も著者の考への如く A の部分が破壊するとはきまつてゐないと思ひます。

又一歩を譲つて，著者の考への如く，A の部分が破壊すると考へる場合にも，図-2 の如き場合は，どう解釋すべきでありませうか。此の場合著者の理論に依れば摩擦力は甲の位置に依り変化すべき事になると存じます。

図-1.

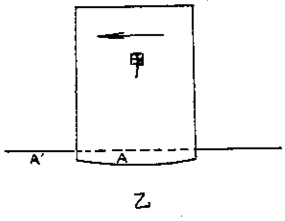
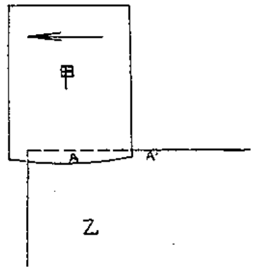


図-2.



又著者は，運動摩擦係數の減少を振動に依り解釋して居られますが、振動に依つて，減少を説明出來るとすれば，同じ程度の確かさを以つて其れの増加をも主張出來ると存じます。又この事が眞であるとしても，若し振動に依るものとすれば，接觸物体の固有週期に依つて摩擦係數が変つて來る事になると思ひます。

以上，拜讀後の感想と疑問を申し述べました。御教示にあづかれば眞に有難い事と存じます。

著者 會員 工学士 前 橋 俊 一

はしがき　元來固体摩擦の理論は，長い以前から未解決の儘殘されて來た程の難問題でありますから，討議者の滿足される樣な明答が出來るかどうかは判りませんが，どうかして御質疑の點に就て，少しでも要領を得た御返事を申上げ度いと，研究をして居りましたので，段々御返事が遲れて仕舞ひましたが，悪からず御許しを願ひ度いと存じます。然し問題が問題でありますので御不滿ではありませうが，兎に角私の信ずる所だけを御答へして，置き度いと存じます。

討議要領　先づ，討議者が私の論文中不審を抱かれた點を要約しますれば，凡そ次の 3 箇條に歸するものかと存じます。

(イ) **A.** 摩擦の現象は，相接する物質の性質と面の性質に依つて，甚だしく複雜な狀況を示すものであるから，弾性変形のみを以て、摩擦を論ずるのは，正當であるか否かと云ふことに疑問を持つ。**B.** されば私の固体摩擦に關する説明は，「一般の意味に於ける“不明瞭な摩擦現象”の説明ではなく，“Amontons 氏の説に依つて概念化された摩擦現象”の説明であつて，若し誤りなしとするも，摩擦現象の一部を説明するに止まるのであらう。」

(2) **A.** 私の論文中 944 頁 3～6 行の部分が御不審であつて，**B.** 若し此の考へ方を正當なりとするも，現在の場合には，図-1 に於て破壊するは A の部分なりや A′ の部分なりやは一考に値するものと思ふ。甲乙兩物質の相對的性質に依つて，必ずしも A の部分が破壊するものとは定まつて居ないと思ふ。図-2 の如き場合はどう解釋すべきや。

(3) **A.** 運動摩擦係數の減少を振動に依つて説明出來るとすれば，同じ程度の確かさを以て其の増加をも説明出來ると思ふ。**B.** この事が眞であるとしても，若し振動に依るものとすれば，接觸物体の固有週期に依つて摩擦係數が変つて來ることになると思ふ。

討議者の御不審の點は以上 3 箇條と存じますが，便宜上前段 **A** 後段 **B** に分けて以下逐條愚見を申述べ，御叱正を仰ぎ度いと存じます。

御答へ　(1) 嚴密に云へば，仰せの通り“Amontons 氏の説に依つて概念化された摩擦現象”の説明をして居ることになりませう。要するに，Amontons 氏の“摩擦力は重量に正比例し，接觸面の廣狹に關係すること

なし”と云ふ考へ方は，既に Hardy 氏等の注意深い精密な物理實驗に依つて，實驗誤差の範圍内に於て充分正しいと云ふことが證明されて居り，今日は其が何故然るやと云ふ點を數理的に說明することだけが，殘つて居ると思ふのであります。即ち，私の論文は其を彈性變形で說明しようと云ふ試みであつたのであります。

兩物体に力を加へて相接觸させ，其等を互に切線方向に移動せしむる時，其の加へられた力に正比例して抵抗を呈し，磨耗を發生するのでありまして，其の力の加はる状況を表示するに彈性變形の手段を用ひた譯で，唯彈性變形の起つて居る部分の分子狀態を直接見る譯には行かないため，或る承認し得る程度の推理は之を必要としますが，兎に角彈性變形の理論で說明しますると，彼の Amontons 氏の摩擦の法則も數理的に解說されるし，又在來盲目的に肯定された所の“運動摩擦係數が靜止摩擦係數より小さい”理由も，併せて明瞭になると思ふのであります。

