

論 說 報 告

第 22 卷 第 11 號 昭和 11 年 11 月

連 続 拱 橋 の 解 法

會 員 工 学 博 士 三 瀬 幸 三 郎*

Analysis of Continuous Arch Systems

By Kôzaburô Misé, Dr. Eng., Member.

要 旨

弾性下部構造を有する連続拱橋の正確なる解法として九変位の定理を提案し、其の応用を各種の例題について説明し、以て連続拱橋の荷重、温度及基礎移動等に因る変形及応力作用を攻究し、更に簡便に其の応力近似値を求むる爲に一つの略算法を挙げ、種々の例題について其の精度及応用範囲を検討したものである。

目 次

	頁
緒 言	1
I. 記號及定義	2
II. 解法の概説	3
III. 不静定応力の一般式	4
IV. 九変位の定理	7
V. 近似解法、六変位の定理	9
VI. 算定の順序	10
VII. 応用例題	13
例題 1. 2 径間の連続拱橋	13
例題 2. 3 径間の連続拱橋	16
例題 3. 5 径間の連続拱橋	19
例題 4. 核心曲力率の感線	22
例題 5. 弾性橋脚の影響	23
例題 6. 温度変化の影響	23
例題 7. 基礎移動の影響	24
例題 8. 近似解法の精度	25
結 語	26

緒 言

軌近構築用材としての鉄筋コンクリートは土木建築の各方面に遍く用ひられ、橋梁の如きも桁橋、構橋及拱橋の各種に、時には吊橋にまでも利用されて居る様な状態である。その中でも拱橋は其の形態優麗であり且其の応力作用がコンクリート構造に最も合理的なるを以て公道橋、鉄道橋の別無く、小は數 m の暗渠の如きものより大は 200 m にも及ぶ大径間の橋に至るまで廣く之を採用して大に其の効果を挙げつゝある現状である。

而して其の横断延長少しく長くなれば 1 径間の架橋は稀であつて、普通經濟的径間割を考慮し現地に適合せる數径間の橋を架設するのが常である。

従來斯る地點に架設せられたる鉄筋コンクリート拱橋の設計々算を視るに、其の構造連続径間なるにも拘らず何

* 九州帝國大学教授

れも各径間を単一獨立の拱橋として解いて居るのみで、其の構造の實狀に即して下部構造の彈性、拱肋の連続等を考へ連続拱橋として之を解明したものは殆ど無いと云つても過言でない。現に本邦に於ても鉄筋コンクリートの連続拱橋は數多く架設せられて居るが、未だ之を連続拱橋として設計々算したものあるを聞かない。

是固より單一の無鉸拱橋の計算に於ても三つの不靜定応力を解くことになり可なりの手數を要するを以て、之が數徑間連続のものとなれば多數の不靜定応力入り來り到底簡單には解き得ないものとして、便宜上單一径間の解法を採用して來たものと思はれる。

然し同種用材のコンクリートを以て構築されたる橋脚橋臺の下部構造は其の上部構造なる橋体、拱肋と同じく彈性変形を惹起するは勿論、事實構造が連続して居る以上、之を別々の單獨径間のものとして解くことは認容せらるべきものでは無く、何處迄も連続してあるものは其の連続してある丈を一彈性体として解いてこそ初て眞の応力作用を知り得るものなることは今更論ずるまでもないことである。

近時この残されたる問題、連続拱橋の研究が歐米各國に於て盛となり、或は理論的に、或は模型研究に依り、或は實驗檢測に依り、斯く各方面より此の難問題の応力作用を究明せんと努力しつつある情勢である。尙是迄に連続拱橋の解法として提案されし方法⁽¹⁾もあれど何れも正確なるものとは云ひ難い、而も或ものは其の解法餘りに複雑にして實用に適せず、又他のものは解法簡單なるも近似解法の域を脱し得ないものである。總ての影響を考慮したる正確にして而も解明容易なる算法の發表されしものを未だ見ない。

そこで著者は日本學術振興會の援助補助の下に本問題の研究を進め、彈性下部構造を有する連続拱橋の一解法として九変位の定理を提案した。本定理は径間の對稱、不對稱に論なく、又径間數に制限なく、溫度の変化及び基礎移動等の影響をも加算したる任意の荷重の下に於ける連続拱橋の解明に應用出来るものである。尙彈性変形としては拱肋のみならず下部構造に於ける曲力率、軸力及剪力の總てに因る変形をも考慮して解明したもので正確にして而も極一般的のものである。

此の解法に依り本問題は至極明確に解き得るとは云へ径間數多きものとなれば相當の手數を要することになり、殊に活荷重の影響は各断面に於ける最大応力を算定する爲に其の感線を求める必要がある。これが仲々厄介な計算である。

處が連続拱橋の最後の檢算は別として、設計の最初の計算とか又は比較研究の爲にする推算等の場合に於ては必ずしも精確なる解法を必要としない、それよりも寧ろ簡便敏速に其の近似値を算出し得ることが肝要である。斯る目的に好都合なる近似解法として一つの略算法を提案した。それは六変位の定理である。此の近似解法は扁平なる拱橋を除けば一般に其の誤差僅少であつて實用に差支なく、応力概算をなすには至極容易便利なる方法である。

以上提案各解法の應用を示す爲に各種の連続拱橋につき其の解明を試みた。それは先づ第一に 2 径間の連続拱橋を採り、活荷重、溫度変化及基礎移動等に因る其の変形及応力の一般解を求め、次に 3 径間及び 5 径間の連続拱橋について解明を施し、其等の結果を感線及応力図を以て表示した。更に拱矢比の大小、橋脚の高低各種の例題につき、活荷重の外溫度及基礎の影響等について其の応力作用如何を攻究すると同時に、又近似解法の精度及應用範圍に就て吟味検討したものである。

I. 記號及定義

本文に於て用ひる記號及定義を列擧すれば、次の如きものである。

(1) 九州帝國大学工学部紀要第 7 册第 5 號 259 頁。

- h, i, k : 格点, 即ち橋脚軸が其の兩側の拱
 肋軸と交叉する点
 j : 橋脚底
 O_{ih}, O_{ij}, O_{ik} : 弾性重心
 x, y : 直角座標軸
 X, Y : 弾性共軛軸
 α_{ih}, α_{ki} : 弾性共軛角
 φ : 拱軸傾斜角
 $d\omega = ds/EI, \quad g = I_0 \cos \varphi_0 / I \cos \varphi, \quad A' = A/\kappa.$
 $d\omega' = ds/E'A, \quad g' = A_0 \cos \varphi_0 / A' \cos \varphi, \quad m = I_0/A_0.$
 $d\omega'' = ds/GA', \quad g'' = A_0' \cos \varphi_0 / A' \cos \varphi, \quad n = EI_0/GA_0'.$
 $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$: 任意外力の x, y 方向に於ける其
 の分力
 t_0 : 均一温度変化
 $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i$: 弾性重心 O_{ih} に作用する不静定応力
 \mathfrak{M} : 任意の断面に於ける曲力率
 \mathfrak{R} : 同断面に於ける軸力
 \mathfrak{T} : 同断面に於ける剪力
 M_{ih}^0 : 不静定応力を除きたる, 即ち $\mathfrak{X}_{ih} = \mathfrak{Y}_{ih} = \mathfrak{Z}_{ih} = 0$ なる場合の外力に由る曲力率
 N_{ih}^0 : 同条件の下に於ける軸力, T_{ih}^0 : 同条件の下に於ける剪力
 \mathfrak{S} : 拱径間 ih, ik 及橋脚 ij に作用する外力に由つて直接格点 i に誘起されたる水平力の和
 \mathfrak{S}_i : 同条件の下に於ける垂直力の和, \mathfrak{M}_i : 同条件の下に於ける曲力率の和
 ΔX^{ih} : 弾性重心 O_{ih} の \mathfrak{X}_{ih} の方向に於ける總変位
 ΔY^{ih} : 同重心の \mathfrak{Y}_{ih} の方向に於ける總変位
 ΔZ^{ih} : 剛桿 $i-O_{ih}$ の \mathfrak{Z}_{ih} の方向に於ける總廻転変位
 $\delta_{XX}^{ih} = 1/a_{ih}$: 条件 $\mathfrak{X}_{ih} = 1$ の下に於て弾性重心 O_{ih} の \mathfrak{X}_{ih} の方向に於ける弾性変位
 $\delta_{XY}^{ih} = 1/b_{ih}$: 条件 $\mathfrak{Y}_{ih} = 1$ の下に於て O_{ih} の \mathfrak{Y}_{ih} 方向に於ける弾性変位
 $\delta_{ZZ}^{ih} = 1/c_{ih}$: 条件 $\mathfrak{Z}_{ih} = 1$ の下に於て剛桿の \mathfrak{Z}_{ih} 方向に於ける弾性廻転変位
 $\Delta x_i^{ih}, \Delta y_i^{ih}, \Delta z_i^{ih}$: 径間 $i-h$ に於ける荷重の爲に弾性重心 O_{ih} が其々 $\mathfrak{X}_{ih}, \mathfrak{Y}_{ih}, \mathfrak{Z}_{ih}$ の方向に移
 動する弾性変位
 $\Delta x_i^{ih}, \Delta y_i^{ih}, \Delta z_i^{ih}$: 径間 $i-h$ に於ける温度変化の爲に起る同種の弾性変位
 $\Delta x_i^{ih}, \Delta y_i^{ih}, \Delta z_i^{ih}$: 基礎移動に起因する同種の弾性変位
 Δ_i : 荷重の爲に起る弾性重心の変位, Δt_i : 温度変化の爲に生ずる同点の変位
 Δ_f : 基礎沈下に因る同点の変位,
 $\Delta x_i = p_i$: 格点 i の弾性変位の水平分変位, $\Delta y_i = q_i$: 同点の弾性変位の垂直分変位
 $\Delta z_i = r_i$: 同点弾性変位の廻転分変位, $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$: 橋脚底 j の基礎移動の三分変位

尙座標軸, 弾性共軛軸, 角度, 力及曲力率等の方向正負は図面中に之を記すことにする。

II. 解法の概説

弾性下部構造を有する連続拱橋に於ては, 其の構造一端より他端まで連続せるを以て, 之に荷重が載るか, 温度の
 変化があるか又は基礎に沈下が起つた場合には, 其の影響全径間に及び此處に或弾性変形を生じ, 爲に各橋脚頭は
 或変位を惹起することになる。斯くして 1 径間に載る荷重も亦一基礎の動きも其の影響は全拱橋に波及すること
 になる。

而して其の橋脚頭なる格點の彈性変位が求められると各拱肋及各橋脚の応力は容易に之を算出することが出来るのであるから、連続拱橋の解明には先づ第一に其の格點の彈性変位を決定することが緊要なる問題である。

此の目的の爲に提案したものが九変位の定理である。今本定理解法の概説を擧げて見ると、

第一に連続拱橋を各格點に於て截断し、各拱肋及各橋脚とを別々になる様に切り離したものと假想する。

次にこの断面に現れたる応力を其々の拱肋及橋脚の各彈性重心に誘導し、不靜定応力 X, Y, Z を以て置換する。此の際 X 及 Y なる兩不靜定応力の方向を其の彈性共軛軸の方向に採れば、各不靜定応力は何れも獨立の方程式を以て示すことが出来る。

然る時は各彈性重心に於ける不靜定応力は其の徑間に於ける荷重、温度の変化及其の兩端格點の変位を以て表されることになる、依つて橋脚頭なる格點の変位さへ決定すれば他の徑間の荷重、温度の変化及基礎移動等に關係なく、直ぐ様其の不靜定応力を定めることが出来るのである。

そこで其の格點変位を求める爲に各格點に於ける力の平衡條件を適用する。それに依つて連続せる 3 格點の彈性変位の關係を示す一般式が得られる。是即ち九變位の定理であつて、3 格點の各分変位都合九つの変位の關係を其の間に於ける荷重、温度の変化及基礎移動等の値を以て表したものである。

此の定理を各橋脚頭に應用すれば未知の格點変位の數丈の式が得られる。依つて之を解けば總ての格點変位を算定することが出来る。従つて各不靜定応力が求められ、拱肋及橋脚の任意の断面に於ける応力を算出することが出来る譯である。

III. 不靜定応力の一般式

今圖-1 に示す如き任意の徑間數を有する連続拱橋の 1 徑間 $h-i$ を採つて其の不靜定応力の一般式を求める。解法を極一般的ならしむる爲に不對稱の徑間とし、且拱肋のみならず下部構造の彈性変形をも考慮する。従つて其の兩端格點 h, i は何れも水平、垂直及廻轉の彈性変位を起すことになる。

圖-1. 座標軸系

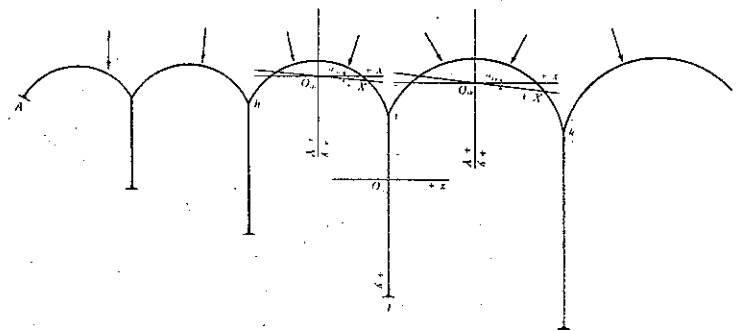
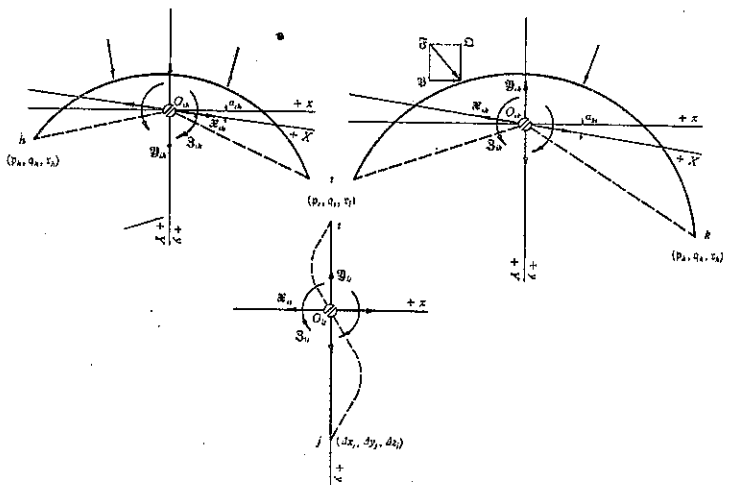


圖-2. 不靜定応力系



先づ最初に $h-i$ 径間の弾性重心 O_{ih} の位置を次式に依つて算定する。

$$\bar{x} = \int x d\omega / \int d\omega, \dots \dots \dots (1)_1$$

$$\bar{y} = \int y d\omega / \int d\omega, \dots \dots \dots (1)_2$$

次に此の径間の弾性平衡方程式を求むるに當り、兩格點に其々剛桿を取付け、兩端断面に表れたる応力を其の弾性重心に誘導置換して 図-2 の如く x_{ih} , y_{ih} , z_{ih} なる不静定応力を得たものとする。此の際 y_{ih} の方向は垂直にとり、之と弾性共軛角 α_{ih} をなす弾性共軛軸を x_{ih} の方向に採る。而して其の弾性共軛角は

$$\tan \alpha_{ih} = \frac{\int xy d\omega - \int \sin \varphi \cos \varphi d\omega' + \int \sin \varphi \cos \varphi d\omega''}{\int x^2 d\omega + \int \sin^2 \varphi d\omega' + \int \cos^2 \varphi d\omega''} \dots \dots \dots (2)$$

に依つて與へられる。

然る時は總ての影響を考慮して弾性平衡方程式を求めると次の一般式が得られる。

$$\Delta x^{ih} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial x_{ih}} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial x_{ih}} ds + \int \frac{\kappa X}{GA} \frac{\partial X}{\partial x_{ih}} ds + \int \epsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial x_{ih}} ds + \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} \frac{\partial M}{\partial x_{ih}} ds, \dots \dots \dots (3)_1$$

$$\Delta y^{ih} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial y_{ih}} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial y_{ih}} ds + \int \frac{\kappa Y}{GA} \frac{\partial Y}{\partial y_{ih}} ds + \int \epsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial y_{ih}} ds + \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} \frac{\partial M}{\partial y_{ih}} ds, \dots \dots \dots (3)_2$$

$$\Delta z^{ih} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial z_{ih}} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial z_{ih}} ds + \int \frac{\kappa Z}{GA} \frac{\partial Z}{\partial z_{ih}} ds + \int \epsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial z_{ih}} ds + \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} \frac{\partial M}{\partial z_{ih}} ds, \dots \dots \dots (3)_3$$

上式中

$$M = M_{ih}^0 + x_{ih} Y - y_{ih} X + z_{ih}, \dots \dots \dots (4)_1$$

$$N = N_{ih}^0 + x_{ih} \cos(\varphi - \alpha_{ih}) + y_{ih} \sin \varphi, \dots \dots \dots (4)_2$$

$$X = T_{ih}^0 - x_{ih} \sin(\varphi - \alpha_{ih}) + y_{ih} \cos \varphi, \dots \dots \dots (4)_3$$

斯くして不静定応力 x_{ih} , y_{ih} の方向が互に弾性共軛の関係にあるを以て、上記の一般式は各々獨立の方程式となり三不静定応力は何れも單獨に其等の値を定めることが出来る。其の結果を x_{ih} , y_{ih} , z_{ih} の式として書直せば

$$x_{ih} = \frac{\Delta x^{ih} - \int M_{ih}^0 Y d\omega - \int N_{ih}^0 \cos(\varphi - \alpha_{ih}) d\omega' + \int T_{ih}^0 \sin(\varphi - \alpha_{ih}) d\omega'' - \int \epsilon t_0 \cos(\varphi - \alpha_{ih}) ds - \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} Y ds}{\int Y^2 d\omega + \int \cos^2(\varphi - \alpha_{ih}) d\omega' + \int \sin^2(\varphi - \alpha_{ih}) d\omega''} \\ = \frac{\Delta x^{ih} - \Delta x_1^{ih} - \Delta x_2^{ih}}{\delta_{xx}^{ih}}, \dots \dots \dots (5)_1$$

$$y_{ih} = \frac{\Delta y^{ih} + \int M_{ih}^0 X d\omega - \int N_{ih}^0 \sin \varphi d\omega' - \int T_{ih}^0 \cos \varphi d\omega'' - \int \epsilon t_0 \sin \varphi ds + \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} X ds}{\int X^2 d\omega + \int \sin^2 \varphi d\omega' + \int \cos^2 \varphi d\omega''} \\ = \frac{\Delta y^{ih} - \Delta y_1^{ih} - \Delta y_2^{ih}}{\delta_{yy}^{ih}}, \dots \dots \dots (5)_2$$

$$z_{ih} = \frac{\Delta z^{ih} - \int M_{ih}^0 d\omega - \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds}{\int d\omega} = \frac{\Delta z^{ih} - \Delta z_1^{ih} - \Delta z_2^{ih}}{\delta_{zz}^{ih}}, \dots \dots \dots (5)_3$$

となる。但上式中 Δx^{ih} , Δy^{ih} , Δz^{ih} はまだ決定されて居ない変位であるが、其の餘は總て直接に算定出来るものである。

この Δx^{ih} , Δy^{ih} , Δz^{ih} は其々不静定応力 \bar{x}_{ih} , \bar{y}_{ih} , \bar{z}_{ih} の働きの各点の方向に於ける總変位を示すものである。而して格點の廻轉變位 Δz に由る弾性重心の変位 Δx , Δy は (図-3)

$$\Delta x = \rho \Delta z \sin z = y \Delta z \dots \dots \dots (6)_1$$

$$\Delta y = -\rho \Delta z \cos z = -x \Delta z \dots \dots \dots (6)_2$$

の如き関係にあるを以て、各總変位は其の兩端の格點変位に依つて次の如く與へられるものである。即ち

$$\Delta x^{ih} = \left\{ \Delta x_i - \Delta x_n + \Delta z_i y_i^{ih} - \Delta z_n y_n^{ih} \right\} \cos \alpha_{ih} + \left\{ \Delta y_i - \Delta y_n - \Delta z_i x_i^{ih} - \Delta z_n x_n^{ih} \right\} \sin \alpha_{ih}, \dots (7)_1$$

$$\Delta y^{ih} = \Delta y_i - \Delta y_n - \Delta z_i x_i^{ih} - \Delta z_n x_n^{ih}, \dots \dots \dots (7)_2$$

$$\Delta z^{ih} = \Delta z_i - \Delta z_n \dots \dots \dots (7)_3$$

となる。

以上は拱肋に就ての式であるが、更に橋脚 $i-j$ (図-2) に就て同様の式を求めると、構造が對稱であるから不静定応力は簡単に

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\Delta x^{ij} - \int M_{ij}^0 y d\omega + \int T_{ij}^0 d\omega' - \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} y ds}{\int y^2 d\omega + \int d\omega'} = a_{ij} \left\{ \Delta x^{ij} - \Delta x_i^{ij} - \Delta z_i^{ij} \right\}, \dots \dots \dots (8)_1$$

$$\bar{y}_{ij} = \frac{\Delta y^{ij} - \int N_{ij}^0 d\omega' - \int \epsilon t_0 ds}{\int d\omega'} = b_{ij} \left\{ \Delta y^{ij} - \Delta y_i^{ij} - \Delta z_i^{ij} \right\} \dots \dots \dots (8)_2$$

$$\bar{z}_{ij} = \frac{\Delta z^{ij} - \int M_{ij}^0 d\omega - \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds}{\int d\omega} = c_{ij} \left\{ \Delta z^{ij} - \Delta z_i^{ij} - \Delta z_i^{ij} \right\} \dots \dots \dots (8)_3$$

