論 說 報 告

第22卷第9號 昭和11年9月

溢流堰に關する Bélanger の法則に就て

會員 工学士 本 間 仁*

On the Principle of Bélanger

By Masasi Homma, C. E., Member.

要 旨

"完全溢流をなす溢流堰の堰頂に於ける水深はその流水の有する勢力を以て流し得る流量が最大となる様な大さを取る" と言ふ Bélanger (ベランヂエー) の法則の意義を説明し,之を實例によつて證明しこの問題の一般水理学への關係を明かならしめんとしたものである。尙その副産物として潛溢流堰の公式を檢討した。

目 次

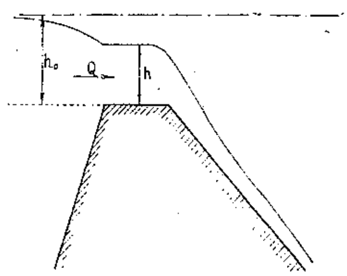
1. Bélanger の法則の説明

図-1 の様な廣頂溢流堰の流量を決定するには,堰頂の水深を h, 堰の長さを b として Bernoulli の定理を適用すれば

$$Q=bh\sqrt{2g(h_0-h)}$$

從つて h を決定しなければ流量 Q は定められないが,h を規定すべき條件は一つもないから Q には無數の値が與へられる事になる。然るに實際にはかゝる流溢堰の流量は一定であつて水深 h も不変である。この問題を解決する爲には Bélanger の法則が用ひられるのであつて,之は "完全溢流をなす溢流堰の堰頂に於ける水深はその流水の有する勢力を以て流し得る流量が最大となる様な大さを取る" と言ふものである。之は一見構造力学に於ける最小働原理 (principle of least work) と同じものゝ様に考へられるが,両者の間には相似的關係は乏しいのである。

図-1.



Bélanger の法則は基本方程式より水の運動を決定せんとする時に偶々決定されざる量が殘されたる場合に,之を適用してその量を定むべき法則であつて,即ち基本方程式より導けば起り得る狀態は無數に存在する事となる様な時にその最も安定なる狀態を決定するものである。

然らば何故にこの法則の適用を必要とする様な場合を生ずるかを考へるに,之は水流(整流を除く)に常流 (ordinary flow) と射流 (jet flow) の二つの狀態が存する事によるのである。即ち無限に長い水路の流れならば常流

* 内務技師 内務省下關土木出張所勤務

の水面曲線は上流側に漸近線を有し，射流の水面曲線は下流側に漸近線を有する。吾々は常流狀態の水面に對しては或る位置に堰,水門等を設け之によつてその上流側は調節する事は出來るが，その下流側は調節する事が出來ない。反對に射流ならば下流側は調節し得るが上流側は調節し得ない。この調節する位置の水位が境界條件たるべき既知量となるのであつて，之と流量とによつて常流ならばその上流側,射流ならばその下流側の水面が計算によつて決定される。

然るに此處に未だ解決されぬ場合が殘されてゐる。それは流れが射流にて流下して途中より常流に變るもの及び常流にて流下して途中より射流に變るものである。この中前者は所謂跳水現象の場合であつて,條件は圖-2 の様に x_1 及び x_2 にて與へられる必要がある。その上に流量 Q も與へられてゐるのであるから，水面の計算を行ふ時には條件が一つ多過ぎる事となるが，之が x_3 に於ける跳水現象の條件によつて解決されてゐる。次に後者

圖-2.

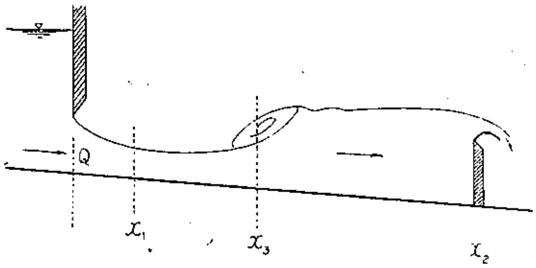
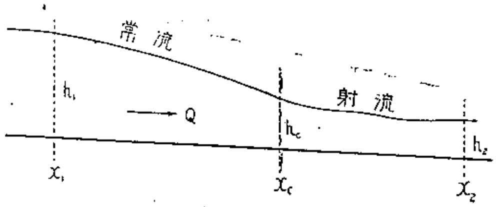


圖-3.