前段に於て，“摩擦の現象は，相接する物質の性質と面の性質に依つて，甚だしく複雜な狀況を示すものであるから，彈性變形のみを以て摩擦を論ずるのは，正當であるかどうか”と疑問を持たれて居りますが，之は一應御尤もな仰せではありますが，私の發表しました摩擦理論は基本的のものでありまして，接觸面の精粗並に清汚等の其を複雜化させる種々な條件は凡て之を除外して考へて居るのであります。言ひ換へれば，Hardy 氏等が實驗した樣な條件を基礎として論じて居るのでありますから，其の邊の所は御承知を願ひ度いと存じます。

例へば，或る物体を空中で落下させる場合，其の形狀に依つて落下の狀況が違ひますが，之は申すまでもなく，空氣と云ふものが存在するため，其の樣な複雜性を呈するに至るものでありますから，果して其が如何なる法則に依つて落下するものであるかを確かめるためには，眞空中で之を行ふより外はないのであります。即ち，空氣の影響を去つて出來上つた落下の法則を基本として，現實に空氣の存在する複雜化された場合を解いて行くのが順序でありますが，其れと同樣に，多少現實とは遠ざかるとしても，摩擦の法則に就ても，物体の接觸面が理想的に滑かであり，又異物に依つて汚損されて居ないと云ふ條件の下に，之を論ずるのが先決問題でありまして，面の精粗や減摩劑の有無に依る影響は，其から後の話としなければならないのであります。

私の摩擦理論は上述の樣な立前に於て，其の基本法則に就てなされて居るのでありますから，現實の複雜な摩擦現象を對照として，其の說明を豫期せられる討議者には，或は隔靴搔痒の感があられ樣かと存じます。

(2)　前段に於て，摩擦抵抗力なるものは接觸部の分子の結合を破碎する場合に呈する抵抗力であると云ふ私の說が，正しいかどうかと云ふことに，討議者は疑念を持つて居られる樣でありますが，此の點は後段の御質問に對して御返答申上げれば，恐らく御了解のゆかれることゝ存じます。

後段に於て討議者は圖-1 に就て，“破壞されるは A の部分なりや，A′ の部分なりや”と質問して居られますが，私は此の場合 A の部分が破壞するものと考へて居るのであります。何となれば，甲の物体が乙の物體の中に約入した樣な形となつた場合は，齒車の齒の嚙み合と同樣のものでありまして，勿論 Amontons 氏の法則は成り立つ譯はないのであります。是は恐らく摩擦を以て論ずる範圍に屬しないものでありませうが，若し斯樣の場合の抵抗を論ずる必要のある場合は，A′ の部分も亦破壞するものと考へなければならないでありませう。然し Amontons 氏の法則と云ひ，Hardy 氏の實驗と云ひ，彈性變形の理論と云ひ，平滑面体の摩擦に就て，何れも其が Hook 氏の法則の成り立つ程の範圍に於て意義のあるものでありまして，其れ以上の力の作用した場合に就ては，相當の斟酌をして考へなければならないものと思ひます。

それでは上述の樣な餘り激しくない力の加はつて居る場合に就て，A の部分が如何にして破壞されるかと申しまするに，之は先にも申述べました通り，其の部分の分子の狀態を直接見る譯には行きませぬので，誠に遺憾では

ありますが，色々な點から私は斯う考へるとよいと思ひます。

今彈性体の面に圧力を加へますると，其の内部には或る歪の分布が起りますが，其に応じた等応力面なるものを考へることが出來ます。例へば，平面を針先で圧した様の場合には，等応力面は其の針先の向ふ方向の線上に中心を有し，加圧點を通過する大小の或る球面様のものとなつて現はれることは，光彈性の實験（本文終にある備考参照）からでも，彈性理論の示す通りであることを證明して居ります。又 Hardy 氏の實験にある様に，平面上に球面を載せた場合にも，其の等応力面は，加圧部の中心を通じて接觸面に立てた垂直線上に中心を有し，加圧部を通過する，嚴密に云へば極めて近く通過する大小の球面となるものでありまして，斯様な等応力面群は平面側にも球面側にもあることが，光彈性の實験でよく知られて居ります。図-3. は平面を針先で圧した場合，図-4. は平面上に球面を載せた場合の，等応力面の形を示したものであります。

此の事から考へますると，加圧接觸に依つて生じた彈性歪の分布は，理論的に云へば，接觸面に集中して居ると云へるでありませうが，其は分子に大さが無いと考へた純正的の見方でありまして，實際分子には或る大さがある以上，多少其の考へ方を調整しなければならないのであります，即ち，其の歪は少くとも接觸面に近い所では文字通り極めて稠密な分布をなし，深さの方向に向つては其の分布は卒然として減少して居ると考へるのが幾分實際に近いでありませう。

