	0.893664
160	80 °	26 40	240.637	215.041	107.998	263.112	268.684	26 40	0.895613
161	80 30	26 50	241.675	215.652	109.091	264.553	269.263	26 50	0.897543
162	81 °	27 °	242.705	216.252	110.186	265.990	269.836	27 °	0.899454
163	81 30	27 10	243.727	216.839	111.281	267.423	270.404	27 10	0.901345
164	82 °	27 20	244.740	217.415	112.377	268.852	270.966	27 20	0.903219
165	82 30	27 30	245.746	217.979	113.473	270.277	271.521	27 30	0.905070
166	83 °	27 40	246.743	218.531	114.569	271.698	272.072	27 40	0.906904
167	83 30	27 50	247.731	219.071	115.666	273.115	272.616	27 50	0.908719
168	84 °	28 °	248.711	219.599	116.763	274.528	273.155	28 °	0.910515
169	84 30	28 10	249.683	220.115	117.860	275.938	273.688	28 10	0.912292
170	85 °	28 20	250.646	220.619	118.957	277.343	274.215	28 20	0.914050
171	85 30	28 30	251.601	221.111	120.054	278.744	274.737	28 30	0.915790
172	86 °	28 40	252.547	221.592	121.150	280.142	275.253	28 40	0.917510
173	86 30	28 50	253.485	222.060	122.247	281.535	275.764	28 50	0.919212
174	87 °	29 °	254.414	222.516	123.342	282.924	276.269	29 °	0.920895
175	87 30	29 10	255.335	222.960	124.438	284.308	276.768	29 10	0.922560
176	88 °	29 20	256.247	223.392	125.533	285.689	277.262	29 20	0.924206
177	88 30	29 30	257.150	223.812	126.627	287.066	277.750	29 30	0.925833
178	89 °	29 40	258.045	224.220	127.720	288.438	278.233	29 40	0.927442
179	89 30	29 50	258.931	224.616	128.812	289.806	278.710	29 50	0.929033
180	90 °	30 °	259.808	225.000	129.904	291.170	279.181	30 °	0.930605

表-1 の 5 (R<sub>m</sub>=100, φ<sub>m</sub>=3θ<sub>m</sub>)

交角 I	ラセン角 φ <sub>m</sub>	中点極座標		中点直角座標		曲線長 L <sub>m</sub>	軸長 a	中間点用	
		θ <sub>m</sub>	ρ <sub>m</sub>	x	y			θ	√sin2θ
180	90 0	30 0	259.808	225.000	129.904	291.170	279.181	30 0	0.930605
183	91 30	30 30	262.386	226.079	133.171	295.235	280.563	30 30	0.935211
186	93 0	31 0	264.884	227.050	136.425	299.262	281.896	31 0	0.939653
189	94 30	31 30	267.302	227.912	139.665	303.248	283.179	31 30	0.943931
192	96 0	32 0	269.638	228.666	142.886	307.194	284.414	32 0	0.948047
195	97 30	32 30	271.892	229.284	146.088	311.099	285.601	32 30	0.952002
198	99 0	33 0	274.064	229.849	149.266	314.962	286.739	33 0	0.955796
201	100 30	33 30	276.151	230.279	152.418	318.782	287.829	33 30	0.959429
204	102 0	34 0	278.155	230.601	155.542	322.560	288.871	34 0	0.962904
207	103 30	34 30	280.074	230.816	158.636	326.293	289.866	34 30	0.966220
210	105 0	35 0	281.908	230.925	161.696	329.981	290.813	35 0	0.969377
213	106 30	35 30	283.656	230.928	164.720	333.625	291.713	35 30	0.972378
216	108 0	36 0	285.317	230.826	167.705	337.222	292.566	36 0	0.975221
219	109 30	36 30	286.891	230.620	170.650	340.773	293.373	36 30	0.977908
222	111 0	37 0	288.379	230.309	173.551	344.276	294.132	37 0	0.980440
225	112 30	37 30	289.778	229.896	176.405	347.732	294.845	37 30	0.982815
228	114 0	38 0	291.089	229.381	179.212	351.138	295.511	38 0	0.985036
231	115 30	38 30	292.317	228.770	181.971	354.495	296.131	38 30	0.987102
234	117 0	39 0	293.444	228.049	184.670	357.802	296.704	39 0	0.989013
237	118 30	39 30	294.488	227.234	187.317	361.058	297.231	39 30	0.990771
240	120 0	40 0	295.443	226.322	189.907	364.263	297.712	40 0	0.992375
243	121 30	40 30	296.306	225.313	192.436	367.415	298.148	40 30	0.993825
246	123 0	41 0	297.080	224.209	194.902	370.514	298.537	41 0	0.995122
249	124 30	41 30	297.764	223.012	197.304	373.560	298.880	41 30	0.996266
252	126 0	42 0	298.357	221.722	199.640	376.551	299.177	42 0	0.997257
255	127 30	42 30	298.858	220.342	201.906	379.486	299.428	42 30	0.998093
258	129 0	43 0	299.269	218.872	204.101	382.366	299.634	43 0	0.998781
261	130 30	43 30	299.589	217.314	206.223	385.189	299.794	43 30	0.999315
264	132 0	44 0	299.817	215.670	208.271	387.954	299.909	44 0	0.999695
267	133 30	44 30	299.954	213.943	210.241	390.661	299.977	44 30	0.999924
270	135 0	45 0	300.000	212.132	212.132	393.309	300.000	45 0	1.000000