の常流より射流に移る場合を考へれば，この時の水面曲線は兩者の變遷部の水位によつて定まるのである。而て流量 Q が與へられたるものとし且つ連續的に變遷して變遷部の水深が限界水深 h_c となるものとしても，尙この變遷斷面の位置が定められないから條件が一つ不足してゐる。溢流堰の時はこの位置が既知で流量が未知であるから矢張り條件が一つ不足である。變遷が不連續的に起る事は跳水現象の様に已むを得ぬ場合以外は不可能なる事は流体の性質より明かであるから，結局 1 個の條件不足となる。

斯くの如く條件が不足なる爲に無數の場合が起り得る様に考へられるのであるが,前述の例の様に實際にはこの中の唯一つの場合のみが安定なのであつて，この安定の場合を與へるのが Bélanger の法則なのである。卽ち Bélanger の法則は常流より射流に變遷する場合の總てに適用される。

2. Bélanger の法則の證明

Bélanger の法則の適用される場合には 2 様ある。第 1 は完全溢流堰の問題の様に流量が不定で變遷の起る位置の定つてゐる場合であつて,第 2 は流量は既知であるが變遷の起る位置の不定なる場合である。

(1) 第 1 の場合 代表的の例として完全溢流の廣頂堰を考へる。この場合は上流側に勢力量の既知なる斷面があつて流量は未知である。この場合も基本方程式は

$$\left.\begin{aligned}&-i+\frac{dh}{dx}+\alpha'\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2h}=0\\&v\frac{dh}{dx}+h\frac{dv}{dx}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

但し h は水深，i は水底線の勾配である。單位幅當りの流量を q (未知量)とすれば

$$-i+\frac{dh}{dx}-\frac{\alpha' v^2}{gh}\frac{dh}{dx}+\frac{v^2}{C^2h}=0,\qquad \therefore\ \frac{dh}{dx}\left(1-\frac{\alpha' q^2}{gh^3}\right)=i-\frac{q^2}{C^2h^3}$$

然るに $h_c{}^3=\dfrac{\alpha' q^2}{g}=(\text{限界水深})^3$ であるから

$$\frac{dh}{dx}=i\frac{h^3-\dfrac{q^2}{iC^2}}{h^3-h_c{}^3}\cdots\cdots(2)$$

$i=0$ の時は $$\frac{dh}{dx}=-\frac{\dfrac{q^2}{C^2}}{h^3-h_c{}^3}$$

$$\therefore\ -\frac{q^2}{C^2}x=\frac{h^4}{4}-hh_c{}^3+k,\ (k\ \text{は常數})\cdots\cdots(3)$$

完全溢流堰とは溢流水が射流狀態をなすものと言ふ事が出來るから，或る斷面より下流にては必ず $h<h_c$ である。即ち之は流れが常流より射流に移る場合であつて，その變化が連續的であれば必ず $h=h_c$ の位置がある筈である。然るに一方に於て或る斷面に於ける單位幅の流水の有する勢力は

$$E=\frac{\alpha' q^2}{2gh^2}+h,\qquad \therefore\ q^2=2gh^2(E-h)\cdots\cdots(4)$$

故にこの場合の樣に E が與へられて（堰頂上の摩擦損失を無視すれば之は圖-1 の h_0 に等し）q が最大となる條件を求めれば

$$\frac{\partial q^2}{\partial h}=0,\qquad \therefore\ 2hE-3h^2=0,\qquad \therefore\ E=\frac{3}{2}h$$

之を (4) 式に代入すれば

$$h^3=\frac{\alpha' q^2}{g}=h_c{}^3,\qquad \therefore\ h=h_c$$

故にこの變遷部にては $h=h_c$ なる事が q が最大となる事を意味してゐる。故に Bélanger の法則を證明するにはこの $h=h_c$ の斷面が廣頂堰の堰頂に在る事を證明すればよいのである。

圖-4.