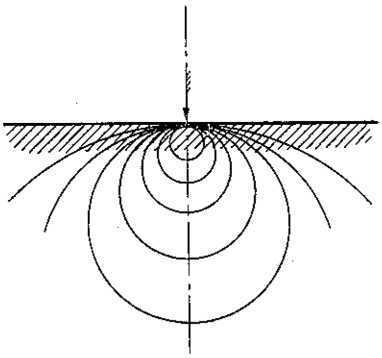


図-3.

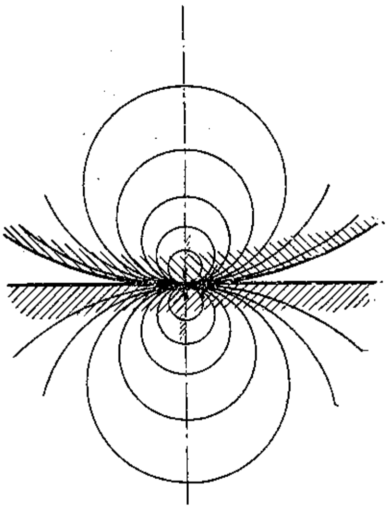


図-4.

卑近な例で申しますと，氷塊を圧した時水態となるのは，加圧接觸の部分に限られて居りますが，これなどは接觸圧が深部に及んで居ないことを，よく示唆したものであります。此の點が，接觸に依る所謂支持點に關係のない彈性歪と，支持點に關係のある歪との現はれ方の相違でありまして，私の論文に於ても此の點誤解のない様に一寸書いて置きましたが，要するに前者が接觸部に極限されて發生するに對して，後者は全面的に發生する違があります。而して更に具体的に說明しますると，當初圧力の加はつて居ない間は，其の分子は平等な間隙を以て配列されて居たものが，加圧接觸に依つて，接觸部位の分子間隙が圧縮されて，其處に体積の減少が起る，これが接觸部に於ける彈性変形の眞相であります。斯様に接觸に依つて圧し付けられた体積は，彈性理論から見れば，体積の無い面上に收斂される筈のものでありまするを，先に述べました通り，實際は分子に或る体積がありますから，若干の厚さを持つた体積内に圧し込まれるものと考へるより外はないのでありますが，元來接觸部分に起る彈性歪なるものが甚だ小さいので，自然上述分子がの圧し込まれると云ふ厚さも極めて微量なものであります。斯様な狀態に於ける，此の圧縮された部分の分子の呈する力は申すまでもなく，理論上内部よりの力で平衡されて居ります。

斯る狀態で接觸して居る甲乙兩体を，互に切線方向に移動させますると，接觸部で接し合つた甲乙兩分子は互に掀ぎ落されます。玆で注意しなければならないことは，ポアッソン比を σ とすれば加圧接觸に依つて歪ませら

れた体積は $(1-\sigma)$ に正比例し剪断弾性係數に反比例すると云ふことゝ，分子を捲ぎ落す時現はれる抵抗は捲ぎ落される分子の數と剪彈性係數との相乘積に正比例すること，とであります。今甲乙兩体夫々に對して，歪ませられた体積を v_1, v_2，ポアツソン比を σ_1, σ_2，剪斷彈性係數を μ_1, μ_2，捲ぎ落す時に呈する抵抗を R_1, R_2，捲ぎ落される分子の數を n_1, n_2，とすれば，次の關係があります。

甲に就て　　　　乙に就て

$$v_1=k'(1-\sigma_1)/\mu_1 \qquad R_1=k''n_1\mu_1 \qquad\qquad v_2=k'(1-\sigma_2)/\mu_2 \qquad R_2=k''n_2\mu_2$$

茲に k', k'' は接觸部の形並に圧力に依つて定まる常數であります。次に $k'k''=k'''$ と置いて，上記の夫々から μ_1, μ_2を消去すれば，$R_1=k'''n_1(1-\sigma_1)/v_1$　$R_2=k'''n_2(1-\sigma_2)/v_2$　然るに此の場合 R_1 と R_2 とは互に働き合つて居る力でありますから，$R_1=R_2$，又近似的に $\sigma_1 \fallingdotseq \sigma_2$ とすれば，從つて上の 2 式から，$n_1/n_2 \fallingdotseq v_1/v_2$ と云ふ結果が得られます。結局，之は捲ぎ落される分子の數は歪ませられた体積に正比例すると云ふことを示して居ります。本文に於て，"分子の結合を破砕し分離するに要する力は沈下体積に正比例する" と申しましたのは，此の理由に依るものであります。