となる。而して上式中の弾性重心の總変位は

$$\Delta x^{ij} = \Delta x_j - \Delta x_i + \Delta z_j y_j^{ij} + \Delta z_i y_i^{ij}, \dots \dots \dots (9)_1$$

$$\Delta y^{ij} = \Delta y_j - \Delta y_i, \dots \dots \dots (9)_2$$

$$\Delta z^{ij} = \Delta z_j - \Delta z_i, \dots \dots \dots (9)_3$$

となり、若し橋脚底不動なれば

$$\Delta x^{ij} = -\Delta x_i + \Delta z_i y_i^{ij}, \dots \dots \dots (9)_1'$$

$$\Delta y^{ij} = -\Delta y_i, \dots \dots \dots (9)_2'$$

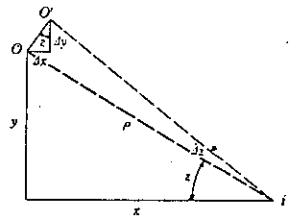
$$\Delta z^{ij} = -\Delta z_i, \dots \dots \dots (9)_3'$$

となる。

故に拱肋、橋脚何れにしても其の応力を求むるには、先づ其の格點変位を知ることが必要である。若し何等かの方法で此の格點変位を決定することが出来れば、其の餘は既知のものであるから、各径間及各橋脚の不静定応力は他の部分に關係なく式(5)又は式(8)に依つて容易に之を算出することが出来るのである。

斯くして連続拱橋を解くには先づ第一に其の橋脚頭なる格點の弾性変位を算定することが必要となつて來た譯である。

図-3. 格點と弾性重心との変位關係



IV. 九変位の定理

その格点変位を求むる一解法として提案したものが九変位の定理である。之を用ひれば本問題は至極明確に解くことが出来る。

今任意の連続拱橋に於て h-i-k なる連続の 2 径間を採り、之を図-2 に示す如く h-i, i-j, i-k の 3 部分に切り離し、各断面に於ける応力を各弾性重心に於ける不静定応力を以て置換したものとす。然る時は荷重、温度、基礎沈下等の如何に關せず各不静定応力は式(5)及式(8)に依つて與へられる。従つて又逆に各断面の応力は是等の不静定応力を以て表示することが出来る。

依つて茲に橋頭なる格点 i に於ける力の平衡條件を適用して次の 3 式を得る。

$$\sum iX = 0, \text{ 即ち } x_{ih} \cos \alpha_{ih} - x_{ij} - x_{ik} \cos \alpha_{ik} = 0, \dots\dots\dots (10)_1$$

$$\sum iY = 0, \text{ 即ち } x_{ih} \sin \alpha_{ih} - x_{ik} \sin \alpha_{ik} + y_{ih} - y_{ij} - y_{ik} = 0, \dots\dots\dots (10)_2$$

$$\sum m = 0, \text{ 即ち } x_{ih} Y_i^{ih} + x_{ij} Y_i^{ij} - x_{ik} Y_i^{ik} - y_{ih} X_i^{ih} - y_{ik} X_i^{ik} + \beta_{ih} - \beta_{ij} - \beta_{ik} = 0 \dots\dots\dots (10)_3$$

上式に各不静定応力の値を代入して求めんとする格点変位 p, q, r の式に書直せば、一般には

$$A_{xh} p_h + A_{xi} p + A_{xk} p_k + B_{xh} q_h + B_{xi} q_i + B_{xk} q_k + C_{xh} r_h + C_{xi} r_i + C_{xk} r_k = \Phi_i, \dots\dots (11)_1$$

$$A_{yh} p_h + A_{yi} p + A_{yk} p_k + B_{yh} q_h + B_{yi} q_i + B_{yk} q_k + C_{yh} r_h + C_{yi} r_i + C_{yk} r_k = \Psi_i \dots\dots (11)_2$$

$$A_{zh} p_h + A_{zi} p_i + A_{zk} p_k + B_{zh} q_h + B_{zi} q_i + B_{zk} q_k + C_{zh} r_h + C_{zi} r_i + C_{zk} r_k = \mathfrak{M}_i \dots\dots (11)_3$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} A_{xh} &= -a_{ih} \cos^2 \alpha_{ih}, \\ A_{xi} &= a_{ih} \cos^2 \alpha_{ih} + a_{ij} + a_{ik} \cos^2 \alpha_{ik}, \\ A_{xk} &= -a_{ik} \cos^2 \alpha_{ik}, \\ A_{yh} &= -a_{ih} \cos \alpha_{ih} \sin \alpha_{ih}, \\ A_{yi} &= a_{ih} \cos \alpha_{ih} \sin \alpha_{ih} + a_{ik} \cos \alpha_{ik} \sin \alpha_{ik}, \\ A_{yk} &= -a_{ik} \cos \alpha_{ik} \sin \alpha_{ik}, \\ A_{zh} &= -a_{ih} \cos^3 \alpha_{ih} Y_i^{ih}, \\ A_{zi} &= a_{ih} \cos \alpha_{ih} Y_i^{ih} - a_{ij} Y_i^{ij} + a_{ik} \cos \alpha_{ik} Y_i^{ik}, \\ A_{zk} &= -a_{ik} \cos \alpha_{ik} Y_i^{ik}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)_1$$

$$\left. \begin{aligned} B_{xh} &= A_{yh}, \\ B_{xi} &= A_{yi}, \\ B_{xk} &= A_{yk}, \\ B_{yh} &= -b_{ih} - a_{ih} \sin^2 \alpha_{ih}, \\ B_{yi} &= b_{ih} + b_{ij} + b_{ik} + a_{ih} \sin^2 \alpha_{ih} + a_{ik} \sin^2 \alpha_{ik}, \\ B_{yk} &= -b_{ik} - a_{ik} \sin^2 \alpha_{ik}, \\ B_{zh} &= b_{ih} X_i^{ih} - a_{ih} \sin \alpha_{ih} Y_i^{ih}, \\ B_{zi} &= -b_{ih} X_i^{ih} + b_{ik} X_i^{ik} + a_{ih} \sin \alpha_{ih} Y_i^{ih} + a_{ik} \sin \alpha_{ik} Y_i^{ik}, \\ B_{zk} &= -b_{ik} X_i^{ik} - a_{ik} \sin \alpha_{ik} Y_i^{ik}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)_2$$

$$\left. \begin{aligned} C_{xh} &= -a_{ih} \cos \alpha_{ih} Y_h^{ih}, \\ C_{xi} &= A_{zi}, \\ C_{xk} &= -a_{ik} \cos \alpha_{ik} Y_k^{ik}, \\ C_{yh} &= -b_{ih} X_h^{ih} - a_{ih} \sin \alpha_{ih} Y_h^{ih}, \\ C_{yi} &= B_{zi} \\ C_{yk} &= b_{ik} X_k^{ik} - a_{ik} \sin \alpha_{ik} Y_k^{ik}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)_3$$

$$\begin{aligned}
C_{zh} &= -c_{ih} + b_{ih}X_i^{ih}X_k^{ih} - a_{ih}Y_k^{ih}Y_i^{ih}, \\
C_{zi} &= c_{ih} + c_{ij} + c_{ik} + b_{ih}(X_i^{ih})^2 + b_{ik}(X_i^{ih})^2 + a_{ih}(Y_i^{ih})^2 + a_{ij}(y_i^{ij})^2 + a_{ik}(Y_i^{ik})^2, \\
C_{zk} &= -c_{ik} + b_{ik}X_i^{ik}X_k^{ik} - a_{ik}Y_i^{ih}Y_k^{ik}.
\end{aligned}$$

次に右邊の値は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_i &= \sum \mathcal{A}_x \{ \Delta x_i + \Delta x_k - \Delta x_j \} \\
&= a_{ih} \cos \alpha_{ih} \{ \Delta x_i^{ih} + \Delta x_k^{ih} \} - a_{ij} \{ \Delta x_i^{ij} + \Delta x_k^{ij} - \Delta x_j^{ij} \} - a_{ik} \cos \alpha_{ik} \{ \Delta x_i^{ik} + \Delta x_k^{ik} \} \dots (13)_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_i &= \sum \mathcal{A}_y \{ \Delta y_i + \Delta y_k - \Delta y_j \} + \sum \mathcal{B}_y \{ \Delta y_i + \Delta y_k - \Delta y_j \} \\
&= a_{ih} \sin \alpha_{ih} \{ \Delta y_i^{ih} + \Delta y_k^{ih} \} - a_{ik} \sin \alpha_{ik} \{ \Delta y_i^{ik} + \Delta y_k^{ik} \} \\
&\quad + b_{ih} \{ \Delta y_i^{ih} + \Delta y_k^{ih} \} - b_{ij} \{ \Delta y_i^{ij} + \Delta y_k^{ij} - \Delta y_j^{ij} \} - b_{ik} \{ \Delta y_i^{ik} + \Delta y_k^{ik} \} \dots (13)_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_i &= \sum \mathcal{A}_z \{ \Delta z_i + \Delta z_k - \Delta z_j \} + \sum \mathcal{B}_z \{ \Delta z_i + \Delta z_k - \Delta z_j \} + \sum \mathcal{C} \{ \Delta z_i + \Delta z_k - \Delta z_j \} \\
&= a_{ih} Y_i^{ih} \{ \Delta x_i^{ih} + \Delta x_k^{ih} \} + a_{ij} y_i^{ij} \{ \Delta x_i^{ij} + \Delta x_k^{ij} - \Delta x_j^{ij} \} - a_{ik} Y_i^{ik} \{ \Delta x_i^{ik} + \Delta x_k^{ik} \} \\
&\quad - b_{ih} X_i^{ih} \{ \Delta y_i^{ih} + \Delta y_k^{ih} \} - b_{ik} X_i^{ik} \{ \Delta y_i^{ik} + \Delta y_k^{ik} \} \\
&\quad + c_{ih} \{ \Delta z_i^{ih} + \Delta z_k^{ih} \} - c_{ij} \{ \Delta z_i^{ij} + \Delta z_k^{ij} - \Delta z_j^{ij} \} - c_{ik} \{ \Delta z_i^{ik} + \Delta z_k^{ik} \} \dots (13)_3
\end{aligned}$$

であり、尙其の式中

$$\Delta x_i^{ij} = \Delta x_j + \Delta z_j y_j^{ij}, \quad \Delta y_i^{ij} = \Delta y_j + \Delta z_j x_j^{ij}, \quad \Delta z_j^{ij} = \Delta z_j \dots (14)$$

前記の式(11)は連続拱橋に於ける任意の相隣れる三つの格點の水平、垂直及廻轉の3変位、即ち都合九つの変位の關係を其の間に於ける荷重、温度の変化及基礎移動等の値を以て表現した一般式である。依つて之を九変位の定理と名附けたのである。而して本定理は径間の對稱不對稱に論なく、又外力の如何に關せず極一般に應用出来る解法である。

例へば一般の場合として n 径間の連続拱橋に於て其の兩端の起拱點を不動とすれば $n-1$ の可動格點があり、之に九変位の定理を應用すれば丁度求むべき格點変位の數 $3(n-1)$ 丈の式が得られる。之を解いて一般に

$$p = \psi_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \quad \text{或は} \quad p = \psi_p(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j) \dots (15)_1$$

$$q = \psi_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \quad \text{或は} \quad q = \psi_q(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j) \dots (15)_2$$

$$r = \psi_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \quad \text{或は} \quad r = \psi_r(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j) \dots (15)_3$$

を得る。斯くして格點変位定まれば不靜定応力は一般に

$$\mathfrak{X} = \mathcal{P}_x(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j), \dots (16)_1$$

$$\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_y(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j), \dots (16)_2$$

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{P}_z(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j), \dots (16)_3$$

にて與へられることになる。

以上の如くして總ての不靜定応力が決定すれば任意の點の応力又は其の感線、或は所定の荷重、温度の変化及基礎移動等の下に於ける応力図等も容易に之を求むることが出来る。依つて提案の九変位の定理を適用すれば連続拱橋の変形及応力作用を明確に解き得ることが判る。

上記の式は不對稱径間に對する極一般のものであるが、若し拱径間が對稱構造のものとなれば算式は一層簡明となる。其の場合の各公式は之を VI. 算定の順序、B. 特別の場合として列記して其の解法を示し、尙詳細は應用

例題に就て説明することにする。

V. 近似解法, 六変位の定理

前記の九変位の定理を用ひれば連続拱橋は正確に解き得るとは云へ、一般に n 径間のものであれば $3(n-1)$ の方程式を解くことになり相當の手數を要することになる。殊に活荷重の影響を知る爲に各断面応力の感線を求むることになると、これが中々厄介なる計算である。然るに設計最初の計算とか、又は橋種選定の比較設計とか、或は拱橋の形態比較研究等の場合に於て、手取早く概略の数値を算出したいと云ふことが屢々ある。そこで斯る目的に對し問題を容易ならしむる爲に影響の最も僅少なるものを除いて簡便なる近似解法を提案した。それが即ち六変位の定理である。

極めて扁平なる拱肋及甚しく短肥なる構造のものは別として普通の拱橋であれば、其の軸力及剪力に由る弾性変形は之を曲力率のそれに比べると遙に小であつて省略しても差支ない程度のものであり、従つて格點変位 q は p 及 v に比して一般に微小である。

上述の理由に依り略算法として軸力及剪力に由る変形を省くと同時に、各橋脚頭の垂直変位 q を除外すれば問題は至極簡單となり式(11)は次の如き形となる。

$$A_{zh} p_h + A_{zi} p_i + A_{zk} p_k + C_{zh} v_h + C_{zi} v_i + C_{zk} v_k = \mathfrak{Q}_i = \sum A_{\alpha i} \{ \Delta_{xi} + \Delta_{yi} - \Delta_{xy} \}, \dots\dots\dots(17)_1$$

$$A_{zh} p_h + A_{zi} p_i + A_{zk} p_k + C_{zh} v_h + C_{zi} v_i + C_{zk} v_k = \mathfrak{M}_i = \sum A_{\alpha z} \{ \Delta_{xi} + \Delta_{yi} - \Delta_{xy} \} + \sum \beta_z \{ \Delta_{yi} + \Delta_{xi} - \Delta_{xy} \} + \sum C_{\alpha z} \{ \Delta_{zi} + \Delta_{zi} - \Delta_{zi} \} \dots\dots\dots(17)_2$$

上式は連続拱橋の相隣れる 3 格點 h, i, k に於ける水平及廻轉の六変位の關係を示す一般式であるから、之を六変位の定理と名附けた。

今 n 径間の連続拱橋に於て弾性的可動の格點 $n-1$ とすれば、斯る式は丁度定めんとする p, v の數 $2(n-1)$ 丈得らるゝを以て之を解けば其等の格點変位の近似値を算定することが出来る、即ち一般に

$$p = \psi_x(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}) = \psi_x(\Delta_i, \Delta_i, \Delta_j) \dots\dots\dots(18)_1$$

$$v = \psi_y(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}) = \psi_y(\Delta_i, \Delta_i, \Delta_j) \dots\dots\dots(18)_2$$

斯くして先の九変位の定理に於ける $3(n-1)$ の式を解く代りに此處では $2(n-1)$ を解けば宜いのであるから、其の計算は大に節約されることになる。

格點変位決定すれば各不静定応力の近似値は次式に依つて與へられる。

$$\bar{x}_h = a_{ih} \{ \Delta_{xi}^{ih} - \Delta_{xi}^{ih} - \Delta_{xi}^{ih} \} = a_{ih} \{ [p_i - p_h + v_i y_i^{ih} - v_h y_h^{ih}] \cos \alpha_{ih} - [v_i x_i^{ih} + v_h x_h^{ih}] \sin \alpha_{ih} - \int_h^i M_{ih}^0 Y d\omega - \int_h^i e t_0 \cos(\varphi - \alpha_{ih}) ds - \int_h^i \frac{e \Delta t}{d} Y ds \} \dots\dots\dots(19)_1$$

$$\bar{y}_{ih} = b_{ih} \{ \Delta_{yi}^{ih} - \Delta_{yi}^{ih} - \Delta_{yi}^{ih} \} = b_{ih} \{ -[v_i x_i^{ih} + v_h x_h^{ih}] + \int_h^i M_{ih}^0 X d\omega - \int_h^i e t_0 \sin \varphi ds + \int_h^i \frac{e \Delta t}{d} X ds \} \dots\dots\dots(19)_2$$

$$\bar{z}_{ih} = c_{ih} \{ \Delta_{zi}^{ih} - \Delta_{zi}^{ih} - \Delta_{zi}^{ih} \} = c_{ih} \{ [v_i - v_h] - \int_h^i M_{ih}^0 d\omega - \int_h^i \frac{e \Delta t}{d} ds \} \dots\dots\dots(19)_3$$

次に橋脚 $i-j$ の不静定応力の近似値は直接之に作用する荷重なしとすれば

$$\bar{x}_{ij} = a_{ij} \{ \Delta x^{ij} - \Delta x^{ij} \} = a_{ij} \left\{ [\Delta x_j - v_i + \Delta z_j y_j^{ij} + v_i y_i^{ij}] - \int_i^j \frac{e \Delta t}{d} y ds \right\} \dots \dots \dots (20)_1$$

$$\bar{z}_{ij} = c_{ij} \{ \Delta z^{ij} - \Delta z^{ij} \} = c_{ij} \left\{ [\Delta z_j - v_i] - \int_i^j \frac{e \Delta t}{d} ds \right\}, \dots \dots \dots (20)_2$$

となり、残りの \bar{y}_{ij} は格点 i に於ける平衡条件 $\Sigma \bar{y} = 0$, より直に其の近似値を求むることが出来る。

尚上式中の弾性係数も此の場合は簡単に

$$a_{in} = 1 / \int_n^i Y^2 d\omega, \quad b_{in} = 1 / \int_n^i X^2 d\omega, \quad c_{in} = 1 / \int_n^i d\omega, \dots \dots \dots (21)_1$$

$$a_{ij} = 1 / \int_i^j Y^2 d\omega, \quad c_{ij} = 1 / \int_i^j d\omega, \dots \dots \dots (21)_2$$

に依つて算定した値を採る。

斯くして總ての不静定応力定まれば任意の断面に於ける応力、即ち曲力率、軸力及剪力等は普通の単一径間拱橋の時と同様にして容易に算定出来る。

上述の近似解法は不對稱径間の一般の場合にして而も荷重の外に温度及基礎の影響をも考慮したものであるが、若し對稱径間にして單に荷重の作用のみを考へるものとすれば、問題は極めて簡易のものとなる。其の場合の算式を VI 算定の順序、C. 近似解法として列挙し以て其の鮮明の方法を明かにする（詳細応用例題参照）。勿論此の近似解法は一つの略算法であるから、之を應用するには其の限度がある。精確なる解法に比較して何の位の精度があるか、又其の應用は何の範圍まで差支ないか、それ等を應用例題について吟味し以て其の實用價値を攻究する。

VI. 算定の順序

一般に連続拱橋の解法は相當の手數のかゝるものであるが、之を一定の順序に従つて秩序よく解けば其の計算は極めて容易であつて、殆ど單一径間の場合と大差なく簡単に鮮明出来るものである。