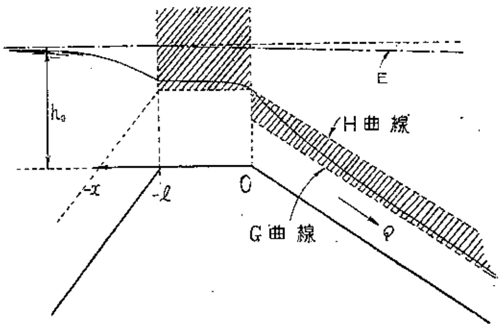


圖-4 の H にて示す線は $h=h_c$ の線，G にて示す線は $h=\sqrt[3]{q^2/iC^2}$ の線であつて，(2) 式より明かな樣に陰影を附した部分にては $dh/dx<0$，その他の部分にては $dh/dx>0$，又 H の上では $dh/dx=\infty$，G の上では $dh/dx=0$ である。尚之等の事實と G 曲線が水面曲線の漸近線なる事より $h=h_c$ の斷面は $x=0$ の位置である事が明かとなる（土木学會誌第 20 卷第 7 號 721 頁參照）。

$x>0$ の部分の水位は (2) 式にて，$x=-l$ と $x=0$ の間の水位は (3) 式にて與へられる。摩擦抵抗が無視される時は $C=\infty$ であるから頂堰では $dh/dx=0$ となり，堰頂全体に亙つて $h=h_c$ である。而て前述の樣に $h=h_c$ の時には q が最大の時であるから，之は Bélanger の法則に當るものであつて，q は (4) 式に $E=h_0$ として與へられる。摩擦抵抗は極めて小さいが，之を考慮すれば Bélanger の法則より求められる水深は $x=0$ の斷面に於けるものであつて，q は近似的に求めねばならない。即ち損失水頭を h_e として $x=0$ にては

$$E=\frac{\alpha' q^2}{2gh_c}+h_c=h_0-h_e$$

近似的に $h_e=\dfrac{q^2 l}{C^2 h_c{}^3}$ とすれば

$$q^2=2gh_c^2\left(h_0-h_c-\frac{q^2l}{C^2h_c^3}\right),\qquad h_c^3=\frac{\alpha' q^2}{g}$$

之より q が定められる。結局 Bélanger の法則は勾配の急變する斷面に適用される事となるのであるが，近似的には堰頂全体にて $h=h_c$ と見て差支へないのである。

尙一つの問題は潜堰と完全溢流の境界であつて，下流測の水位が圖-5 の AB 線（$h=h_c$ の線）以下なる時は途中で射流の部分を生ずるから，この水位は堰頂上の水位に影響する事が出來ず，從つて堰頂は常に $h=h_c$ となり，

圖-5.

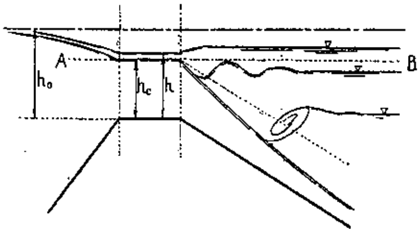
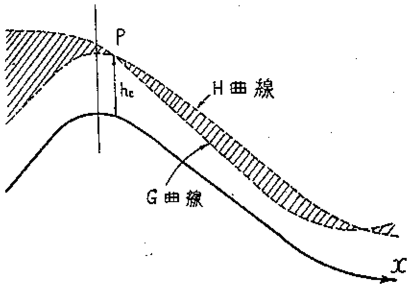


圖-6



完全溢流の場合と同じである。下流側の水位が AB 線を越えれば途中の射流部が消え，從つて堰頂上の水位が上つて流量は減少し所謂潜堰の狀態となる。

次に堰頂の形が折線狀でなく連續線狀なる場合には何れの位置にて $h=h_c$（即ち與へられたる E に對して q が最大となる）かを見る。但し溢流水の下側に自由水面を生ずる事がないものとする。この時の水流の基本運動方程式は堤頂線を基線として

$$-i+\frac{dh}{dx}+\frac{v^2}{C^2h}+\alpha'\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{hv^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}-\frac{hv^2}{2g}\frac{d^2i}{dx^2}=0\cdots\cdots(5)$$

從つて之を連續方程式より

$$\frac{dh}{dx}=i\frac{h^3-\dfrac{q^2}{i}\left(\dfrac{1}{C^2}+\dfrac{h^2}{3g}\dfrac{d^3h}{dx^3}-\dfrac{h^2}{2g}\dfrac{d^2i}{dx^2}\right)}{h^3-h_c^3}\cdots\cdots(6)$$