方程式 (x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup>)<sup>2</sup> = 2 a<sup>2</sup> xy,

ρ<sup>2</sup> = a<sup>2</sup> sin 2θ.

θ<sub>m</sub> = 1/3 I = 1/3 φ<sub>m</sub>,

φ<sub>m</sub> = 1/2 I = 3 θ<sub>m</sub>.

a = 3 R<sub>m</sub> (sin 2θ<sub>m</sub>)<sup>1/2</sup>,

ρ<sub>m</sub> = 3 R<sub>m</sub> sin 2θ<sub>m</sub>.

x = ρ<sub>m</sub> cos θ<sub>m</sub>,

y = ρ<sub>m</sub> sin θ<sub>m</sub>.

T = x (1 + tan θ<sub>m</sub> tan φ<sub>m</sub>).

R = a<sup>2</sup>/3ρ.

L<sub>m</sub> = 1/√2 a {K(45°) - F(45°, φ)}, cos 2ψ = 2 sin 2θ<sub>m</sub> - 1.

表 4

中點偏角 $\theta_m$	Lamoen			Kuno		
	$L_m$	$\Delta$	$\Delta^2$	$L_m$	$\Delta$	$\Delta^2$
3° 0	0.313 929	18 410	— 961	0.313 930	17 413	— 5
3 10	0.332 339	17 449	— 1080	0.331 342	17 408	— 4
3 20	0.349 788	16 369	+ 2147	0.348 751	17 404	— 6
3 30	0.366 157	18 516	— 1108	0.366 154	17 399	— 5
3 40	0.384 673	17 408	— 1153	0.383 553	17 393	— 6
3 50	0.402 081	16 255	+ 1298	0.400 947	17 388	— 5
4 0	0.418 336	17 553	+ 816	0.418 335	17 382	— 6
4 10	0.435 889	18 369	— 2163	0.435 717	17 376	— 6
4 20	0.454 258	16 206		0.453 093	17 370	— 6
4 30	0.470 464			0.470 464		
20 0	2.026 330	15 735	— 16	2.026 331	15 737	— 29
20 10	2.042 065	15 719	— 81	2.042 068	15 708	— 28
20 20	2.057 784	15 638	+ 49	2.057 776	15 680	— 30
20 30	2.073 422	15 687	+ 920	2.073 456	15 650	— 29
20 40	2.089 109	16 607	— 987	2.089 106	15 621	— 29
20 50	2.104 716	15 620	— 58	2.104 727	15 592	— 30
21 0	2.120 336	15 562	— 35	2.120 319	15 562	— 30
21 10	2.135 898	15 527		2.135 880	15 532	— 30
21 20	2.151 425			2.151 412		

表 5

$\theta_m$	$L_m$	$L_m$
	Dawson	Kuno
3° 0	0.3139	0.31393
3 10	0.3313	0.33134
3 20	0.3488	0.34875
3 30	0.3662	0.36615
3 40	0.3836	0.38355
3 50	0.4009	0.40095
4 0	0.4183	0.41833
20 0	2.0262	2.02633
20 10	2.0420	2.04207
20 20	2.0577	2.05778
20 30	2.0733	2.07346
20 40	2.0890	2.08911
20 50	2.1046	2.10473
21 0	2.1202	2.12032
40 0	3.6423	3.64263
41 0	3.7048	3.70514
42 0	3.7649	3.76551
43 0	3.8230	3.82366
44 0	3.8786	3.87954
45 0	3.9318	3.93309