今其の目的の爲に提案解法の計算順序を次の三つの場合について列記して實際設計々算の便とする。

A. 一般の場合 不對稱径間の一般の場合を採り、荷重、温度の変化及基礎移動等總ての影響を加算したる正確なる解法。

i. 各拱肋及各橋脚の弾性重心の決定:

$$\bar{x} = \int x d\omega / \int d\omega, \quad \bar{y} = \int y d\omega / \int d\omega \dots \dots \dots (1)$$

ii. 弾性重心を通る弾性共軌軸の確定:

$$\tan \alpha = \frac{\int xy d\omega - \int \sin \varphi \cos \varphi d\omega' + \int \sin \varphi \cos \varphi d\omega''}{\int x^2 d\omega + \int \sin^2 \varphi d\omega' + \int \cos^2 \varphi d\omega''} \dots \dots \dots (2)$$

iii. 各弾性重心の荷重、温度変化及基礎移動に由る弾性変位の算定:

$$\delta_{xx} = \int Y^2 d\omega + \int \cos^2 (\varphi - \alpha) d\omega' + \int \sin^2 (\varphi - \alpha) d\omega'', \dots \dots \dots (5)_1$$

$$\delta_{yy} = \int X^2 d\omega + \int \sin^2 \varphi d\omega' + \int \cos^2 \varphi d\omega'', \dots \dots \dots (5)_2$$

$$\delta_{zz} = \int d\omega, \dots \dots \dots (5)_3$$

$$\Delta x_i = \int M^0 Y d\omega + \int N^0 \cos (\varphi - \alpha) d\omega' - \int T^0 \sin (\varphi - \alpha) d\omega'', \dots \dots \dots (5)_4$$

$$\Delta X_i = -\int M^0 X d\omega + \int N^0 \sin \varphi d\omega' + \int T^0 \cos \varphi d\omega'', \dots (5)_2$$

$$\Delta Z_i = \int M^0 d\omega, \dots (5)_3$$

$$\Delta X_i = \int \epsilon t_0 \cos(\varphi - \alpha) ds + \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} Y ds \dots (5)_1$$

$$\Delta X_i = \int \epsilon t_0 \sin \varphi ds - \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} X ds \dots (5)_2$$

$$\Delta Z_i = \int \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds, \dots (5)_3$$

$$\Delta X_j = \Delta X_j + Y \Delta Z_j, \dots (14)_1$$

$$\Delta Y_j = \Delta Y_j + X \Delta Z_j, \dots (14)_2$$

$$\Delta Z_j = \Delta Z_j \dots (14)_3$$

iv. 九変位の定理構成:

$$\Delta x_h p_h + \Delta x_i p_i + \Delta x_k p_k + B_{zh} q_h + B_{zi} q_i + B_{zk} q_k + C_{zh} r_h + C_{zi} r_i + C_{zk} r_k = \mathfrak{S}_i, \dots (11)_1$$

$$\Delta y_h p_h + \Delta y_i p_i + \Delta y_k p_k + B_{yh} q_h + B_{yi} q_i + B_{yk} q_k + C_{yh} r_h + C_{yi} r_i + C_{yk} r_k = \mathfrak{B}_i, \dots (11)_2$$

$$\Delta z_h p_h + \Delta z_i p_i + \Delta z_k p_k + B_{zh} q_h + B_{zi} q_i + B_{zk} q_k + C_{zh} r_h + C_{zi} r_i + C_{zk} r_k = \mathfrak{M}_i, \dots (11)_3$$

v. 各格点の弾性変位決定:

$$p = \psi_x(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \dots (15)_1$$

$$q = \psi_y(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \dots (15)_2$$

$$r = \psi_z(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}), \dots (15)_3$$

vi. 不静定応力の総変位算定:

$$\Delta X^{mn} = \{ p_n - p_m + r_n y^{mn} - r_m y_m^{mn} \} \cos \alpha_{mn} + \{ q_n - q_m - r_n x_n^{mn} - r_m x_m^{mn} \} \sin \alpha_{mn} \dots (7)_1$$

$$\Delta Y^{mn} = q_n - q_m - r_n x_n^{mn} - r_m x_m^{mn}, \dots (7)_2$$

$$\Delta Z^{mn} = r_n - r_m \dots (7)_3$$

vii. 不静定応力の一般解答:

$$\mathfrak{X}_{mn} = a_{mn} \{ \Delta X^{mn} - \Delta X_i^{mn} - \Delta X_k^{mn} \}, \dots (5)_1$$

$$\mathfrak{Y}_{mn} = b_{mn} \{ \Delta Y^{mn} - \Delta Y_i^{mn} - \Delta Y_k^{mn} \}, \dots (5)_2$$

$$\mathfrak{Z}_{mn} = c_{mn} \{ \Delta Z^{mn} - \Delta Z_i^{mn} - \Delta Z_k^{mn} \} \dots (5)_3$$

viii. 任意の断面 (X, Y, \varphi) に於ける応力:

$$\mathfrak{M} = M_{mn}^0 + \mathfrak{X}_{mn} Y - \mathfrak{Y}_{mn} X + \mathfrak{Z}_{mn}, \dots (4)_1$$

$$\mathfrak{N} = N_{mn}^0 + \mathfrak{X}_{mn} \cos(\varphi - \alpha) + \mathfrak{Y}_{mn} \sin \varphi \dots (4)_2$$

$$\mathfrak{T} = T_{mn}^0 - \mathfrak{X}_{mn} \sin(\varphi - \alpha) + \mathfrak{Y}_{mn} \cos \varphi \dots (4)_3$$

B. 特別の場合. 対称径間より成る連続拱橋につき總ての影響を考慮したる正確なる解法。

i. 各弾性重心の確定:

$$\bar{y} = \int y d\omega / \int d\omega \dots (1)_2$$

ii. 不静定応力の弾性係数及弾性変位の計算:

$$\delta_{xx} = \int y^2 d\omega + \int \cos^2 \varphi d\omega' + \int \sin^2 \varphi d\omega'' \dots\dots\dots (5)_1$$

$$\delta_{yy} = \int x^2 d\omega + \int \sin^2 \varphi d\omega' + \int \cos^2 \varphi d\omega'' \dots\dots\dots (5)_2$$

$$\delta_{zz} = \int d\omega \dots\dots\dots (5)_3$$

$$\Delta_{xi} = \int M^0 y d\omega + \int N^0 \cos \varphi d\omega' - \int T^0 \sin \varphi d\omega'' \dots\dots\dots (5)_1$$

$$\Delta_{yi} = -\int M^0 x d\omega + \int N^0 \sin \varphi d\omega' + \int T^0 \cos \varphi d\omega'' \dots\dots\dots (5)_2$$

$$\Delta_{zi} = \int M^0 d\omega \dots\dots\dots (5)_3$$

$$\Delta_{xt} = \int \epsilon t_0 dx + \int \frac{\epsilon dt}{d} y ds \dots\dots\dots (5)_1$$

$$\Delta_{yt} = \int \epsilon t_0 dy - \int \frac{\epsilon dt}{d} x ds, \dots\dots\dots (5)_2$$

$$\Delta_{zt} = \int \frac{\epsilon dt}{d} ds, \dots\dots\dots (5)_3$$

$$\Delta_{xy} = \Delta x_j + y \Delta z_j, \dots\dots\dots (14)_1$$

$$\Delta_{yf} = \Delta y_j + x \Delta z_j, \dots\dots\dots (14)_2$$

$$\Delta_{zf} = \Delta z \dots\dots\dots (14)_3$$

iii. 九変位の定理構成:

$$\Delta_{xh} p_h + \Delta_{xi} p_i + \Delta_{xk} p_k + C_{zh} r_h + C_{zi} r_i + C_{zk} r_k = \sum \mathcal{A}_x \{ \Delta_{xi} + \Delta_{xt} - \Delta_{xf} \}, \dots\dots\dots (11)_1$$

$$B_{yh} q_h + B_{yi} q_i + B_{yk} q_k + C_{yh} r_h + C_{yi} r_i + C_{yk} r_k = \sum \mathcal{B}_y \{ \Delta_{yi} + \Delta_{yt} - \Delta_{yf} \}, \dots\dots\dots (11)_2$$

$$\begin{aligned} \Delta_{zh} p_h + \Delta_{zi} p_i + \Delta_{zk} p_k + B_{zh} q_h + B_{zi} q_i + B_{zk} q_k + C_{zh} r_h + C_{zi} r_i + C_{zk} r_k \\ = \sum \mathcal{A}_z \{ \Delta_{xi} + \Delta_{xt} - \Delta_{xf} \} + \sum \mathcal{B}_z \{ \Delta_{yi} + \Delta_{yt} - \Delta_{yf} \} + \sum \mathcal{C}_z \{ \Delta_{xi} + \Delta_{xt} - \Delta_{xf} \} \dots\dots\dots (11)_3 \end{aligned}$$

vi. 格点弾性変位の一般解答:

$$p = \psi_x(\Delta_i, \Delta_t, \Delta_f), \dots\dots\dots (15)_1$$

$$q = \psi_y(\Delta_i, \Delta_t, \Delta_f), \dots\dots\dots (15)_2$$

$$r = \psi_z(\Delta_i, \Delta_t, \Delta_f), \dots\dots\dots (15)_3$$

v. 不静定応力の總変位算定:

$$\Delta_x^{mn} = p_n - p_m + r_n y_n^{mn} - r_m y_m^{mn}, \dots\dots\dots (7)_1$$

$$\Delta_y^{mn} = q_n - q_m - r_n x_n^{mn} - r_m x_m^{mn}, \dots\dots\dots (7)_2$$

$$\Delta_z^{mn} = r_n - r_m \dots\dots\dots (7)_3$$

vi. 不静定応力の一般解法:

$$\mathfrak{E}_{mn} = a_{mn} \{ \Delta_x^{mn} - \Delta_{xt}^{mn} - \Delta_{xt}^{mn} \} \dots\dots\dots (5)_1$$

$$\mathfrak{Y}_{mn} = b_{mn} \{ \Delta_y^{mn} - \Delta_{yt}^{mn} - \Delta_{yt}^{mn} \} \dots\dots\dots (5)_2$$

$$\mathfrak{Z}_{mn} = c_{mn} \{ \Delta_z^{mn} - \Delta_{zt}^{mn} - \Delta_{zt}^{mn} \} \dots\dots\dots (5)_3$$

vii. 各断面に於ける応力計算:

$$M = M_{mn}^0 + \bar{x}_{mn}y - \bar{y}_{mn}x + \beta_{mn}, \dots (4)_1$$

$$N = N_{mn}^0 + \bar{x}_{mn} \cos \varphi + \bar{y}_{mn} \sin \varphi, \dots (4)_2$$

$$T = T_{mn}^0 - \bar{x}_{mn} \sin \varphi + \bar{y}_{mn} \cos \varphi \dots (4)_3$$

C. 近似解法 対称径間より成る連続拱橋に於て重力荷重のみを考慮したる場合の略算法。

i. 弾性重心の決定:

$$\bar{y} = \int y d\omega / \int d\omega \dots (1)_2$$

ii. 弾性係数及荷重に由る弾性変位:

$$a = 1 / \int y^2 d\omega, \quad b = 1 / \int x^2 d\omega, \quad c = 1 / \int d\omega, \dots (21)$$

$$\Delta_{xi} = \int M^0 y d\omega, \quad \Delta_{yi} = - \int M^0 x d\omega, \quad \Delta = \int M^0 d\omega \dots (19)$$

iii. 六変位の定理構成:

$$\Delta_{zh} \rho_h + \Delta_{zi} \rho_i + \Delta_{zr} \rho_r + C_{zh} v_h + C_{zi} v_i + C_{zr} v_r = \sum A_{z\alpha} \Delta_{z\alpha} \dots (17)_1$$

$$\Delta_{zh} \rho_h + \Delta_{zi} \rho_i + \Delta_{zr} \rho_r + C_{zh} v_h + C_{zi} v_i + C_{zr} v_r = \sum A_{z\alpha} \Delta_{z\alpha} + \sum \beta_{z\epsilon} \Delta_{y\epsilon} + \sum C_{z\delta} \Delta_{\delta} \dots (17)_2$$

iv. 格点変位 ρ, v の算定:

$$\rho = \psi_{\rho}(\Delta_{zi}, \Delta_{yi}, \Delta_{zi}), \dots (18)_1$$

$$v = \psi_{v}(\Delta_{zi}, \Delta_{yi}, \Delta_{zi}) \dots (18)_2$$

v. 不静定応力總変位の計算:

$$\Delta_x^{mn} = \rho_n - \rho_m + \gamma_n y_n^{mn} - \gamma_m y_m^{mn}, \dots (19)_1$$

$$\Delta_y^{mn} = -\gamma_n x_n^{mn} - \gamma_m x_m^{mn}, \dots (19)_2$$

$$\Delta_z^{mn} = \gamma_n - \gamma_m. \dots (19)_3$$

vi. 不静定応力の解答:

$$\bar{x}_{mn} = a_{mn} \{ \Delta_x^{mn} - \Delta_{xi}^{mn} \}, \dots (18)_1$$

$$\bar{y}_{mn} = b_{mn} \{ \Delta_y^{mn} - \Delta_{yi}^{mn} \}, \dots (19)_2$$

$$\beta_{mn} = c_{mn} \{ \Delta_z^{mn} - \Delta_{zi}^{mn} \} \dots (19)_3$$

vii. 任意の断面に於ける応力決定:

$$M = M_{mn}^0 + \bar{x}_{mn}y - \bar{y}_{mn}x + \beta_{mn}, \dots (4)_1$$

$$N = N_{mn}^0 + \bar{x}_{mn} \cos \varphi + \bar{y}_{mn} \sin \varphi, \dots (4)_2$$

$$T = T_{mn}^0 - \bar{x}_{mn} \sin \varphi + \bar{y}_{mn} \cos \varphi \dots (4)_3$$

VII. 応用例題

提案諸定理の応用を示し且連続拱橋の変形及応力作用を攻究する爲に各種の例題につき其の解明を試みた。或例題については活荷重の外温度の変化及基礎移動に因る応力をも算定し、又他の例に於ては近似解法の精度及其の応用範囲等につき研究吟味を行つた。而して其等の結果を感線及応力図を以て明示したものが、末尾の図-4~23である。以下各例題につき説明を加へる。

【例題 1.】 2 径間の連続拱橋

弾性橋脚を有する對稱 2 径間の連続拋物線拱橋(図-4)に就き荷重, 温度変化及基礎移動等に因る其の變形及応力の一般解を求む。與へられたる拱橋の寸法は

$$\begin{aligned} l &= 45.000 \text{ m}, & h &= 20.000 \text{ m}, & f &= 9.000 \text{ m}, & d_0 &= 2.000 \text{ m}, \\ d_c &= 0.900 \text{ m}, & d_B &= 3.000 \text{ m}, & d_s &= 1.630 \text{ m} \end{aligned}$$

而して拱肋及橋脚の断面変化は次に示す如く其の拋物線及直線式の変化を採るものとす。

$$g = 1 - 4 \{1 - g_s\} \{x/l\}^2, \quad d = d_0 + \{d_B - d_0\} \{y/h\}.$$

上式中 g_s は起拱點に於ける g の値である。

其の係數及常數を次の如く假定する。

$$\begin{aligned} E &= 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, & EI_0 &= EI_c = 121.5 \times 10^6 \text{ m.kg}, & G &= 8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \\ m &= 0.0675, & \kappa &= 1.20, & n &= 0.2025, & \epsilon &= 10^{-5} \end{aligned}$$

本問題は對稱徑間なるを以て計算方法 B の順序に従つて解けば宜い。

i. 先づ最初に拱肋及橋脚の弾性重心を決定すると

$$x_b = 23.500 \text{ m}, \quad x_b'' = 0, \quad y_b = 6.847 \text{ m}, \quad y_b'' = 8.021 \text{ m}$$

となる。

ii. 拱肋及橋脚の基本弾性変位の算定:

$$\begin{aligned} EI_0/a &= EI \delta_{xx}^{bA} = \Sigma g y^2 \Delta x + m \Sigma g' \cos^2 \varphi \Delta c + n \Sigma g'' \sin^2 \varphi \Delta c = 170.710 \text{ m}^2 \text{ kg}, \\ EI_0/b &= EI_c \delta_{yy}^{bA} = \Sigma g x^2 \Delta x + m \Sigma g' \sin^2 \varphi \Delta x + n \Sigma g'' \cos^2 \varphi \Delta c = 4\,033.226 \text{ m}^2 \text{ kg}, \\ EI_0/c &= EI_c \delta_{zz}^{bA} = \Sigma g \Delta x = 33.234 \text{ m}^2 \text{ kg}, \\ EI_0/a_y &= EI_c \delta_{xy}^{bB} = \Sigma g y^2 \Delta y + n \Sigma g'' \Delta y = 32.987 \text{ m}^2 \text{ kg}, \\ EI_0/b_y &= EI_c \delta_{yy}^{bB} = m \Sigma g' \Delta y = 0.4926 \text{ m}^2 \text{ kg}, \\ EI_0/c_y &= EI_c \delta_{zz}^{bB} = \Sigma g \Delta y = 1.0125 \text{ m}^2 \text{ kg}. \end{aligned}$$

iii. 未知の格點変位は p_b, q_b, r_b の三つである, 之に對し九変位の定理より次の 3 式を得る。

$$\begin{aligned} 0.042\,031 p_b - 0.162\,947 r_b &= \mathfrak{S}_b, & 2.030\,375 q_b &= \mathfrak{B}_b, \\ -0.162\,949 p_b + 3.798\,500 r_b &= \mathfrak{M}_b. \end{aligned}$$

iv. 前式を解けば格點弾性変位の一般解が定まる。即ち

$$p_b = 28.538 (5 \mathfrak{S}_b + 1.224\,24 \mathfrak{M}_b), \quad q_b = 0.492\,52 \mathfrak{B}_b, \quad r_b = 1.224\,24 \mathfrak{S}_b + 0.315\,78 \mathfrak{M}_b.$$

上式中の $\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ に荷重, 温度の変化又は基礎移動等に因る値を代入すれば其々の変位確定し, 以下總ての問題が解けることになる。

v. 格點変位決すれば各不静定応力の總変位は一般に次式に依つて與へられる。

$$\begin{aligned} \Delta_x^{bA} &= p_b - \Delta x_A + r_b y_b - \Delta z_A y_A, & \Delta_x^{bC} &= \Delta c - p_b + \Delta z_C y_C - r_b y_b, & \Delta_x^{bB} &= \Delta x_B - p_b + \Delta z_B y_B + r_b y_b, \\ \Delta_y^{bA} &= q_b - \Delta y_A - r_b x_b - \Delta z_A x_A, & \Delta_y^{bC} &= \Delta y_C - q_b - \Delta z_C x_C - r_b x_b, & \Delta_y^{bB} &= \Delta y_B - q_b, \\ \Delta_z^{bA} &= r_b - \Delta z_A, & \Delta_z^{bC} &= \Delta z_C - r_b, & \Delta_z^{bB} &= \Delta z_B - r_b \end{aligned}$$

式中 A, B, C の添字ある変位は其々の基礎変位を表すものである。

vi. 總変位定まれば次は不静定応力の一般解を求めるのであるが, 此の際問題を簡明にする爲荷重, 温度変化及基礎移動等の影響を別々に解くを得策とする。依つて先づ重力荷重の影響のみを考へる。

與へられたる拱橋が對稱徑間なるを以て荷重は 1 径間例へば $b-A$ に於けるものとみ採れば宜い。然る時は

$$\mathfrak{S}_b = a \Delta_{x1}^{bA}, \quad \mathfrak{B}_b = b \Delta_{y1}^{bA}, \quad \mathfrak{M}_b = a y_1 \Delta_{z1}^{bA} - b x_b \Delta_{y1}^{bA} + c \Delta_{z1}^{bA}$$

となり、式中荷重の項は

$$\begin{aligned} EI_c \Delta x^{bA} &= \Sigma M_{bA}^0 g y \Delta x + m \Sigma N_{bA}^0 g' \cos \varphi \Delta x - r \Sigma T_{bA}^0 g'' \sin \varphi \Delta x, \\ EI_c \Delta y^{bA} &= -\Sigma M_{bA}^0 g x \Delta x + m \Sigma N_{bA}^0 g' \sin \varphi \Delta x + n \Sigma T_{bA}^0 g' \cos \varphi \Delta x, \\ EI_c \Delta z^{bA} &= \Sigma M_{bA}^0 g \Delta x. \end{aligned}$$

是等は単一径間の場合に相當するもので直に算定出来るものである。

上記の \mathfrak{S}_b , \mathfrak{S}_b , \mathfrak{M}_b の値を格點変位の一般解に代入すれば

$$\begin{aligned} p_b &= 0.216\ 269 \Delta x^{bA} - 0.006\ 829 \Delta y^{bA} + 0.036\ 835 \Delta z^{bA}, \\ q_b &= 0.000\ 122 \Delta y^{bA}, \\ r_b &= 0.019\ 836 \Delta x^{bA} - 0.001\ 762 \Delta y^{bA} + 0.009\ 502 \Delta z^{bA}, \end{aligned}$$