從つて H 曲線は $h=h_c$ の曲線なる事は前と同じであるが，G 曲線は

$$h^3-\frac{q^2}{i}\left(\frac{1}{C^2}+\frac{h^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}-\frac{h^2}{2g}\frac{d^2i}{dx^2}\right)=0$$

然し堰頂附近にては i が比較的小さく，鉛直分速度が無視されるから最後の 2 項は省略してよい（その證明は後に述べる所によつて明かである）。その時は q を假定すれば容易に堰頂附近の G 曲線を畫き得て，之と H 曲線の交點の位置が $h=h_c$ の斷面である。この斷面にては

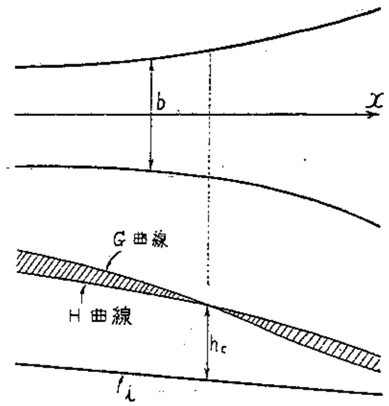
$$h^3=h_c^3=\frac{q^2}{iC^2},\qquad \therefore\ \frac{\alpha' q^2}{g}=\frac{q^2}{iC^2},\qquad \therefore\ i=\frac{g}{\alpha' C^2}=i_c$$

この i_c を限界勾配と名付ける。故に $h=h_c$ の斷面は近似的に $i=i_c$ の斷面となり，その位置は流量 q の大さとは無關係であつて流量は上の場合と同樣に定め得る。尙 $i_c=g/\alpha' C^2$ は 1/200～1/300 の程度であるから，鉛直分速度を無視しても大過はない。

(2) 第2の場合

上流より與へられたる流量が流下し，之が途中で射流に變ずる時はその變遷する位置にて $h=h_c$ となるのであるが，その位置は決定し難い。之は Bélanger の法則の適用される場合と類似の狀態であるが，この法則より知り得る事は變遷部の水深が $h=h_c$ なる事のみであつて，その位置は上の合場と同様に G 曲線と H 曲線の交點となつてゐる。

圖-7.



例へば圖-7 の様に水路幅の變化する場合には[1] 基本式が

$$\left.\begin{aligned}&-i+\frac{dh}{dx}+\alpha'\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2h}=0\\&bv\frac{dh}{dx}+bh\frac{dv}{dx}+hv\frac{db}{dx}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\therefore\quad\frac{dh}{dx}=\frac{i-\dfrac{Q^2}{C^2h^3q^2}+\dfrac{\alpha'Q^2}{gh^2b^3}\dfrac{db}{dx}}{1-\dfrac{\alpha'Q^2}{gh^3b^2}}$$

故に G 曲線にては　$i-\dfrac{Q^2}{C^2h^3b^2}+\dfrac{\alpha'Q^2}{gh^2b^3}\dfrac{db}{dx}=0$

H 曲線にては　$h^3-\dfrac{\alpha'Q^2}{gb^2}=0$　$\cdots\cdots(8)$

變遷部にては (8) の兩式が同時に成立するのであるから，之より h を消去すれば

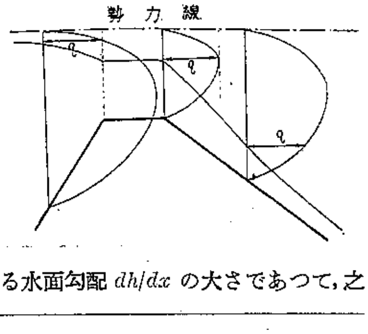
$$\frac{db}{dx}=\left(\frac{gb^2}{\alpha'Q^2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{g}{\alpha'C^2}-i\right)b\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$b=f(x)$ にて與へられゝば (9) 式より得られる x の値が變遷部斷面の位置を示すものである。

3. 結論その他

前節に述べたる所により Bélanger の法則は結局次の事實を述べてゐるものなる事を知つた。即ち“流水が常流狀態より射流狀態に移る時は射流より常流に移る時の如き急變をなさず，連續的に水深を減じ限界水深を通じて射流に移る。この限界水深は流水の有する勢力を以て流し得る流量が最大となる樣な狀態であつて，その位置は上述の方法によつて決定する事が出來る”。溢流堤の場合にはその堤頂にて限界水深を現す事となり，この時は勢力水頭が與へられてゐるから從つて流量が決定されるのである。

圖-8.