となり、之に順次各點に於ける荷重の値を入れると 図-7 に示す格點彈性変位の感線が得られる。

斯くして格點変位定まれば次に各不靜定応力を算定することが出来る。前同様荷重が径間 b-A にのみ載るものとすれば求むる不靜定応力は次式に依つて算出せられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{bA} &= \alpha \{ \Delta x^{bA} - \Delta x^{bA} \}, & \mathfrak{X}_{bC} &= \alpha \Delta z^{bC}, & \mathfrak{X}_{bB} &= \alpha_1 \Delta z^{bB}, \\ \mathfrak{Y}_{bA} &= b \{ \Delta y^{bA} - \Delta y^{bA} \}, & \mathfrak{Y}_{bC} &= b \Delta y^{bC}, & \mathfrak{Y}_{bB} &= b_1 \Delta y^{bB}, \\ \mathfrak{Z}_{bA} &= c \{ \Delta z^{bA} - \Delta z^{bA} \}, & \mathfrak{Z}_{bC} &= \bar{c} \Delta z^{bC}, & \mathfrak{Z}_{bB} &= c_1 \Delta z^{bB}. \end{aligned}$$

是等不靜定応力の感線を示したものが 図-7 である。

vii. 不靜定応力決定すれば任意の断面 (x, y, φ) に於ける応力は

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= M_{bA}^0 + \mathfrak{X}_b y - \mathfrak{Y}_{bA} x + \mathfrak{Z}_{bA}, & \mathfrak{N} &= N_{bA}^0 + \mathfrak{X}_{bA} \cos \varphi + \mathfrak{Y}_{bA} \sin \varphi, \\ \mathfrak{T} &= T_{bA}^0 - \mathfrak{X}_{bA} \sin \varphi + \mathfrak{Y}_{bA} \cos \varphi \end{aligned}$$

に依つて求められる。各起拱點、拱頂、其の中間及橋脚上下端等に於ける応力を算定し、其等の感線を畫いたものが 図-8 である。

各断面中點線を以て記入したものは何れも単一径間の場合に相當するものであつて、彈性橋脚の影響が如何に顯著なるかを一目して知ることが出来る。

viii. 温度変化の影響：拱橋全体に温度の均一変化 $t_0 = -10^\circ\text{C}$ が起つたものとして之に因る応力図を求める。

本橋は橋脚の中心線に對し構造對稱なるを以て、此の場合格點変位 $p_b = 0, r_b = 0$ となり、殘る q_b は六変位の定理より直に

$$q_b = -\epsilon t_0 h / \{1 + 2b/b_p\} = 0.300 \text{ cm}$$

を得る。従つて其の不靜定応力は

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{bA} &= -\alpha \epsilon t_0 l = 3\ 202.8 \text{ kg}, & \mathfrak{X}_{bB} &= 0, \\ \mathfrak{Y}_{bA} &= -b \epsilon t_0 h / \{1 + 2b/b_p\} = 60.2 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{bB} &= -2b_p \epsilon t_0 h / \{2 + b_p/b\} = 120.5 \text{ kg}, \\ \mathfrak{Z}_{bA} &= 0, & \mathfrak{Z}_{bB} &= 0, \end{aligned}$$

斯くして不靜定応力定まれば各點の応力は容易に求められる。 図-9 は假定の温度変化に因る各點の $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}$ を示した応力図である。

ix. 基礎移動の影響：最後に基礎変位の検討をなすに當つて第一に橋臺 A 點の動きに就て、次に橋脚底 B の沈下に對し其々一般解を定め、更に其の動きを $\Delta z = 1 \text{ cm}, \Delta y = 1 \text{ cm}, \Delta x = 1/1\ 000$ と假想すれば、其の結果如何なる応力を生ずるか、其々の解答を求めて見る。

先づ A 點に於ける $\Delta x_A, \Delta y_A, \Delta z_A$ の変位に對し格點変位一般解の $\mathfrak{Q}_b, \mathfrak{B}_b, \mathfrak{M}_b$ は

$$\mathfrak{Q}_b = a \{ \Delta x_A + y_A \Delta z_A \}, \quad \mathfrak{B}_b = b \{ \Delta y_A + x_A \Delta z_A \}, \quad \mathfrak{M}_b = \alpha y_b \Delta x_A - b x_b \Delta y_A + \{ c - b x_A x_b + \alpha y_A y_b \} \Delta z_A$$

となり、之を代入すれば格點変位の一般解は

$$p_b = 0.216273 \Delta x_A - 0.006830 \Delta y_A + 1.363913 \Delta z_A, \quad q_b = 0.000122 \Delta y_A + 0.002748 \Delta z_A,$$

$$r_b = 0.019836 \Delta x_A - 0.001762 \Delta y_A + 0.105677 \Delta z_A$$

となる。従つて不靜定応力の數値は

$$\mathfrak{X}_{bA} = a \Delta x^{bA} = -632569 \Delta x_A - 18443 \Delta y_A - 4646462 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Y}_{bA} = b \Delta y^{bA} = -18443 \Delta x_A - 39680 \Delta y_A - 1027930 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Z}_{bA} = c \Delta z^{bA} = 99479 \Delta x_A - 8835 \Delta y_A - 448504 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{X}_{bC} = \alpha \Delta x^{bC} = -343746 \Delta x_A + 18443 \Delta y_A - 2038003 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Y}_{bC} = b \Delta y^{bC} = -18443 \Delta x_A + 1633 \Delta y_A - 98370 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Z}_{bC} = c \Delta z^{bC} = -99479 \Delta x_A + 8835 \Delta y_A - 529973 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{X}_{bB} = \alpha_F \Delta x^{bB} = -288823 \Delta x_A - 36886 \Delta y_A - 2608459 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Y}_{bB} = b_F \Delta y^{bB} = -41313 \Delta y_A - 929550 \Delta z_A,$$

$$\mathfrak{Z}_{bB} = c_F \Delta z^{bB} = -3265238 \Delta x_A + 239979 \Delta y_A - 17395422 \Delta z_A$$

各點に於ける橋臺 A 點移動の影響を知る爲に

$$\Delta x_A = 1 \text{ cm}, \quad \Delta y_A = 1 \text{ cm}, \quad \Delta z_A = 1/1000,$$

を假定し其々の応力図を畫いたものが 圖-9 である。

次に橋脚底 B 點の $\Delta x_B, \Delta y_B, \Delta z_B$ なる移動に對し九變位の定理より格點変位を算定すれば

$$p_b = 0.567454 \Delta x_B + 8.006599 \Delta z_B, \quad q_b = 0.999756 \Delta y_B,$$

$$r_b = -0.039673 \Delta x_B - 0.163354 \Delta z_B$$

となり、更に不靜定応力の一般解を求めると

$$\mathfrak{X}_{bA} = 210552 \Delta x_B + 4902544 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{Y}_{bA} = 26890 \Delta x_B + 30117 \Delta y_B + 110723 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{Z}_{bA} = -145041 \Delta x_B - 597214 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{X}_{bC} = -210552 \Delta x_B - 4902544 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{Y}_{bC} = 26890 \Delta x_B - 30117 \Delta y_B + 110723 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{Z}_{bC} = 145041 \Delta x_B + 597214 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{X}_{bB} = 421104 \Delta x_B + 9805088 \Delta z_B,$$

$$\mathfrak{Y}_{bB} = 60234 \Delta y_B$$

$$\mathfrak{Z}_{bB} = 4760717 \Delta x_B + 139602427 \Delta z_B$$

前同様 $\Delta x_B = 1 \text{ cm}, \quad \Delta y_B = 1 \text{ cm}, \quad \Delta z_B = 1/1000$

なる基礎變位に對し其々の \mathfrak{M} 応力図を畫けば 圖-9 の左下の圖が得られる。

上記二つの結果により基礎移動の影響の如何に甚大であるかを知ることが出来る。

【例題 2.】 3 径間の連続拱橋

圖-5 に示すか如き各起拱點同一水平線上に在る對稱 3 径間連続拱橋の荷重、温度及基礎移動等に因る変形及応力の一般解を求む。

拱肋及橋脚の寸法は

	径間 Ab	径間 bc	橋脚 bB
l (m)	30.000	45.000	h (m) 15.000
f (m)	7.500	9.000	d_b (m) 2.000
d_a (m)	0.700	0.900	d_B (m) 3.000
ν_s	0.240	0.210	

$$\nu = \frac{I_c \cos \varphi_c}{I \cos \varphi} = 1 - 4 \{1 - \nu_s\} \{x/l\}^2, \quad d(m) = 2 + y/15$$

上式中 ν_s は起拱點に於ける ν の値である。

i. 先づ各部分の弾性重心を算定し各重心より格點 b に至る距離を求めると

$$\begin{aligned} x_b^{bA} &= 15.000 \text{ m}, & x_b^{bC} &= 22.500 \text{ m}, & x_b^{bB} &= 0, \\ y_b^{bA} &= 5.670 \text{ m}, & y_b^{bC} &= 6.799 \text{ m}, & y_b^{bB} &= 6.063 \text{ m} \end{aligned}$$

ii. 次に各常數及弾性係數を算定すれば、

$$EI_0 = 2 \times 10^8 \times \frac{1}{12} (1)^3 \times 10^4 = \left\{ \frac{1}{6} \right\} 10^9 \text{ m}^2 \text{ kg}, \quad m = 1/12, \quad n = 1/4$$

	径間 Ab	径間 bc	橋脚 bB
EI_0/a (m ³ .kg)	237.545 5	233.040 6	19.126 82
EI_0/b (m ³ .kg)	3 594.455 7	5 571.749 6	0.506 83
EI_0/c (m ³ .kg)	65.306 1	44.917 4	1.041 67

iii. 格點弾性変位を求むる爲に九変位の定理を bc 兩格點に適用すれば次の 6 式を得る。

$$\begin{aligned} 60.733 \ 42 \ p_b - 263.954 \ 36 \ v_b - 4.291 \ 10 \ p_c - 29.175 \ 05 \ v_c &= \mathfrak{S}_b \times 10^8, \\ 1 \ 973.499 \ 66 \ q_b - 0.134 \ 86 \ v_b - 0.179 \ 48 \ q_c + 4.038 \ 23 \ v_c &= \mathfrak{S}_c \times 10^8, \\ - 263.954 \ 36 \ p_b - 0.134 \ 86 \ q_b + 3 \ 406.732 \ 58 \ v_b - 29.175 \ 05 \ p_c - 4.038 \ 23 \ q_c - 129.763 \ 27 \ v_c &= \mathfrak{M}_b \times 10^8, \\ - 4.291 \ 10 \ p_b - 29.175 \ 05 \ v_b + 60.733 \ 42 \ p_c - 263.954 \ 36 \ v_c &= \mathfrak{S}_c \times 10^8, \\ - 0.179 \ 48 \ q_b - 4.038 \ 23 \ v_b + 1 \ 973.499 \ 66 \ q_c + 0.134 \ 86 \ v_c &= \mathfrak{S}_c \times 10^8, \\ - 29.175 \ 05 \ p_b + 4.038 \ 23 \ q_b - 129.763 \ 27 \ v_b - 263.954 \ 36 \ p_c + 0.134 \ 86 \ q_c + 3 \ 406.732 \ 58 \ v_c &= \mathfrak{M}_c \times 10^8 \end{aligned}$$

iv. 之を解けば格點弾性変位の一般解が決定する、即ち

$$\begin{aligned} p_b &= 26.620 \ 672 \ \mathfrak{S}_b - 0.001 \ 504 \ \mathfrak{S}_c + 2.148 \ 237 \ \mathfrak{M}_b + 6.413 \ 775 \ \mathfrak{S}_c + 0.004 \ 341 \ \mathfrak{S}_c + 0.806 \ 747 \ \mathfrak{M}_c, \\ q_b &= - 0.001 \ 504 \ \mathfrak{S}_b + 0.506 \ 716 \ \mathfrak{S}_c - 0.000 \ 170 \ \mathfrak{M}_b - 0.004 \ 341 \ \mathfrak{S}_c + 0.000 \ 046 \ \mathfrak{S}_c - 0.000 \ 956 \ \mathfrak{M}_c, \\ v_b &= 2.148 \ 237 \ \mathfrak{S}_b - 0.000 \ 170 \ \mathfrak{S}_c + 0.470 \ 657 \ \mathfrak{M}_b + 0.806 \ 747 \ \mathfrak{S}_c + 0.000 \ 956 \ \mathfrak{S}_c + 0.098 \ 832 \ \mathfrak{M}_c, \\ p_c &= 6.413 \ 775 \ \mathfrak{S}_b - 0.004 \ 341 \ \mathfrak{S}_c + 0.806 \ 747 \ \mathfrak{M}_b + 26.620 \ 672 \ \mathfrak{S}_c + 0.001 \ 504 \ \mathfrak{S}_c + 2.148 \ 237 \ \mathfrak{M}_c, \\ q_c &= 0.004 \ 341 \ \mathfrak{S}_b + 0.000 \ 046 \ \mathfrak{S}_c + 0.000 \ 956 \ \mathfrak{M}_b + 0.001 \ 504 \ \mathfrak{S}_c + 0.506 \ 716 \ \mathfrak{S}_c + 0.000 \ 170 \ \mathfrak{M}_c, \\ v_c &= 0.801 \ 747 \ \mathfrak{S}_b - 0.000 \ 956 \ \mathfrak{S}_c + 0.098 \ 832 \ \mathfrak{M}_b + 2.148 \ 237 \ \mathfrak{S}_c + 0.000 \ 170 \ \mathfrak{S}_c + 0.470 \ 657 \ \mathfrak{M}_c. \end{aligned}$$

上式の結果を視るに構造が中央径間の中心垂直線に對し對稱なるを以て各弾性係數が對稱となり、且其等の數値は「マックスウェル」の法則に依つて其の正否を檢正することが出来る。

上記一般解の \mathfrak{S} , \mathfrak{M} に荷重、溫度或は基礎沈下等の與へられたる數値を代入すれば總ての格點変位確定し、其餘の問題は何れも容易に推算出来ることになる。

v. 先づ活荷重の影響を知る爲 \mathfrak{S} , \mathfrak{M} を各径間に載る荷重の項にて表せば

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_b \times 10^8 &= 4 \ 209 \ 724 d_{x_1}^{bA} - 4 \ 291 \ 104 d_{x_1}^{bC} \\ \mathfrak{S}_c \times 10^8 &= 0 \ 278 \ 214 d_{y_1}^{bA} - 0 \ 179 \ 484 d_{y_1}^{bC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_b \times 10^3 &= 23.869\ 11 \Delta_{xi}^{bA} - 4.173\ 09 \Delta_{yi}^{bA} + 15.312\ 50 \Delta_{zi}^{bA} \\ &\quad - 29.175\ 17 \Delta_{xi}^{bc} - 4.038\ 23 \Delta_{yi}^{bc} - 22.263\ 08 \Delta_{zi}^{bc}, \\ \mathfrak{M}_c \times 10^3 &= 4.291\ 10 \Delta_{xi}^{cB} - 4.209\ 72 \Delta_{xi}^{cD}, \\ \mathfrak{M}_s \times 10^3 &= 0.179\ 48 \Delta_{yi}^{cB} - 0.278\ 21 \Delta_{yi}^{cD}, \\ \mathfrak{M}_s \times 10^3 &= 29.175\ 17 \Delta_{xi}^{cB} - 4.038\ 23 \Delta_{yi}^{cB} + 22.263\ 08 \Delta_{zi}^{cB} \\ &\quad - 23.869\ 11 \Delta_{xi}^{cD} - 4.173\ 09 \Delta_{yi}^{cD} - 15.312\ 50 \Delta_{zi}^{cD}, \end{aligned}$$

となり、是等を iv の一般式に代入すれば各點の荷重に對する格點変位の數値が得られる。圖-10 は其の感線を示すものである。

vi. 次は不靜定応力の算定、其の一般式は

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{bA} &= a_{bA} \{ \Delta_x^{bA} - \Delta_{xi}^{bA} \}, & \mathfrak{Y}_{bA} &= b_{bA} \{ \Delta_y^{bA} - \Delta_{yi}^{bA} \}, & \mathfrak{Z}_{bA} &= c_{bA} \{ \Delta_z^{bA} - \Delta_{zi}^{bA} \}, \\ \mathfrak{X}_{bc} &= a_{bc} \{ \Delta_x^{bc} - \Delta_{xi}^{bc} \}, & \mathfrak{Y}_{bc} &= b_{bc} \{ \Delta_y^{bc} - \Delta_{yi}^{bc} \}, & \mathfrak{Z}_{bc} &= c_{bc} \{ \Delta_z^{bc} - \Delta_{zi}^{bc} \}, \\ \mathfrak{X}_{cD} &= a_{cD} \{ \Delta_x^{cD} - \Delta_{xi}^{cD} \}, & \mathfrak{Y}_{cD} &= b_{cD} \{ \Delta_y^{cD} - \Delta_{yi}^{cD} \}, & \mathfrak{Z}_{cD} &= c_{cD} \{ \Delta_z^{cD} - \Delta_{zi}^{cD} \}, \\ \mathfrak{X}_{bB} &= a_{bB} \Delta_x^{bB}, & \mathfrak{Y}_{bB} &= b_{bB} \Delta_y^{bB}, & \mathfrak{Z}_{bB} &= c_{bB} \Delta_z^{bB} \end{aligned}$$

尚上式中各不靜定応力の總変位は

$$\begin{aligned} \Delta_x^{bA} &= p_a + r_b y_b^{bA}, & \Delta_y^{bA} &= q_b - r_b x_b^{bA}, & \Delta_z^{bA} &= r_b, \\ \Delta_x^{bc} &= p_a - p_b + r_c y_c^{bc} - r_b y_b^{bc}, & \Delta_y^{bc} &= q_c - q_b - r_c x_c^{bc} - r_b x_b^{bc}, & \Delta_z^{bc} &= r_c - r_b, \\ \Delta_x^{cD} &= -p_c - r_c y_c^{cD}, & \Delta_y^{cD} &= -q_c - r_c x_c^{cD}, & \Delta_z^{cD} &= -r_c, \\ \Delta_x^{bB} &= -p_b + r_b y_b^{bB}, & \Delta_y^{bB} &= -q_b, & \Delta_z^{bB} &= -r_b \end{aligned}$$

であるから、以上の結果より容易に各不靜定応力算定出来る。而して圖-10 は其等の感線を示したものである。

vii. 前例題と同様に各断面に於ける応力 \mathfrak{M} , \mathfrak{N} , \mathfrak{X} を

$$\mathfrak{M} = M^0 + \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x + \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{N} = N^0 + \mathfrak{X} \cos \varphi + \mathfrak{Y} \sin \varphi, \quad \mathfrak{X} = T^0 - \mathfrak{X} \sin \varphi + \mathfrak{Y} \cos \varphi$$

より算出して其等の感線を図示したものが圖-11 である。

viii. 温度変化の影響を知る爲に $t_0 = +10^\circ\text{C}$ の均一変化を假定し、其に由る格點変位を九変位の定理より求める

$$\begin{aligned} p_b &= -0.223\ 46 \times 10^{-3} \text{ m}, & q_b &= -1.499\ 98 \times 10^{-3} \text{ m}, & r_b &= -0.033\ 48 \times 10^{-3} \\ p_c &= +0.223\ 46 \times 10^{-3} \text{ m}, & q_c &= -1.449\ 98 \times 10^{-3} \text{ m}, & r_c &= +0.033\ 48 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

となり、従つて不靜定応力は

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{bA} &= -2\ 394.83 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{bA} &= -46.26 \text{ kg}, & \mathfrak{Z}_{bA} &= -85.45 \text{ m.kg}, \\ \mathfrak{X}_{bc} &= -2\ 573.10 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{bc} &= 0, & \mathfrak{Z}_{bc} &= +248.46 \text{ m.kg}, \\ \mathfrak{X}_{cD} &= -2\ 394.83 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{cD} &= +46.26 \text{ kg}, & \mathfrak{Z}_{cD} &= -85.45 \text{ m.kg}, \\ \mathfrak{X}_{bB} &= +178.27 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{bB} &= -46.26 \text{ kg}, & \mathfrak{Z}_{bB} &= +5\ 356.83 \text{ m.kg}, \\ \mathfrak{X}_{cC} &= -178.27 \text{ kg}, & \mathfrak{Y}_{cC} &= -46.26 \text{ kg}, & \mathfrak{Z}_{cC} &= -5\ 356.83 \text{ m.kg} \end{aligned}$$

次に是等の応力に由る各點の曲力率を算定して図示したものが圖-12 である。此の応力図に依つて知る如く各起拱點の外縁及各拱頂の内縁に著しき応圧力の現るゝを見る。

ix. 最後に橋脚底 B の移動に由る影響を吟味する爲に

$$\Delta x_B = 1 \text{ cm}, \quad \Delta y_B = 1 \text{ cm}, \quad \Delta z_B = 1/1\ 000,$$

を想定し、其等に由る応力図を求める。

先づ九変位の定理より此の場合の格點変位を算出すれば一般に、

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.710811d_{xB} - 0.992937d_{yB} + 8.414632d_{zB}, & p_2 &= 0.079591d_{xB} - 0.038554d_{yB} + 1.435763d_{zB}, \\
 q_1 &= -0.000025d_{xB} + 0.939772d_{yB} - 0.000384d_{zB}, & q_2 &= -0.000073d_{xB} + 0.000091d_{yB} + 0.001237d_{zB}, \\
 r_1 &= -0.036832d_{xB} - 0.790335d_{yB} + 3.122221d_{zB}, & r_2 &= 0.010849d_{xB} - 0.031837d_{yB} + 0.171833d_{zB}
 \end{aligned}$$

となり、之を代入して不静定応力を求めると

$$\begin{aligned}
 X_{1A} &= 351.993d_{xB} - 341.6d_{yB} + 6.390121d_{zB}, & X_{1B} &= 571.341d_{xB} + 8.131d_{yB} + 11.007057d_{zB}, \\
 Y_{1A} &= 25.651d_{xB} + 46.590d_{yB} - 85.023d_{zB}, & Y_{1B} &= 8.131d_{xB} + 74.998d_{yB} + 126.330d_{zB}, \\
 Z_{1A} &= -94.126d_{xB} - 85.6d_{yB} + 311.915d_{zB}, & Z_{1B} &= 5.901078d_{xB} + 53.661d_{yB} + 140.443885d_{zB}, \\
 X_{2C} &= -219.843d_{xB} - 11.547d_{yB} - 4.616976d_{zB}, & X_{2C} &= -120.340d_{xB} - 25.062d_{yB} - 2.811342d_{zB}, \\
 Y_{2C} &= 17.520d_{xB} - 28.408d_{yB} - 211.353d_{zB}, & Y_{2C} &= 25.062d_{xB} - 29.716d_{yB} - 77.917d_{zB}, \\
 Z_{2C} &= 177.108d_{xB} - 5.757d_{yB} + 258.313d_{zB}, & Z_{2C} &= -17.5875d_{xB} + 301.89^{\circ}d_{yB} - 30.693610d_{zB}, \\
 X_{3D} &= -99.003d_{xB} + 13.515d_{yB} - 1.895594d_{zB}, \\
 Y_{3D} &= -7.542d_{xB} + 1.308d_{yB} - 133.436d_{zB}, \\
 Z_{3D} &= -27.683d_{xB} + 4.815d_{yB} - 489.58^{\circ}d_{zB},
 \end{aligned}$$

となる。上記の一般解答に夫々変位の値を入れて各點の M を計算し之を図に示したものが図-12 である。是に依つて觀れば基礎沈下影響の如何を精細に理解することが出来る。尙 d_{yB} に由る影響は d_{zB} に比して割合に小なるも、 d_{zB} 及 d_{xB} に由る起拱點、拱頂及橋脚殊に其の底部に於ける曲力率は極めて甚大なるものがある。

【例題 3】 5 径間の連続拱橋

彈性橋脚を有する對稱 5 径間の連続拱橋(圖-6) に就き格點変位の一般解を求め、且重力活荷重の影響を吟味する爲彈性変位及応力の各感線を畫く。

與へられたる拱橋の拱軸は何れも拋物線形のものとし、其等の寸法及常數を次の如きものとする。

	径間 Ab	径間 bc	径間 cd	橋脚 bB	橋脚 cC	
l (m)	30.000	45.000	50.000	h (m)	15.000	20.000
f (m)	7.500	9.000	10.000	d_b (m)	2.000	2.200
d_c (m)	0.700	0.900	1.000	d_u (m)	3.000	3.500
v_s	0.240	0.210	0.200	d (m)	$2+y/15$	$2.2+1.3\{y/20\}$
	$v = 1 - 4\{1 - u_s\} \{x/l\}^2,$			$m = 1/12,$	$n = 1/4.$	
	$EI_0 = \{1/6\} 10^6 \text{m}^2 \text{kg},$					

i. 先づ拱肋及橋脚の彈性重心を算定し、其の重心より b, c の兩格點に至る距離を求めると

$$\begin{aligned}
 x_{v^{bA}} &= 15.000 \text{ m} & y_{v^{bA}} &= 5.670 \text{ m} & x_{v^{bB}} &= 0, & y_{v^{bB}} &= 6.063 \text{ m}, \\
 x_{v^{cA}} &= 22.500 \text{ m} & y_{v^{cA}} &= 6.799 \text{ m} & & & & \\
 x_{v^{cB}} &= 23.500 \text{ m} & y_{v^{cB}} &= 6.799 \text{ m} & x_{v^{cC}} &= 0, & y_{v^{cC}} &= 7.744 \text{ m}, \\
 x_{v^{cD}} &= 25.000 \text{ m} & y_{v^{cD}} &= 7.622 \text{ m} & & & &
 \end{aligned}$$

ii. 各部分の彈性係數を算出すると

	径間 Ab	径間 bc	径間 cd	橋脚 bB	橋脚 cC
EI_0/a	237.5455	233.0406	229.6123	19.12682	31.16516
EI_0/b	3594.4157	5571.7496	5461.0876	0.50683	0.59527
EI_0/c	65.3031	44.9174	36.6667	1.04167	0.96138

となる。

iii. 本問題に於ては決定すべき格點変立 $4 \times 3 = 12$ あり、之に對し九変立の定理を応用すれば次に示す 13 の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 + 60.788\ 419\ p_b - 263.954\ 362\ v_b - 4.291\ 097\ p_c - 29.175\ 047\ v_c &= \mathfrak{S}_b \times 10^3, \\
 + 1\ 973.499\ 650\ q_b - 0.134\ 865\ v_b - 0.179\ 477\ q_2 + 4.038\ 229\ v_c &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 263.954\ 362\ p_b - 0.134\ 865\ q_1 + 3\ 406.732\ 578\ v_b - 29.175\ 047\ p_c - 4\ 038\ 229\ q_c - 129.763\ 265\ v_c &= \mathfrak{M}_b \times 10^3, \\
 - 4.291\ 097\ p_b - 29.175\ 047\ v_b + 40.733\ 379\ p_c - 186.106\ 277\ v_c - 4\ 355\ 167\ p_d - 33.193\ 337\ v_d &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 0.179\ 477\ q_b - 4.038\ 229\ v_b + 1\ 680.286\ 231\ q_2 + 0.539\ 614\ v_c - 0.183\ 114\ q_d + 4.577\ 843\ v_d &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 29.175\ 047\ p_b + 4.038\ 229\ q_b - 129.763\ 265\ v_b - 186.106\ 277\ p_c + 0.539\ 614\ q_c + 3\ 670.489\ 257\ v_c \\
 - 33.193\ 337\ p_d - 4.577\ 843\ q_d - 165.812\ 998\ v_d &= \mathfrak{M}_c \times 10^3, \\
 - 4.355\ 167\ p_c - 33.193\ 337\ v_c + 40.733\ 379\ p_d - 186.106\ 277\ v_d - 4.291\ 097\ p_2 - 29.175\ 047\ v_2 &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 0.183\ 114\ q_c - 4.577\ 843\ v_c + 1\ 680.286\ 231\ q_d - 0.539\ 614\ v_d - 0.179\ 477\ q_2 + 4.038\ 229\ v_2 &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 33.193\ 337\ p_c + 4.577\ 843\ q_c - 165.812\ 998\ v_c - 186.106\ 277\ p_d - 0.539\ 614\ q_d + 3\ 670.489\ 257\ v_d \\
 - 29.175\ 047\ p_2 - 4.038\ 229\ q_2 - 129.763\ 265\ v_2 &= \mathfrak{M}_c \times 10^3, \\
 - 4.291\ 097\ p_d - 29.175\ 047\ v_d + 60.788\ 419\ p_2 - 263.954\ 362\ v_2 &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 0.179\ 477\ q_d - 4.038\ 229\ v_d + 1\ 973.499\ 650\ q_2 + 0.134\ 865\ v_2 &= \mathfrak{S}_c \times 10^3, \\
 - 29.175\ 047\ p_d + 4.038\ 229\ q_d - 129.763\ 265\ v_d - 263.954\ 362\ p_2 + 0.134\ 865\ q_2 + 3\ 406.732\ 578\ v_2 &= \mathfrak{M}_c \times 10^3,
 \end{aligned}$$

vi. 此の聯立方程式を解いて各弾性変位の一般解答を得る。即ち次表がそれである。

	\mathfrak{S}_b	\mathfrak{S}_c	\mathfrak{M}_b	\mathfrak{S}_c	\mathfrak{S}_c	\mathfrak{M}_c	\mathfrak{S}_d	\mathfrak{S}_d	\mathfrak{M}_d
$p_b =$	+26.881 308	-0.001 389	+2.182 896	+ 8.347 840	+0.004 290	+0.751 694	+ 2.844 736	+0.001 917	+0.262 566
$q_b =$	- 0.001 389	+0.506 716	-0.000 157	- 0.004 415	+0.000 055	-0.000 826	- 0.002 124	-0.000 002	-0.000 192
$v_b =$	+ 2.182 896	-0.000 157	+0.475 253	+ 1.057 976	+0.001 023	+0.092 508	+ 0.356 540	+0.000 236	+0.032 937
$p_c =$	+ 8.347 840	-0.004 415	+1.057 976	+33.260 994	-0.001 021	+2.192 684	+11.228 114	+0.005 454	+1.049 585
$q_c =$	+ 0.004 290	+0.000 055	+0.001 023	- 0.001 021	+0.595 142	-0.000 166	- 0.005 454	+0.000 065	-0.001 059
$v_c =$	+ 0.751 694	-0.000 826	+0.092 508	+ 2.192 684	-0.000 166	+0.406 635	+ 1.049 585	+0.001 059	+0.094 668
$p_d =$	+ 2.844 736	-0.002 124	+0.356 540	+11.228 114	-0.005 454	+1.049 585	+33.260 994	+0.001 021	+2.192 684
$q_d =$	+ 0.001 917	-0.000 002	+0.000 236	+ 0.005 454	+0.000 065	+0.001 059	+ 0.001 021	+0.595 142	+0.000 166
$v_d =$	+ 0.262 566	-0.000 192	+0.032 937	+ 1.049 585	-0.001 059	+0.094 668	+ 2.192 684	+0.000 166	+0.406 635
$p_2 =$	+ 0.717 471	-0.000 531	+0.039 951	+ 2.844 736	-0.001 917	+0.262 566	+ 8.347 849	-0.004 290	+0.751 694
$q_2 =$	+ 0.000 531	-0.000 001	+0.000 067	+ 0.002 124	-0.000 002	+0.000 192	+ 0.004 415	+0.000 055	+0.000 826
$v_2 =$	+ 0.039 951	-0.000 067	+0.011 277	+ 0.356 540	-0.000 236	+0.032 937	+ 1.057 976	-0.001 023	+0.092 508

表中の \mathfrak{S} , \mathfrak{M} に相當する各荷重の値を代入すれば格點弾性変位 p, q, v の感線を決めることができる。

図-13 は斯くして畫いた其の感線図である。

v. 次に不静定応力を求むるに當り、先づ其の總変位を次式より算定す。

$$\begin{aligned}
 \Delta_x^{bA} &= p_b + v_b y_b^{bA}, & \Delta_x^{cb} &= p_c - v_b + v_c y_c^{cb} - v_b y_b^{cb}, \\
 \Delta_y^{bA} &= q_b - v_b x_b^{bA}, & \Delta_y^{cb} &= q_c - q_1 - v_c x_c^{cb} - v_b x_b^{cb}, \\
 \Delta_z^{bA} &= v_b, & \Delta_z^{cb} &= v_c - v_b, \\
 \Delta_x^{dc} &= p_d - p_c + v_d y_d^{dc} - v_c y_c^{dc}, & \Delta_y^{dc} &= q_d - q_c - v_d x_d^{dc} - v_c x_c^{dc}, & \Delta_z^{dc} &= v^d - v_c, \\
 \Delta_x^{bB} &= - p_b + v_b y_b^{bB}, & \Delta_x^{cC} &= - p_c + v_c y_c^{cC}, \\
 \Delta_y^{bB} &= - q_b, & \Delta_y^{cC} &= - q_c, \\
 \Delta_z^{bB} &= - v_b, & \Delta_z^{cC} &= - v_c
 \end{aligned}$$

vi. 斯くして總変位決定すれば各不静定応力は簡単に次式に依つて求められる。

$$\begin{aligned} \bar{x}_{bA} &= a_{bA} \{d_x^{bA} - d_{xi}^{bA}\}, & \bar{x}_{cb} &= a_{cb} \{d_x^{cb} - d_{xi}^{cb}\}, & \bar{x}_{ac} &= a_{ac} \{d_x^{ac} - d_{xi}^{ac}\}, \\ \bar{y}_{bA} &= b_{bA} \{d_y^{bA} - d_{yi}^{bA}\}, & \bar{y}_{cb} &= b_{cb} \{d_y^{cb} - d_{yi}^{cb}\}, & \bar{y}_{ac} &= b_{ac} \{d_y^{ac} - d_{yi}^{ac}\}, \\ \bar{z}_{bA} &= c_{bA} \{d_z^{bA} - d_{zi}^{bA}\}, & \bar{z}_{cb} &= c_{cb} \{d_z^{cb} - d_{zi}^{cb}\}, & \bar{z}_{ac} &= c_{ac} \{d_z^{ac} - d_{zi}^{ac}\}, \\ \bar{x}_{bB} &= a_{bB} d_x^{bB}, & \bar{x}_{cC} &= a_{cC} d_x^{cC}, \\ \bar{y}_{bB} &= b_{bB} d_y^{bB}, & \bar{y}_{cC} &= b_{cC} d_y^{cC}, \\ \bar{z}_{bB} &= c_{bB} d_z^{bB}, & \bar{z}_{cC} &= c_{cC} d_z^{cC} \end{aligned}$$

單位活荷重に對し上式より各不静定応力を算出し、之を图示したものが図-14 の感線である。

vii. 更に前例と同様にして各断面の応力 \bar{M} , \bar{N} , \bar{S} の値を求め、其の感線を図-15, 16 を以て表示した。

以上例題 1, 2, 3 の各感線及応力図を詳細に攻究すれば、弾性橋脚を有する連続拱橋の性質を容易に窺知することが出来る。又是等を單一径間のものと比較吟味すれば弾性橋脚の影響如何を知り得ると同時に、單一径間の解法を以てする連続拱橋の設計計算の如何に不當なるかを了解することが出来る。例題として採つた拱橋は何れも普通の割合のものであるが、更に高き橋脚、扁平なる拱橋であれば其の差一層甚大なるものがある。

今連続拱橋の変形及応力につき主なる特性を挙げれば、

(i) 先づ弾性格點変位について 格點変位 p 及 v は一般に其の右側に於ける荷重に由り負の方向に変位せらるゝものであるが、其の橋脚の直ぐ近くに載る荷重の爲には之と反對に正の方向の変位を受けることになる。然るに其の格點の左側に載る荷重に對しては丁度之と正反對の変位をなす。換言すれば橋脚の直ぐ側に載る荷重は橋脚頭を其の荷重の在る方へ変位することになるのである。之に類する現象が僅かではあるが q 変位の上にも認められる。是等の動向及其の限界が何れの點にあるかは其等の感線を視れば一目瞭然である。

此の特殊変位状態は橋脚の高さを増すに従ひ v は更に増大すれども p は漸次減少する(例題 5 参照)。

之に類似の現象が不静定応力及 \bar{M} , \bar{N} , \bar{S} の感線の上にも現れて居る。之は連続拱橋の剛接連続性より來る特性の一つである。

(ii) 次に不静定応力について 其の感線の内拱肋のものは單一径間のそれと比較すると、其の径間に於ては \bar{M} は弾性橋脚の爲に著しく減少して居るが、 \bar{N} 及 \bar{S} に至つては格別の差異が無い、従つて又他の径間の荷重の影響も \bar{M} の場合を除けば極めて小である。

橋脚の不静定応力 \bar{M} , \bar{N} , \bar{S} は何れも其の兩側径間の荷重影響最も大にして、其の餘の径間のものは \bar{S} 及 \bar{M} には相當の影響あれども \bar{N} に至つては極めて僅少であり、而して何れも其の橋脚より遠くなるに従ひ漸次減少する。

(iii) 各断面の応力について 先づ軸圧力の感線を視るに、何れの断面に於けるものも弾性橋脚の爲に其の径間に於ける値は單一径間のそれに比して著しく減少するが、然し他の径間の影響が入り來ることになる。

次に曲力率の感線に於て、拱頂のものは單一径間のものに比して $+\bar{M}$ は減少するも $-\bar{M}$ の面積増加する。起拱點に於けるものは之と反對に $+\bar{M}$ を増し $-\bar{M}$ を著しく減少して居る。然るに其の中間の 1/4 點附近のものは $-\bar{M}$ に格別の変化なきも $+\bar{M}$ の増加を見る。

更に剪力感線を吟味すれば、一般に拱頂の感線は其の径間のみにては單一径間のものと大差なきも、其の左の断面に於けるものは $+\bar{S}$ を増し $-\bar{S}$ を減じて居るに、其の右の断面に於ては之に反し $+\bar{S}$ を減じ $-\bar{S}$ の面積を増加して居ることが判る。

尚橋脚に就て一考すべきは、其の構造剛接連続なるを以て軸圧力、剪力の外に著しき曲力率の作用することである。一方の径間このみ荷重の來る不對稱載荷の場合は其の脚底に極めて大なる曲力率を誘起し、殊に橋脚の基礎に沈下移動の起つた時橋脚に生ずる曲力率は(図-12)極めて甚大なるものがある、故に是等に對し詳細なる検討をなし所要の鉄筋材を挿入することを忘却してはならない。

【例題 4.】 核心曲力率の感線

對稱 3 径間の連続拱橋を與へ其の各断面に於ける核心力率(コア モーメント)の感線を求む。

前記の例題に於ては何れも曲力率と軸力との感線を別個に求めたのであるが、今茲では各断面兩縁維の最大合応力を決定する爲に核心點 k_o, k_u の 2 點に關する曲力率即ち核心力率の感線を求むるものとする。

與へられたる拱橋の寸法及常数は、

	側径間 Ab	中央径間 bc	橋脚 bB
$l(\text{m}) =$	21.000	30.000	$h(\text{m}) =$ 10.000
$f(\text{m}) =$	7.000	7.500	$d_u(\text{m}) =$ 1.800
$d_c(\text{m}) =$	0.600	0.700	$d_b(\text{m}) =$ 2.800
$\nu_s =$	0.300	0.250	

本橋に於ては拱肋の ν 及橋脚の d 共に次式に示す如く拋物線變化をなすものとする。

$$\nu = 1 - 4\{1 - \nu_s\} \left\{ \frac{x}{l} \right\}^2, \quad d = 1.8 + \left\{ \frac{y}{10} \right\}^2.$$

尚 $EI_o = \{1/6\} 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}, \quad m = 1/12, \quad n = 1/4.$

各彈性重心を定めて

$$y_b^{bA} = 5.230 \text{ m}, \quad y_b^{bC} = 5.659 \text{ m}, \quad y_b^{bB} = 3.937 \text{ m}$$

各拱肋及橋脚の彈性係数は

	側径間	中央径間	橋脚
$EI_o/a =$	246.603 45	240.433 44	9.072 13
$EI_o/b =$	2 085.188 48	3 332.744 89	0.397 85
$EI_o/c =$	74.537 04	65.597 67	1.143 08

九変位の定理を構成し之を解いて次の如く格點変位の一般解を得る。

$$\begin{aligned} p_b &= 15.600 57 \mathfrak{Q}_b - 0.000 15 \mathfrak{B}_b + 2.079 77 \mathfrak{M}_b + 2.784 05 \mathfrak{Q}_c + 0.003 23 \mathfrak{B}_c + 0.545 40 \mathfrak{M}_c, \\ q_b &= -0.000 15 \mathfrak{Q}_b + 0.397 73 \mathfrak{B}_b + 0.000 05 \mathfrak{M}_b - 0.003 23 \mathfrak{Q}_c + 0.000 04 \mathfrak{B}_c - 0.000 96 \mathfrak{M}_c, \\ v_b &= 2.079 77 \mathfrak{Q}_b + 0.000 05 \mathfrak{B}_b + 0.610 26 \mathfrak{M}_b + 0.545 40 \mathfrak{Q}_c + 0.000 93 \mathfrak{B}_c + 0.105 05 \mathfrak{M}_c, \\ p_c &= 2.784 05 \mathfrak{Q}_b - 0.003 23 \mathfrak{B}_b + 0.545 40 \mathfrak{M}_b + 15.600 57 \mathfrak{Q}_c + 0.000 15 \mathfrak{B}_c + 2.079 77 \mathfrak{M}_c, \\ q_c &= 0.003 23 \mathfrak{Q}_b + 0.000 04 \mathfrak{B}_b + 0.000 96 \mathfrak{M}_b + 0.000 15 \mathfrak{Q}_c + 0.397 73 \mathfrak{B}_c - 0.000 05 \mathfrak{M}_c, \\ v_c &= 0.545 40 \mathfrak{Q}_b - 0.000 93 \mathfrak{B}_b - 0.105 05 \mathfrak{M}_b + 0.397 73 \mathfrak{Q}_c - 0.000 05 \mathfrak{B}_c + 0.610 26 \mathfrak{M}_c, \end{aligned}$$