既に述べた樣に Bélanger の法則の適用される場合は一つの自由度がある狀態ではなく，矢張り唯一の起り得る場合なのである。而て Bélanger の法則はその時の一性質を示したものに過ぎないが，他方より考へれば水流の種類に常流と射流の別のある事が自然界の最小働原理を示すものであるとも言ふ事が出來る。一様幅の時には圖-8 の様に水底線 ($h=0$ の線) と勢力線の距離が最小となつた位置に於て q が最大となる様な水面形を取るのである。然しその斷面を境として上流側は常流，下流側は射流となつてゐる事が必要である。而て結局殘されたる問題は $h=h_c$ の位置に於ける水面勾配 dh/dx の大さであつて，之

[1] 土木学會誌第 20 卷第 7 號 717～722 頁

が簡單に解決されない事が多いのである。[(2)] 流体でも流れてゐない時は固体同樣の最小働原理が適用される。例へば毛管現象の場合を考へれば，之は半徑 r のガラス細管を水上に鉛直に立てた時に水が細管中に高さ h まで昇つて釣合ふ場合である。 高さ h の水（その重量は $w_0\pi r^2h$）が F なる外力を受けて釣合つてゐるものとする。 之に更に ΔF なる力が作用して h が $h+\Delta h$ に增加し，$h+\Delta h$ の水柱の有する勢力が E より $E+\Delta E$ に增加せるものとすれば

$$\Delta F\cdot\Delta h=\Delta E, \qquad \therefore \quad \frac{\partial E}{\partial F}=\Delta h$$

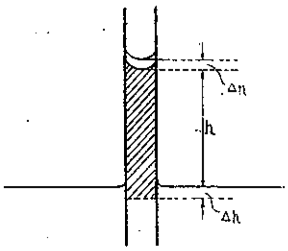
釣合ふ時は　$\Delta h=0$　であるから　$\dfrac{\partial E}{\partial F}=0$

又は　$\Delta F=0$　であるから　$\dfrac{\partial E}{\partial h}=0$

即ち最小働原理が適用される事が知られる。 之を用ひて解くには，勢力は水面を基準とし，水と空氣の間の表面張力を外力と考へ水とガラス及び空氣とガラスの間の表面張力强度を T_2 及び T_3 を以て表はせば

$$E=\frac{1}{2}w_0\pi r^2h(h+\Delta h)+2\pi rh(T_2-T_3)$$

図-9.



毛管高 h が $h+\Delta h$ に增加すれば

$$E+\Delta E=\frac{1}{2}w_0\pi r^2(h+\Delta h)^2+2\pi r(h+\Delta h)(T_2-T_3)$$

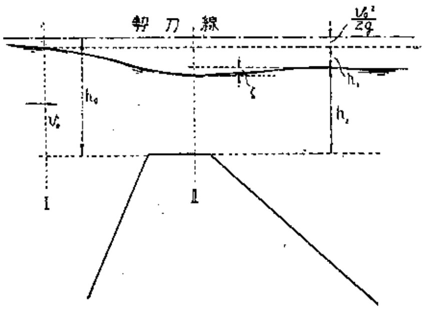
$$\therefore \quad \frac{\Delta E}{\Delta h}=w_0\pi r^2h+2\pi r(T_2-T_3)=0$$

故に毛管高 h は次式にて與へられる。

$$h=\frac{2}{w_0r}(T_2-T_3) \quad \cdots\cdots(10)$$

4. 潜堰公式に就て

図-10.