斯くして格點変位の一般解を得れば不靜定応力は容易に求められ、從つて任意の點 (x, y) に於ける曲力率は一般に

$$\mathfrak{M} = M^0 + \mathfrak{E}y - \mathfrak{D}x + \mathfrak{S},$$

に依つて算定出来る。今拱肋及橋脚各断面の活荷重に由る兩縁維の最大応力を決定する爲に各核心點 $k_o(x_o, y_o)$ 及 $k_u(x_u, y_u)$ の兩點に關する曲力率 $\mathfrak{M}_{k^o}, \mathfrak{M}_{k^u}$ の感線を求めると 図-17 が得られる。此の感線に依り各點の核心力率最大値を決定すれば、其の兩縁維の最大応力度は

$$\sigma_{o\max} = \frac{\mathfrak{M}_{k^o\max}}{W_o}, \quad \sigma_{u\max} = \frac{\mathfrak{M}_{k^u\max}}{W_u},$$

に依つて算定することが出来る。式中 W_0, W_a は其の断面係数を示すものである。

【例題 5.】 弾性橋脚の影響

連続拱橋に於て弾性橋脚の影響を吟味する爲に橋脚高の大小各種の径間につき其の変形及応力の感線を求める。前例題の何れも弾性橋脚の影響如何を示して居るものであるが、此處では更に橋脚高の変化に依つて如何様の結果となるか其の検討を試みたものである。例として採つた拱橋は 2 種何れも 3 径間連続拱橋である。

第一種の拱橋は其の径間 $30 \times 45 \times 30\text{m}$ なる第 2 の例題を採り、橋脚を 10m, 20m, 50m の 3 種とした。

各橋脚の寸法及弾性係数は、

	橋脚(1)	橋脚(2)	橋脚(3)		橋脚(1)	橋脚(2)	橋脚(3)
h (m)	10.000	20.000	50.000	$EI_0/a(\text{m}^3.\text{kg})$	6.208 37	38.262 35	272.726 29
d_b (m)	2.000	2.000	2.000	$EI_0/l(\text{m}^3.\text{kg})$	0.364 40	0.652 78	1.272 63
d_B (m)	2.600	3.200	5.000	$EI_0/c(\text{m}^3.\text{kg})$	0.850 63	1.269 57	1.750 04
y_b^p	4.514	7.947	14.424	$EI_0 = \{1/6\} 10^9 \text{m}^2.\text{kg}$,	$m = 1/12$,	$n = 1/4$.	

第二種の拱橋は $21 \times 30 \times 21\text{m}$ の對稱径間のもので、其の橋脚は 5m, 10m, 30m の 3 種につき攻究する。而して其等の寸法及弾性係数は次の如くである。

	側径間 $l = 21\text{m}$	中央径間 $l = 30\text{m}$		橋脚(1)	橋脚(2)	橋脚(3)
fl	1/5	1/6	h (m)	5.000	10.000	30.000
d_b (m)	0.650	0.750	d_b (")	1.800	1.800	1.800
v_s	0.240	0.200	d_B (")	2.300	2.800	4.800
y_b	3.175	3.811	y_b (")	2.273	3.985	8.245
$EI_0/a(\text{m}^3.\text{kg})$	67.088 39	83.594 80	$EI_0/a(\text{m}^3.\text{kg})$	1.516 30	7.644 70	73.222 16
EI_0/b (")	1 542.908 31	2 799.228 46	EI_0/b (")	0.204 27	0.363 19	0.817 36
$EI_0/c(\text{m}^3.\text{kg})$	57.096 04	52.148 15	$EI_0/c(\text{m}^3.\text{kg})$	0.598 05	0.905 48	1.326 20
$EI_0 = \{1/6\} 10^9 \text{m}^2.\text{kg}$,	$m = 1/12$,	$n = 1/4$,				

先例題と同様、九変位の定理を用ひて格點変位を求め、次いで各断面の曲力率を決定し、其の結果を図示したものが図-18, 19 の感線である。各感線につき詳細に吟味すれば弾性橋脚の高さが応力及変形に如何に影響するかを知ることが出来る。即ち橋脚の高さを増すに従ひ格點の水平変位も亦大となるを以て其の径間に於ける拱の推力は著しく減少する、又之に伴ひ垂直変位も増し不静定応力 \mathfrak{M} が減ずることになる。其の結果起拱點の \mathfrak{M} は其の径間に於て正の面積増大し負の側小となる、然し他の径間に於ては負 \mathfrak{M} の面積著しく増大することになる。

拱頂に關しては同理に基き脚高の増すに従ひ其の径間の負 \mathfrak{M} 次第に増加し他の径間に於ては正 \mathfrak{M} 漸次大となる。尙單一径間の點線のものと比較すれば弾性橋脚の影響を明確に解し得ると同時に、單獨径間としての解法は近似的解法としても用をなさぬ程餘りに事實と相違して居ることを知ることが出来る。高き橋脚の場合は勿論のこと 5m, 10m と云ふ極めて低き橋脚の例に徴しても實際の値と相當の差異がある。

故に連続拱橋を各径間夫々單獨のものとして設計したものは其が如何に精密に計算してあつても無意味のことが判る。依つて構造が連続して居る拱橋は是非とも之を一弾性体なる連続拱橋として解かねば眞の合理的又經濟的設計は不可能である。

【例題 6.】 温度変化の影響

既に記せし例題 1 及 2 に於ても温度の影響を吟味したのであるが、此處では更に拱矢比の大小及橋脚の高低各種の例につき其の影響如何を攻究する。

對稱径間 $21 \times 30 \times 21\text{m}$ の連続拱橋を採り其の拱矢比 fl を 拱橋 1) $1/3 \times 1/4 \times 1/3$ (例題 4), 拱橋 2)

1/5×1/6×1/5 (例題 5), 及拱橋 (3) 1/8×1/10×1/8 の 3 種とし; 各拱橋何れも亦 3 種の橋脚, 橋脚(1) 5m, 橋脚(2) 10m, 橋脚(3) 30m, (例題 5) につき, 都合 9 種の連続拱橋に就き, 温度の影響を検べる。

残る拱橋の寸法及弾性係数は

	側径間	中央径間		側径間	中央径間
f/l	1/8	1/10	$EI_0/a(\text{m}^3 \cdot \text{kg})$	20.207 04	23.401 78
$d_c(\text{m})$	0.700	0.800	$EI_0/b(\text{ " })$	1 118.131 02	2 051.055 74
v_s	0.150	0.100	$EI_0/c(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	43.877 55	41.015 63
$y_b(\text{m})$	2.032	2.356			

今拱橋全体に均一温度降下 $t_0 = -10^\circ\text{C}$ を假定し, 之に由る兩縁維の合応力を求めるものとして各核心点 k^2, k^4 の 2 点に關し曲力率を算定した。本橋は何れも中央径間の中心線に關し對稱構造なるを以て, 変形及応力共に對稱であるから便宜上半分に \mathfrak{M}_k^s , 而して右半分に \mathfrak{M}_k^u の値を記入して図示したものが図-20 である。

該応力圖に於て明かなるが如く, 温度変化の爲に各起拱點及拱頂に極めて大なる縁維応力が現れる, 而も其等の値は拱矢比の減少するに伴ひ著しく増大するものである。

次に橋脚高低の影響は前者のそれに比べると遙に小である。其の理由は其の高さを増すに従ひ橋脚の撓性次第に増加するを以て求むる核心力率の或ものは寧ろ減少するものもある。是單なる連続橋の場合の其の高に比例して温度応力を増すものと其の趣を異にする點である。

更に橋脚の温度応力が其の拱矢比の大小及橋脚の高低に依り如何に影響せらるゝかは其の応力圖に依り容易に理解することが出来る。即ち極短きものに於ては曲力率一符號なるも, 高きものとなれば其の撓性より反曲點表れて正負兩邊の力率が出現することになる。然し其の合応力度は其の高さ低きもの寧ろ大である。

故に拱矢比小なる扁平拱橋にして短肥なる橋脚を有するものに於ては甚大なる温度応力の誘起さるゝ恐れあるを以て詳細に検討し, 之に對し所要の鉄筋を配備すべきである。

【例題 7.】基礎移動の影響

此の問題も例題 1, 2 に於て既に其の解法及之に由る応力圖を示したのであるが, 此處では更に各種の拱橋につき橋脚底 B 及起拱點 A の移動 $\Delta x=1\text{cm}$, $\Delta y=1\text{cm}$, 及 $\Delta z=1/1000$ の假定の下に其々の鮮明をなす。

先づ橋脚底の移動に對しては例題 6 と同じ 9 種の拱橋につき拱矢比及橋脚高の変化影響如何を攻究した。其の結果の中 Δ_{CB} は $h=10\text{m}$, Δ_{yB} は $h=5$ と 10m , Δ_{zB} は $h=10$ と 30m の場合を圖示して圖-21 とした。

次に橋臺 A 點の変位影響を研究する爲に拱肋は上記の 3 種, 橋脚は何れも $h=20\text{m}$ とし, 其の厚さは $d=1.8+2\{y/20\}^2$ なる拋物線變化をなすものを探つた。而して其の弾性係数は

$$\begin{aligned} EI_0/a_p &= 44.505 12, & EI_0/c_p &= 1.791 37 \\ EI_0/b_p &= 0.713 02, & y_b^3 &= 6.714 \text{m} \end{aligned}$$

以上の與件の下に起拱點 A の三分変位に由る各點の曲力率を求め其の結果を示したものが圖-22 である。

上述各径間鮮明の結果を觀るに橋脚頭單構造の其と異り剛接連続構造なるを以て, 若し其の基礎に移動あれば其の影響全構造に波及し著しき変位応力を惹起することになる。

其等の応力圖を見るに何れも起拱點に於ける \mathfrak{M} 最も大であるが, Δy に由るものは他の変位のそれに比較すれば劇に小である。 Δx 及 Δz に由る \mathfrak{M} は各起拱點, 拱頂及橋脚殊に其の脚底に極大なるものが現れることが判る。それも拱矢比 橋脚高共に小となるに従ひ著しく増大して居る。故に扁平にして低き連続拱橋に於ては特にこの基礎移動に注意を拂ふ必要がある。

連続拱橋の基礎としては堅固不動の岩盤を適當とすれども、然らざる場合は充分堅實なる基礎工事を施工すべきである。若しこゝに基礎移動殊に不均沈下等の起るものあれば危険なる結果を來す恐れなしとしない。依つて斯る懸念のある時は精細に下部構造及其底部に於ける応力分布状態を吟味検討し、以て萬全の策を講ずべきである。

【例題-8】 近似解法の精度

六変位の定理を採用した近似解法の精度及其の応用範囲を知る爲に、拱矢比及橋脚各種の3径間連続拱橋につき其の解明を試み、之を正確なる解法の結果と比較研究する。例として採つた拱橋の寸法及弾性係数は

拱肋	側 径 間 (21 m)			中 央 径 間 (30m)		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
f/l	1/5	1/8	1/12	1/8	1/10	1/15
$d_c(m)$	0.650	0.700	0.900	0.750	0.800	1.000
ν_s	0.240	0.150	0.100	0.200	0.100	0.080
$y_b(m)$	3.175	2.022	1.363	3.311	2.356	1.564
	$EI_0 = \{1/6\} 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$			$m = 1/12$	$n = 1/4$	
$EI_0/a(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	67.088 39 (63.782 12)	20.207 04 (17.660 37)	5.223 24 (3.415 22)	83.594 80 (79.840 03)	23.401 78 (20.414 80)	6.747 96 (4.490 98)
$EI_0/b(\text{ })$	1 542.908 31 (1 536.012 51)	1 118.131 02 (1 111.671 04)	497.177 92 (492.166 85)	2 799.238 46 (2 790.656 03)	2 051.055 74 (2 043.035 16)	1 026.209 93 (1 019.779 20)
$EI_0/c(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	57.096 04	43.877 55	20.164 61	52.148 15	41.015 63	20.800 00

橋脚の寸法及弾性係數

橋脚	(1)	(2)	(3)		(1)	(2)	(3)
$h(m)$	5.000	10.000	20.000	$EI_0/a(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	1.516 30	7.644 70	73.222 16
$db(\text{ })$	1.800	1.800	1.800		(0.903 49)	(6.540 11)	(70.770 09)
$db(\text{ })$	2.300	2.800	4.800	$EI_0/b(\text{ })$	0.204 27	0.368 19	0.817 36
$y_b(\text{ })$	2.273	3.985	8.245	$EI_0/c(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	0.598 05	0.905 48	1.326 20

上記()内の數字は軸力及剪力の影響を省略した其等の近似値である。

以上の與件の下に9種の連続拱橋につき近似解法を施し之を正確なる解法の結果と比較研究するに、拱矢比の大小は其の精度に極めて大なる影響あれども、橋脚の高低は極短肥なるものを除けば其の影響割合に僅少である。依つて茲には9種の中其の3種を採り図-23として擧げたのである。

今其の一例 拱橋(3)、橋脚(2)の組合せにつき説明を加へる。先づ六変位の定理を應用して次の4式を得る。

$$\begin{aligned} 0.258\ 510\ p_b - 0.380\ 434\ v_b - 0.048\ 934\ p_c - 0.114\ 420\ v_c &= \bar{\delta}_b, \\ -0.380\ 434\ p_b + 4.287\ 850\ v_b - 0.114\ 420\ p_c - 0.181\ 518\ v_c &= \bar{\mathcal{M}}_b, \\ -0.048\ 934\ p_b - 0.114\ 420\ v_b + 0.258\ 510\ p_c - 0.380\ 434\ v_c &= \bar{\delta}_c, \\ -0.114\ 420\ p_b - 0.181\ 518\ v_b - 0.380\ 434\ p_c + 4.287\ 850\ v_c &= \bar{\mathcal{M}}_c \end{aligned}$$

之を解いて格點変位の近似値として

$$\begin{aligned} p_b &= 5.050\ 053\ \bar{\delta}_b + 0.524\ 024\ \bar{\mathcal{M}}_b + 1.621\ 423\ \bar{\delta}_c + 0.299\ 954\ \bar{\mathcal{M}}_c, \\ v_b &= 0.524\ 024\ \bar{\delta}_b + 0.288\ 152\ \bar{\mathcal{M}}_b + 0.299\ 954\ \bar{\delta}_c + 0.052\ 261\ \bar{\mathcal{M}}_c, \\ p_c &= 1.621\ 423\ \bar{\delta}_b + 0.299\ 954\ \bar{\mathcal{M}}_b + 5.050\ 053\ \bar{\delta}_c + 0.504\ 024\ \bar{\mathcal{M}}_c, \\ v_c &= 0.299\ 954\ \bar{\delta}_b + 0.052\ 261\ \bar{\mathcal{M}}_b + 0.504\ 024\ \bar{\delta}_c + 0.288\ 152\ \bar{\mathcal{M}}_c. \end{aligned}$$

を得る。然るに正確なる解法に於ける結果は

$$\begin{aligned} p_0 &= 5.741\ 056\ \xi_0 - 0.000\ 445\ \xi_1 + 0.534\ 931\ \xi_2 + 1.797\ 000\ \xi_3 + 0.001\ 197\ \xi_4 + 0.317\ 536\ \xi_5, \\ q_0 &= -0.000\ 445\ \xi_0 + 0.368\ 009\ \xi_1 + 0.000\ 099\ \xi_2 - 0.001\ 197\ \xi_3 + 0.000\ 067\ \xi_4 - 0.000\ 802\ \xi_5, \\ r_0 &= 0.530\ 931\ \xi_0 + 0.000\ 099\ \xi_1 + 0.312\ 789\ \xi_2 + 0.317\ 536\ \xi_3 + 0.000\ 802\ \xi_4 + 0.052\ 082\ \xi_5, \\ p_c &= 1.797\ 000\ \xi_0 - 0.001\ 197\ \xi_1 + 0.317\ 536\ \xi_2 + 5.741\ 057\ \xi_3 + 0.000\ 445\ \xi_4 + 0.534\ 931\ \xi_5, \\ q_c &= 0.001\ 197\ \xi_0 + 0.000\ 067\ \xi_1 + 0.000\ 802\ \xi_2 + 0.000\ 445\ \xi_3 + 0.368\ 009\ \xi_4 - 0.000\ 099\ \xi_5, \\ r_c &= 0.317\ 536\ \xi_0 - 0.000\ 802\ \xi_1 + 0.052\ 082\ \xi_2 + 0.534\ 931\ \xi_3 - 0.000\ 099\ \xi_4 + 0.312\ 789\ \xi_5. \end{aligned}$$

兩者を比較するに近似解法に於ける係数は、軸力及剪力の影響を省略したる爲、何れも少しく減少して居ることが判る。

此の兩結果より其々の不靜定応力を求め、更に各断面曲力率の感線を算定し之を图示したものが図-23の中央のものである。斯くして得た兩感線を比較するに、橋脚の高低に由る変化は僅少にして、近似値の適不適は主として拱矢比の大小に由ることが解る。而も普通の拱矢比を有する連続拱橋に於ては提案の近似解法は其の誤差微小であつて實用に支障なき程度のものである。然し拱矢比小となり扁平の度を増すに従ひ其の誤差著しく増大し甚しきは實用に適せざるものとなる。其の限度は勿論拱橋の形態構造寸法等に依るもので一概に断定は困難なるも、此處に擧げたる例題に徴すれば拱矢比先づ 1/7~1/8 位迄のものなれば、近似解法を用ひて一般に實用に差支なき數値が得らるゝものと考へられる。

故に普通の連続拱橋にして拱矢比先づ 1/7 以上のものなれば、設計最初の計算とか、比較攻究の爲の概算には簡易なる近似解法を利用して計算の勞務を省き敏速に其の鮮明をなすを得策とする。然し扁平なる拱橋又は全体の構造が極めて短肥なる時或は最後の檢算に於ては、九交位の定理を適用して眞の応力を定め以て合理的設計をなすべきである。

結 語

以上提案の解法及各種応用例題について攻究した結果結語として

i. 九交位の定理は總ての影響を考慮したる最も精確なる解法であつて、径間の對稱不對稱に關せず、荷重、温度及基礎の如何を問はず、一般に應用出来る算法である。而も其の原理簡明、解法至極容易であつて、從來難解とされた連続拱橋の諸問題は總て本定理に依つて容易に鮮明されることになる。

ii. 彈性下部構造の影響は極めて顯著であつて、其の高さ高きものは勿論のこと低きものに於ても相當の影響がある。橋脚を不動とし各径間を單一獨立のものとして解いた結果は近似的にも不充分であつて其の解法に依る設計は合理的のものとは云へない、而して其の用材配當にも自然無理がある。連続構造物は何處迄も連続して居る丈を一彈性体として解かねば眞の応力作用を知ることが出来ないことが確證される。

iii. 總て構造物是一般に其全体が同じ強度、換言すれば同じ安全度を保持する様設計せらるべきである。橋梁としては上部構造のみならず下部構造も其の応力作用を詳細吟味して強度に必要充分なる丈の材料を用ひ合理的に構築するべきである。殊に連続拱橋の橋脚については例題に徴しても明かなる如く其の応力吟味は必須缺くべからざるものである。

iv. 從來石工及コンクリート構造のものは兎角過大の断面を用ひ居るやうに思はれるものがある。然るに拱橋に於ては過大の断面を用ふること必ずしも強度を増大する所以でなく、殊に龐大なる橋脚を作ることには實に洪水面積を狭小ならしめて橋梁破壊の原因を増すのみならず、其の基礎工を一層困難ならしむる上に本邦の如き地震國に

於ては却つて其の安全度を減少することになる。

v. 是迄拱橋の破損を受けし例を觀るに、其の多くは活荷重の爲に起つたものでなく寧ろ大半は基礎移動に起因するものゝ様である。依つて外力、溫度変化、コンクリート收縮等を考慮すると同時に基礎移動について充分吟味検討して置くことが肝要である。例題に明かなる如く僅の基礎移動不平均沈下が起つても其の影響は侮るべからざるものがある。

vi. 近似解法の六変位の定理は扁平なる拱橋を除けば一般に其の誤差僅少であつて實用に差支ない。設計最初の計算、橋種様式の比較研究其他応力の概算をなす爲の解法としては計算簡便容易であつて好都合のものである。

vii. 拱矢比小なる連続拱橋の解法に於ては無論のこと、設計最後の檢算とか、基礎移動又は溫度変化等の影響を攻究するが如き場合には正確なる解法九変位の定理を採用すべきである。斯くして正確なる応力及変形を算定すると同時に一方材料及施工を精選し、他方許容応力を高め以て用材を節約して眞に合理的にして而も秀逸なる名橋を架設するに努力すべきである。

viii. 架橋地點が堅實なる基礎を有し連続拱橋の架設に適合する場合には、剛強にして形態秀麗而も用材經濟的な本拱橋の特性を利用して一横断を一系統のものとなし以て橋梁美を發揮するを得策と思考する。

ix. 提案の解法は連続拱橋のみならず、連続拱梁及連続框構其他之に類する剛接連続構造物の解法にも応用出来るものである。

最後に本研究に對し援助補助を與へられたる日本學術振興會に深厚なる感謝の意を表し、併せて其の計算及製図の勞務に助力せられたる本学部土木教室助手補助員の諸氏に厚く感謝する次第である。