本節に述べる處は Bélanger の公式と直接の關係はないが，上に述べた處によつて得た結果として，從來の潜堰公式の正しからざる事を知り特にこの理論を加へたのである。

從來潜堰の流量公式として行はれてゐるものは図-10 に於て $h_1+\zeta$ の部分を完全溢流堰，$h_2-\zeta$ の部分を潜孔として各部の流量を計算し，之を加へたものを以て潜堰の流量とするのである。即ちその形は幅 b の堰に對し

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\left[\left(h_1+\zeta+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\sqrt{2g\left(h_1+\zeta+\frac{v_0^2}{2g}\right)}\;b(h_2-\zeta) \quad \cdots\cdots(11)$$

v_0 は接近流速である。 之は一見巧妙なる考へ方の如く思はれるが，その矛盾は直ちに發見する事が出來る。 それは図-10 にて II の斷面に就てその流量を考へれば I と II の間に Bernoulli の定理を適用する事により

$$Q=\sqrt{2g\left(h_1+\zeta+\frac{v_0^2}{2g}\right)}\;b(h_2-\zeta) \quad \cdots\cdots(12)$$

---

(2) 土木学會誌第 20 卷第 7 號 721 頁

即ち (11) 式の第 1 項は不必要のものなる事が知られる。然らば逆に何故に (11) 式の如き形が與へられるに至つたかを考へれば，h_2 が減少して $h_2 \to \zeta$ となれば (12) 式では $Q \to 0$ となる。然し實際はこの時は決して Q が零とはならず，寧ろ完全溢流の狀態となつて Q は增加する。故に (11) 式の如く第 1 項の完全溢流の項を加へて置けば第 2 項が零に近付いた時の矛盾が除かれる事となるのである。

然し乍ら更に考へを進めれば既に第 2 節の (1) にて與へた樣に摩擦抵抗を無視すれば $h_2-\zeta=\frac{2}{3}h_0$ の時に之が Q に對する限界水深であつて，$h_2-\zeta<\frac{2}{3}h_0$ に於ては堰の下流側にて一時射流狀態を呈するから，それより下の水位は無關係となり，堰の上では常に水深は $\frac{2}{3}h_0$，溢流量は常に

$$Q=\frac{2}{3}h_0 b\sqrt{2g}\sqrt{\frac{h_0}{3}}=0.385bh_0\sqrt{2gh_0} \quad\cdots\cdots(13)^{(3)}$$

である。即ち既に述べた樣に $h_2-\zeta\leqq\frac{2}{3}h_0$ の時は潜堰ではなく完全溢流と見る事が出來る。

故に $h_2\to\zeta$ の如き場合は考へる必要がないのである。從つて (12) 式は潜堰公式として別に矛盾のない形であつて，その時 $h_2-\zeta>\frac{2}{3}h_0$ がその必要條件となつてゐる。

鋭緣堰にても同樣の考へ方が行はれるが，自由水脈を生ずる時は別に考へねばならない。自由水脈のない樣な h_2 の相當大きい場合には堤頂幅 l が小さくなる極限を考へ $l\to 0$ とすれば，潜堰の場合は近似的に $h_2-\zeta>\frac{2}{3}h_0$ である。然し實際は堰を越えた水脈の下面は尙堰頂よりも ε だけ高まるものと考へられ，この水脈下面最高の断面が Bélanger の法則の適用される位置である（此處にて勢力線と水脈下面の距離が最小なるが故に）から，流量は (13) 式より

$$\left.\begin{aligned} Q&=0.385\,b\sqrt{2g}\,(h_0-\varepsilon)^{\frac{3}{2}} \\ \text{又は}\quad &=0.385\,b\sqrt{2g}\,h_0^{\frac{3}{2}}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{h_0}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon}{h_0}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(14)$$

h_2 が小さくなり溢流水の下側に自由水脈を生じ所謂 free nappe 狀となれば，Boussinesq の計算により流量 Q は次式にて與へられる(4)。

$$Q=0.4342\,bh_0\sqrt{2gh_0} \quad\cdots\cdots(15)$$

從つて此處にも狀態の急変がある。

要するに潜堰公式は廣頂堰に於ては (12) 式の形とならねばならないのであつて，$h_2-\zeta>\frac{2}{3}h_0$ が潜堰の條件である。而て鋭緣堰に對しても，この關係が近似的に成立するものと考へられる。尙この問題に關しては後日更に實驗的檢討を行ひ，変遷の狀態及び流量係數を確める機會を得たいと思つてゐる。

---

(3) (13) 式は Bélanger の公式と稱せられるものである。

(4) Flamant; Hydraulique. p. 107. 著者，水理学 180 頁。