圖-4. 對稱 2 徑間連續拱橋

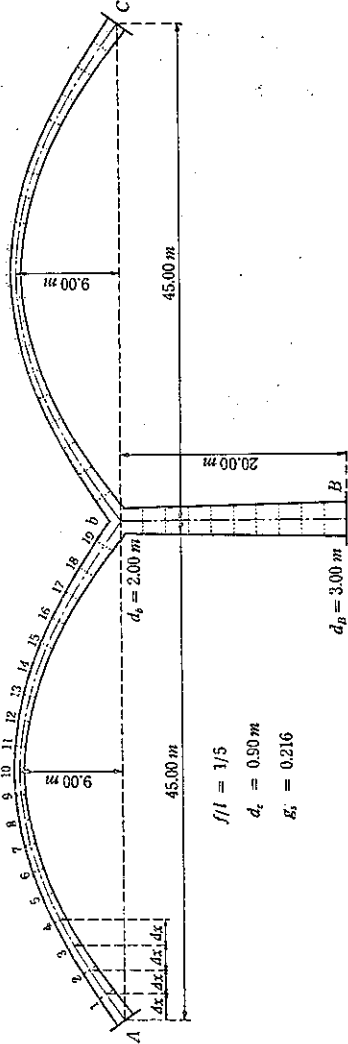


圖-5 對稱 3 徑間連續拱橋

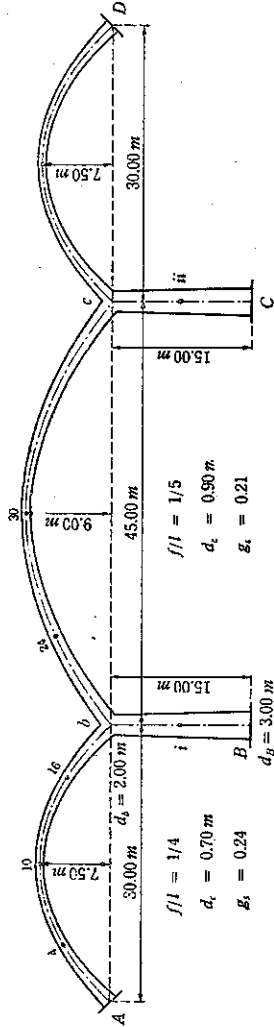


圖-6. 對稱 5 徑間連續拱橋

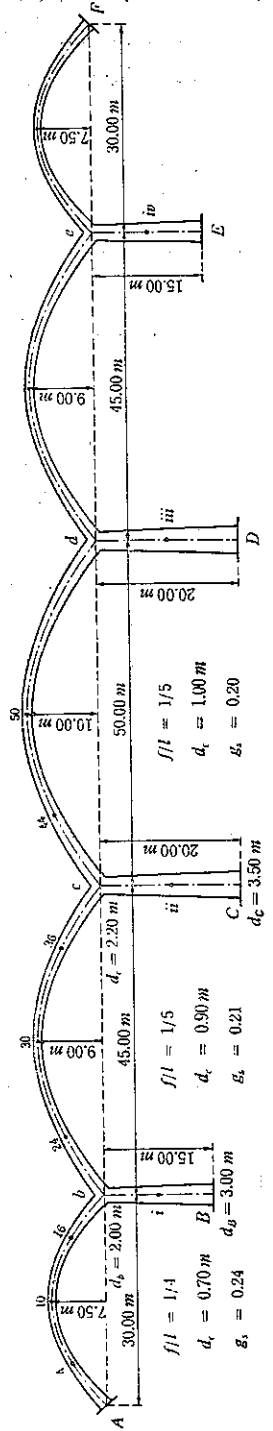


図-7. 格点変位及不静定応力の感線

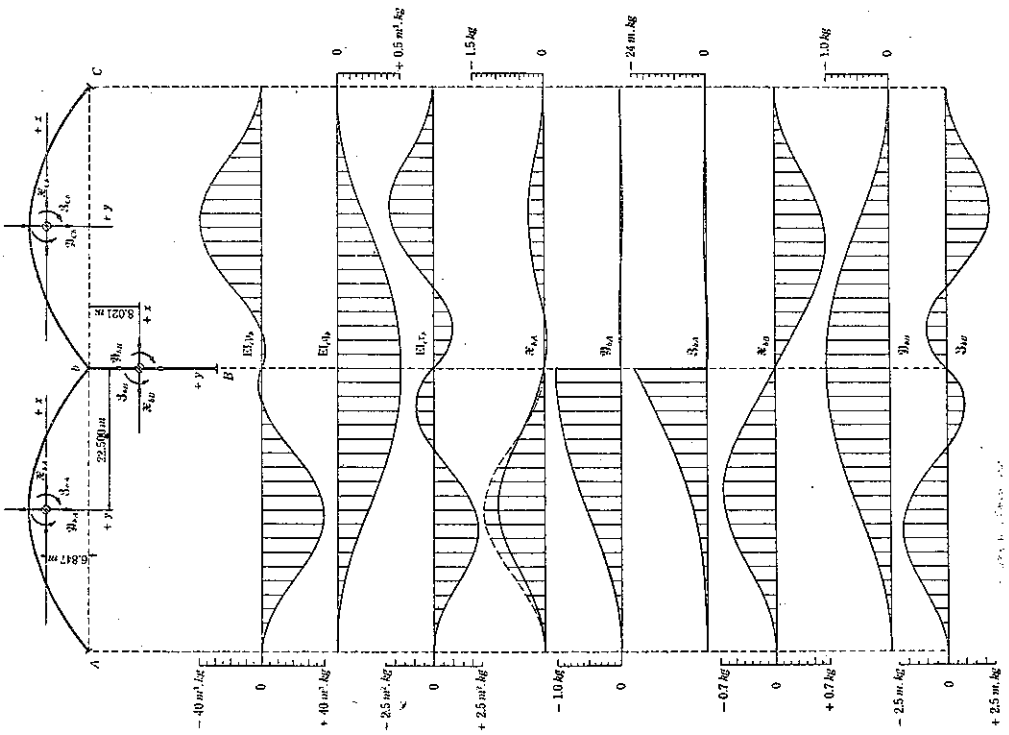


図-8. 曲力率軸力及剪力の感線

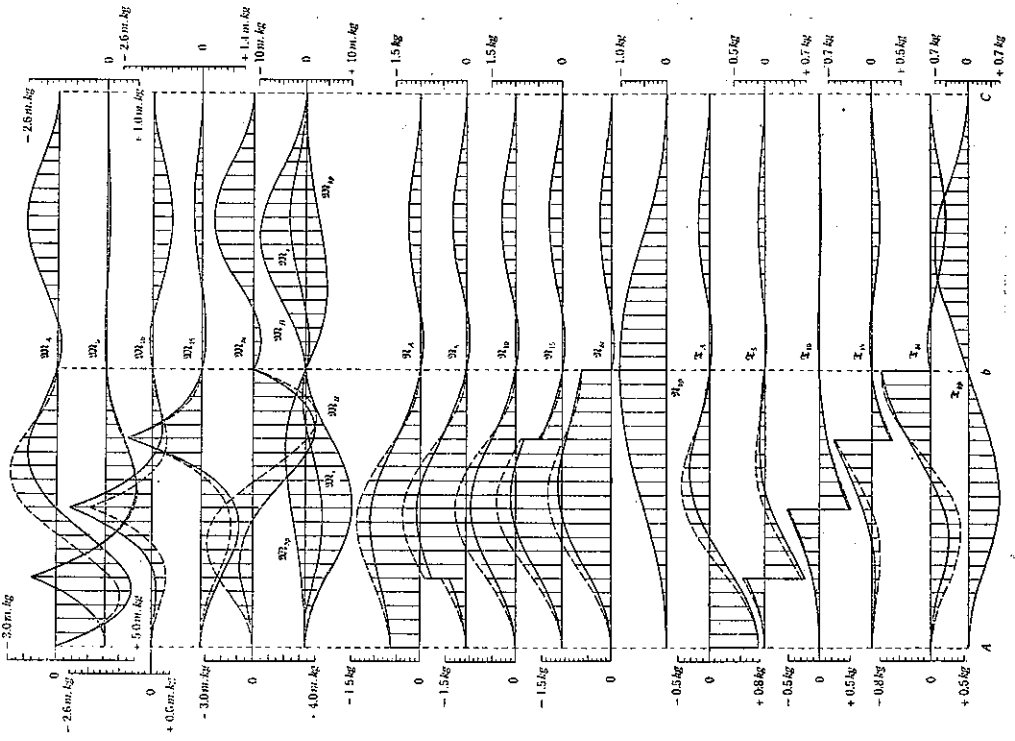


図-9. 温度変化及基礎移動による応力図

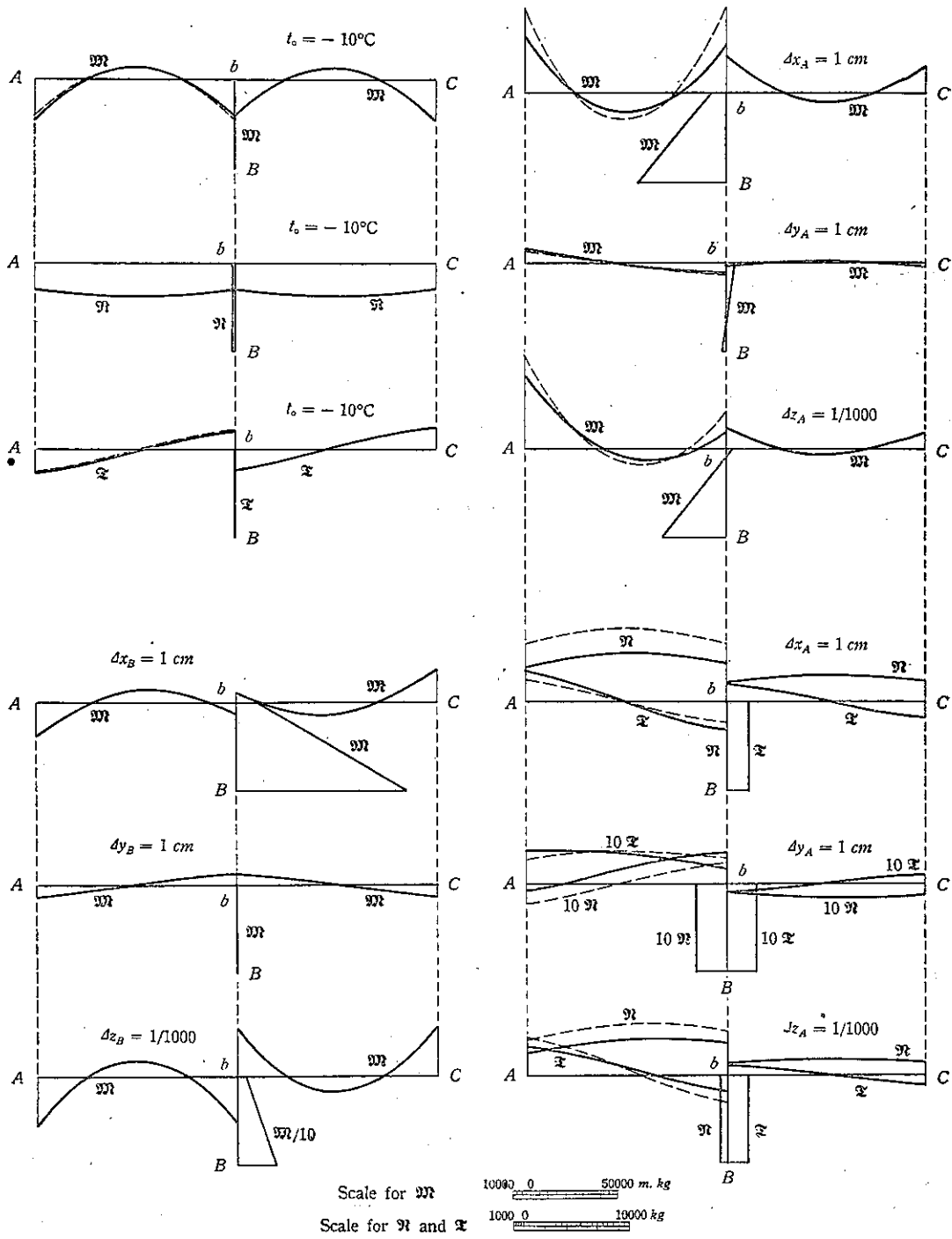


図-11. 曲力率、軸力及剪力の感線

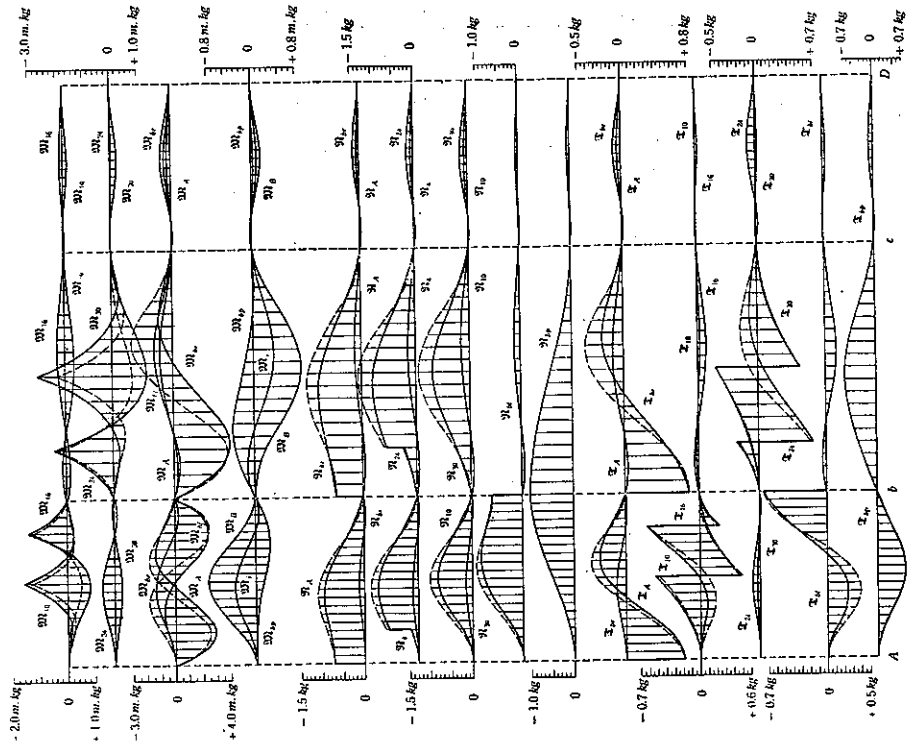


図-10. 格點変位及不静定応力の感線

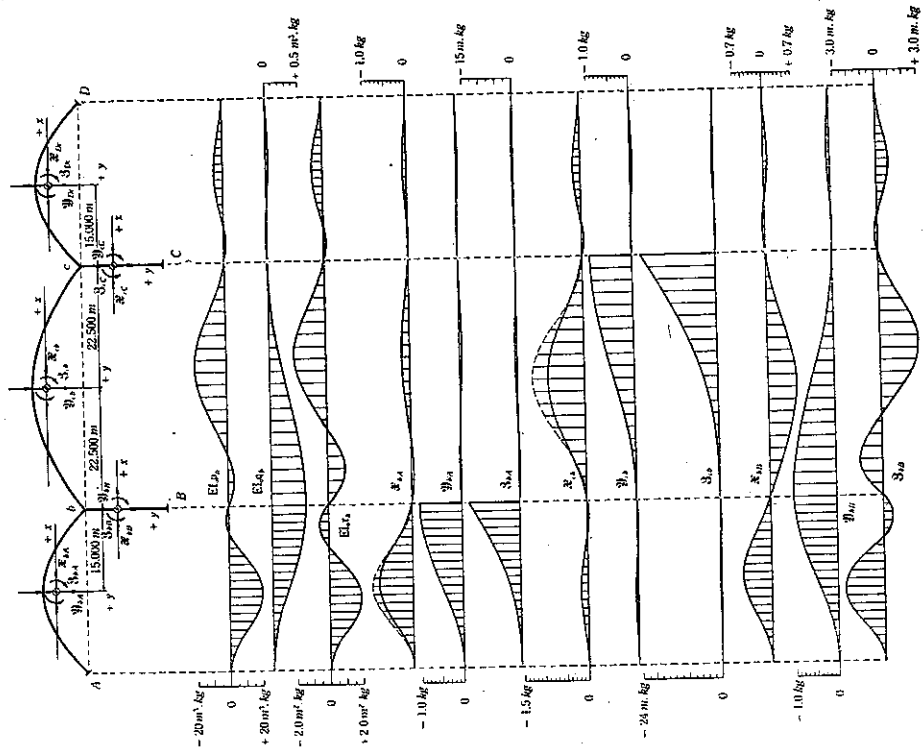


図-12. 温度変化及基礎移動による応力図

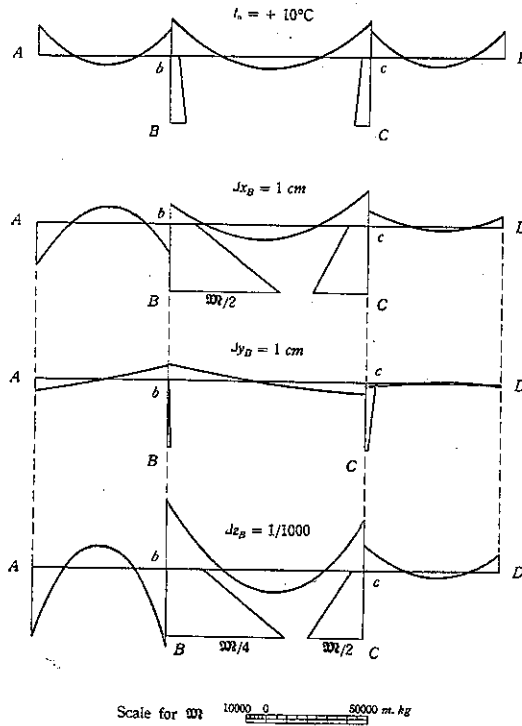


図-13. 格点変位の感線

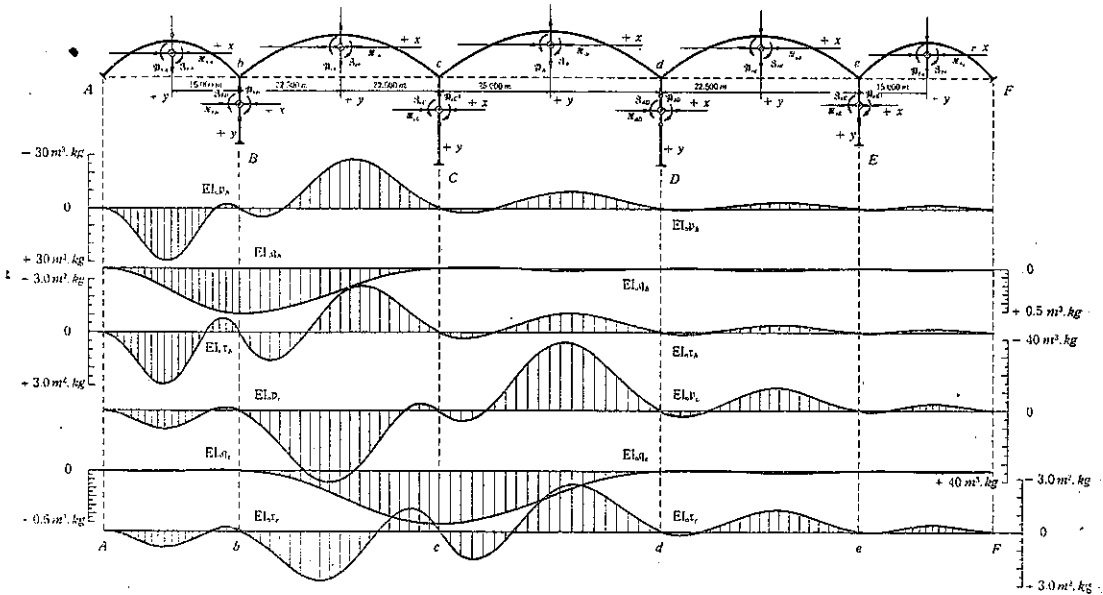


図-14. 不静定応力の感線

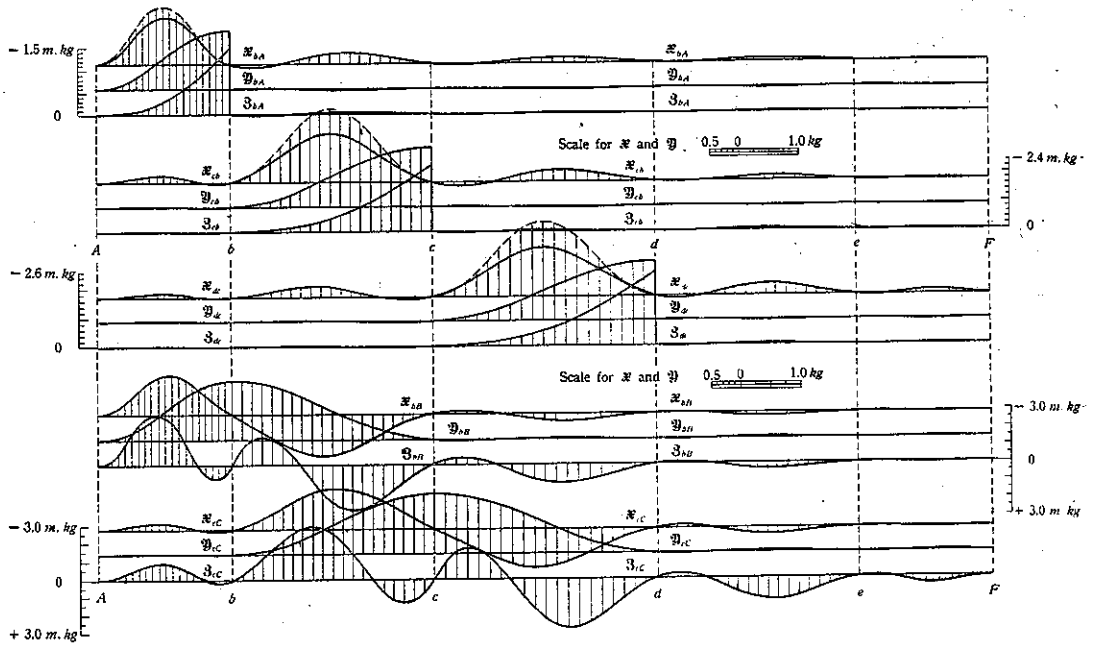


図-15. 曲力率の感線

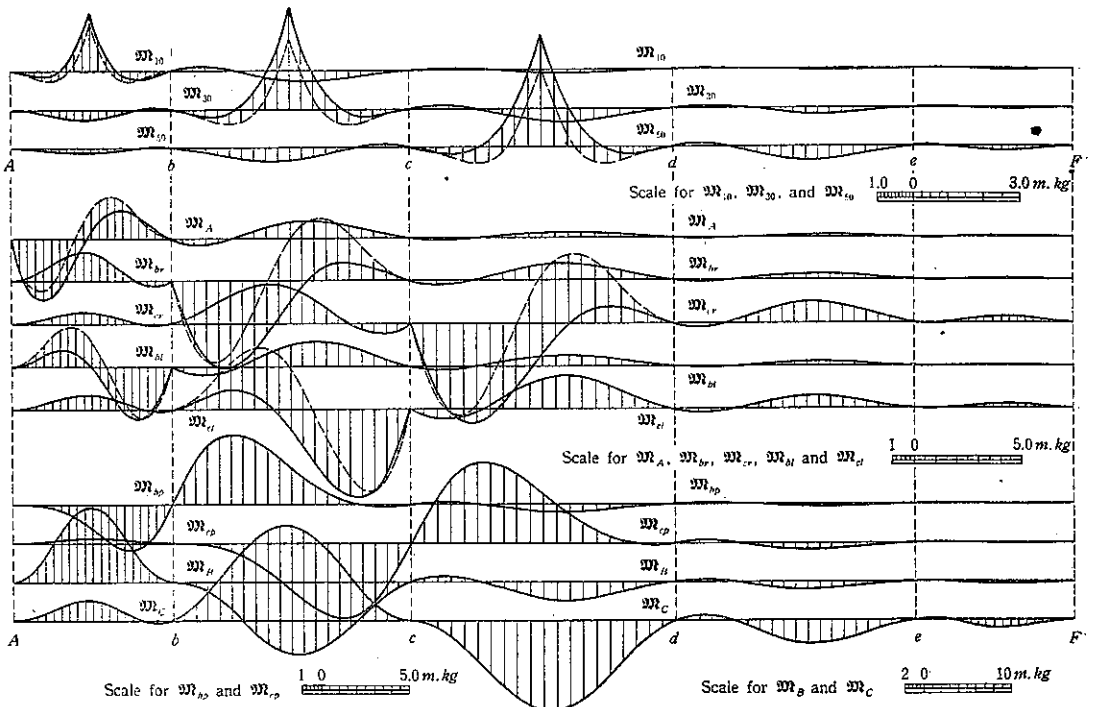


図-16. 軸力及剪力の感線

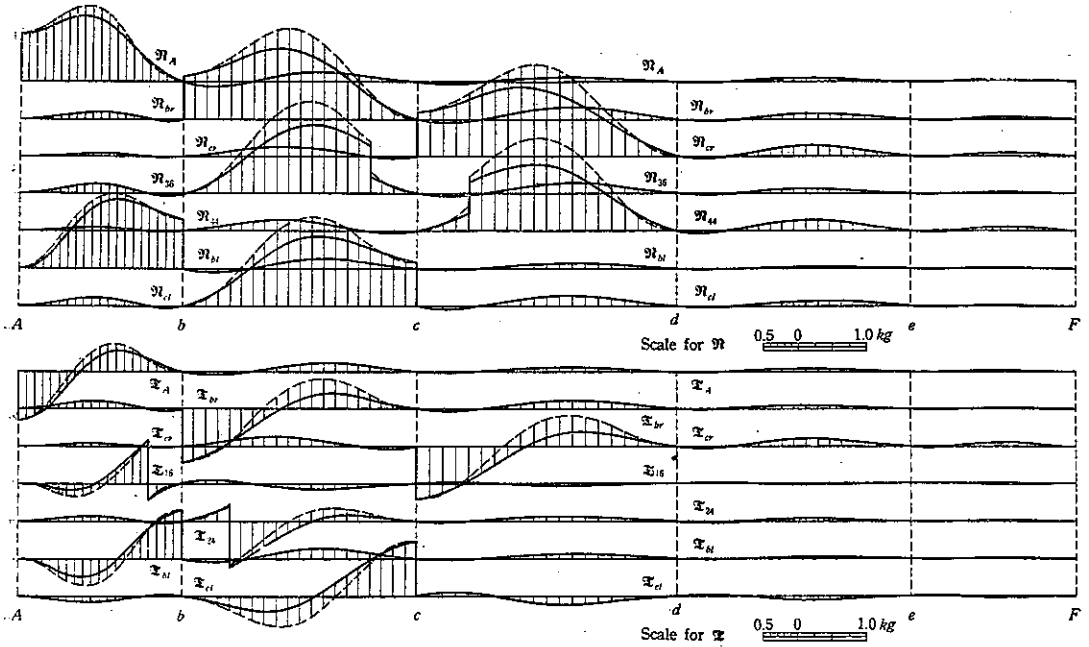
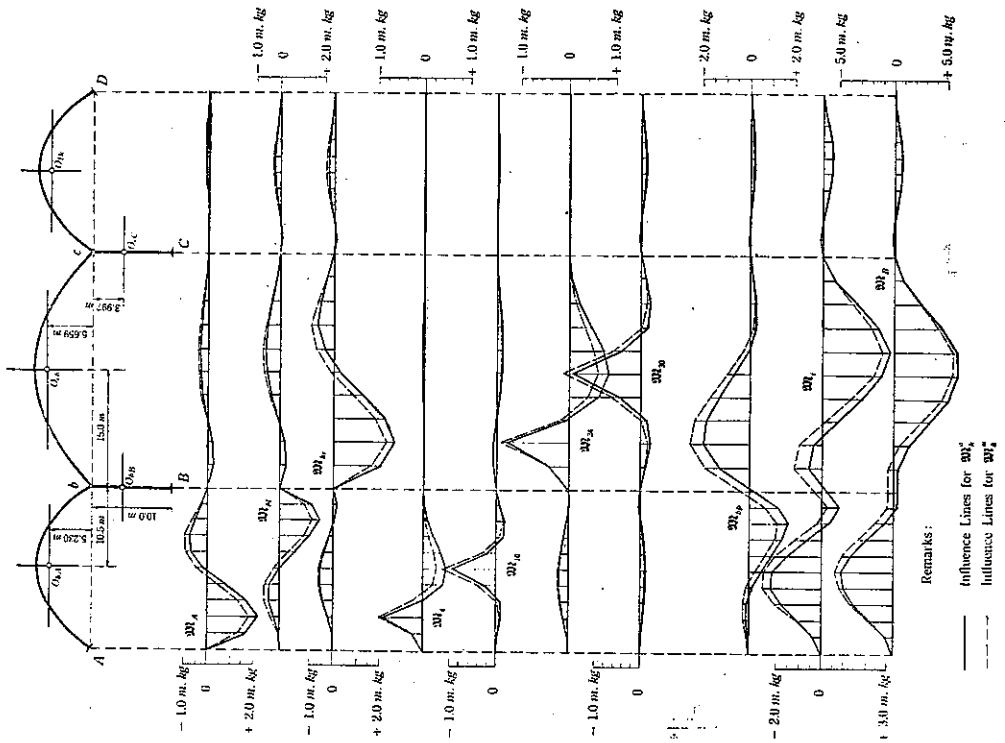


図-17. 核心力率の感線



9. 橋脚高の変化と格点変位及曲力率の感線

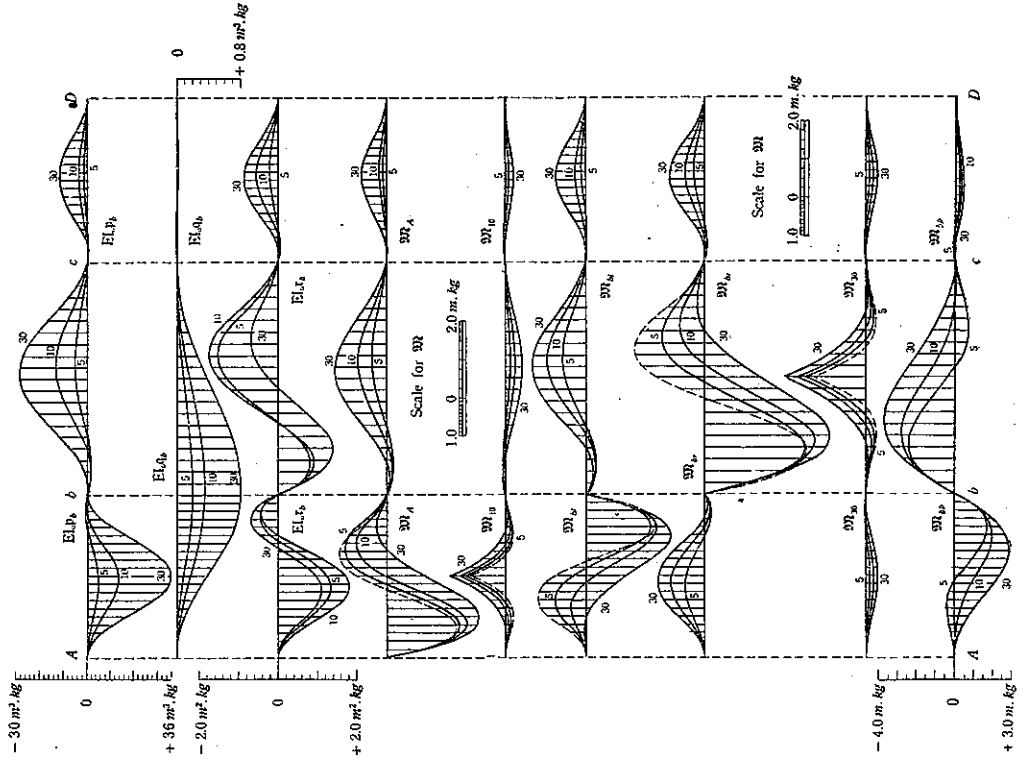


図-18. 橋脚高の変化と格点変位及曲力率の感線

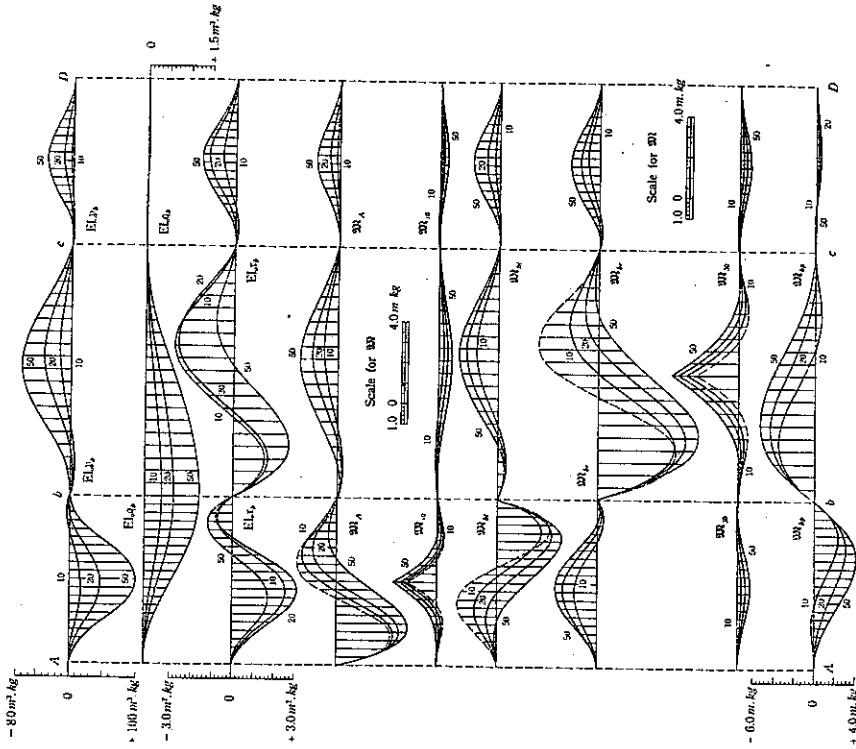


図-21. 基礎移動による曲力率図

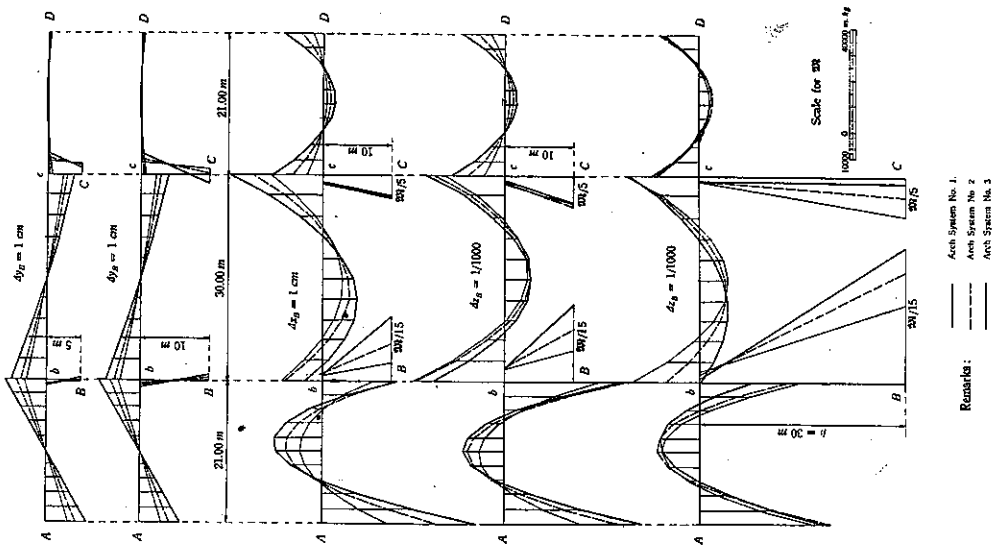


図-20. 温度変化による核心力率図

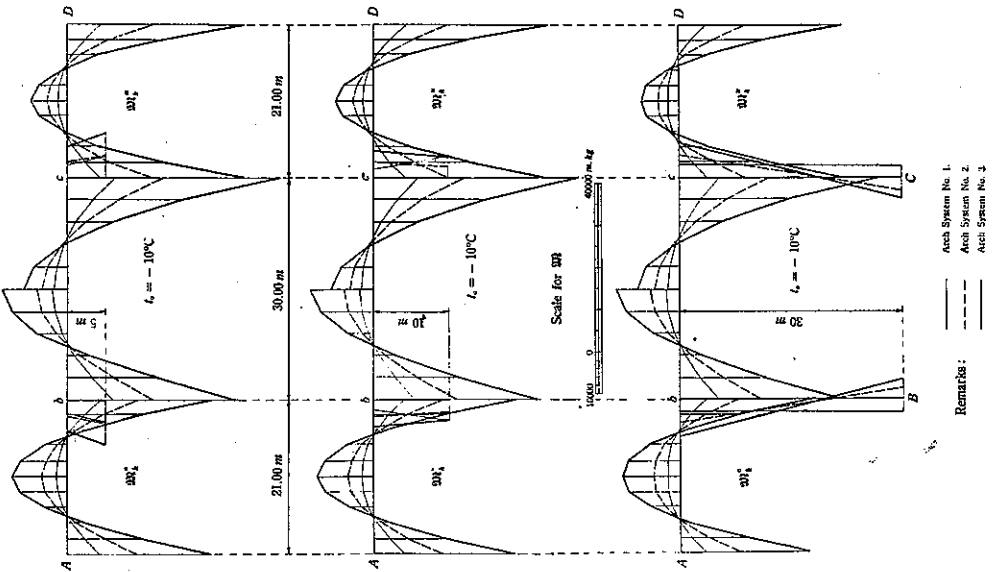


図-22. 基礎移動に由る曲力率図

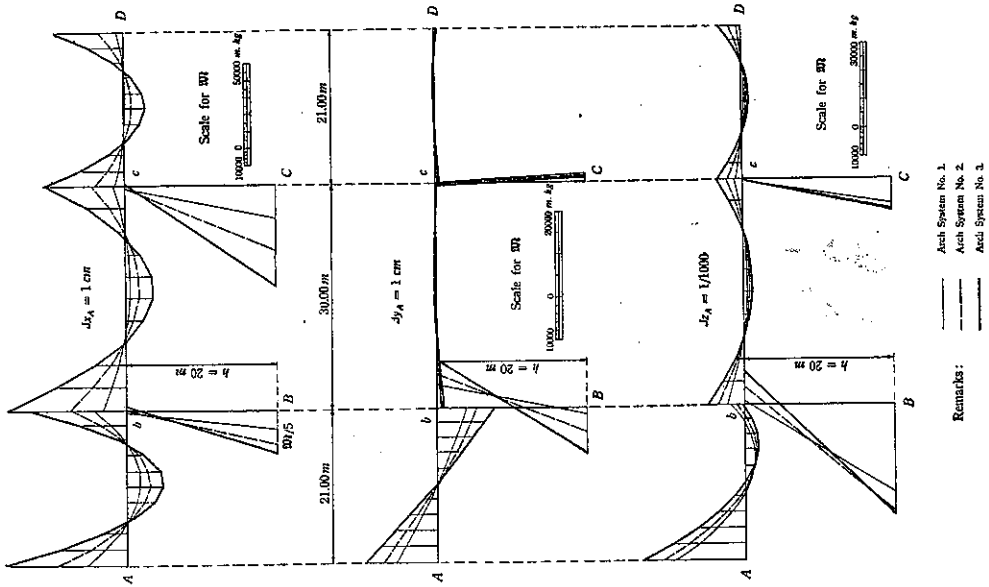


図-23. 近似正確兩解法に依る曲力率感線の比較