彈性圧縮の狀況に就て，本文の書き方が多少不行屆でありましたので，討議後段の樣な疑問を殘したことは，誠に恐縮でありますが，要するに，摩擦力の數学的表現は三次のものでありますが，其の存在は接觸面上に限られて居る二次のものであります（實際は分子には大さがあるため多少の厚さは持つことになりますが，彈性理論上は斯う考へられます）。即ち，摩擦力は之を數学的に云へば立体力でありまして，從つて "接觸面の廣狹に關係なし" と云ふ Amontons 氏の法則が成立つのでありますが，其の一面，摩擦力の現はれるのは接觸面上に限られた一種の面力でありまして，図-1. で云へば，破砕されるのはの A 部分であつて，A′ の部分ではないのであります。同じ理由に依りまして，図-2. に於ても A の部分が破砕されるのであります。但し，図-2. に示された斯樣な場合，Hardy 氏の行つた樣な實驗を行へば如何なる異つた結果を持つであらうか，又其の場合彈性方程式が如何なる解を有することになるであらうか，全く想像ではありますが，恐らく此の場合とても，極めて近似的に私の理論が適用されることゝ存じます。何となれば，本文の彈性体間の Archimedean Principle の項で申述べました通り，"液体が其に泛ぶ固体に對して呈する浮力が固体の重量と平衡するが如く，彈性体の接觸に於ては，接觸部の彈性歪に依つて起る彈性反力が，接觸に對して加へられたる力と平衡するまで彈性歪が起る" のであります。即ち，彈性変形量は加へられた圧力に正比例すると云ふことは勿論，無限の擴がりを持つた彈性平面上の解ではありますが，変形量の甚だ小なる場合，彈性平面の端部に於ても此の概念が多少の誤差はありませうが成立つであらうことは想像に難くないからであります。

(3)：先づ前段に就て御答へ致します。討議者は恐らく，物体の移動が接觸點に於て等速度で行はるべきものであると云ふ立前で，私の理論に疑を持つて居られる樣でありますが，物体の移動は其の實，接觸點に於て決して等速度で行はれるものとは云へないのであります。

今甲乙兩體を甲を上にし乙を下にして重ね，甲を乙の面上で水平に引く場合に就て考へませう。振動の勢力が與へられて居る以上，甲は靜止狀態に於ける接觸の中正位置を中心として，上下に或る振幅を以て振動して居ります。其の振動が上向きになつて甲が乙から離れる樣な位相に於ては，接觸部の圧力を減じ，彈性変形量を減じ，從つて摩擦抵抗力を減少します。次の瞬時，其の振動が下向きになつて甲が乙に近付く樣な位相に於ては，接觸部の圧力を增し，彈性変形量を增し，從つて摩擦抵抗力を增加することになります。即ち，振動に依つて，摩擦抵抗力は常に上下に変動して居るのであります。

斯様な狀態にある甲を乙の面に沿ふて水平に引かうとする場合，甚だ僅かな力から始めて段々大きな力を加へた場合を考へて行きませう。

先づ其の力が甚だ弱くして，減少した位相にある摩擦抵抗力にも尙能く打ち勝つことが出來ない程であれば，申すまでもなく甲の移動は行はれませぬ。

次に其の力を稍強くして行きまして，極限に減少した位相にある摩擦抵抗力に漸く打ち勝つ程になれば，始めて甲の移動が起ります。此の場合に起る移動は決して連續的のものではなく，摩擦抵抗力が最低位に下つた瞬時だけに起る，間歇的のものであります。之が甲を乙に沿ふて移動し得る最小の力でありまして，所謂運動摩擦抵抗力に當ります。之は卽ち靜止の中正位に於ける摩擦抵抗力，言ひ換へれば，靜止摩擦抵抗力より，相當小さなものであります。

次に加へる力を段々增して見ます。さうして其の力が變動して居る摩擦抵抗力の最高値を越えない限りは，矢張り其の移動は間歇的に起るのであります。例へば，鉄道車輛に就て車輪に制動を加へる場合，車輪下の圧力の減少した位相では，制動力が軌條面に於ける摩擦抵抗力に打ち勝つため，車輪は軌條面を滑走し，次の瞬時車輪下の圧力の增大した位相では，軌條面に於ける摩擦抵抗力が制輪子の力に打ち勝つて，粘着回転をするのでありまして，此の場合，滑走は兩体間に移動の行はれて居ることを意味し，粘着回転は移動の行はれて居ないことを意味するのであります。斯くして軌條面には制動せられた車輪の 1 回の通過に依つて，微かなりとも間歇的の磨耗の印せられるものであることは，私の著書“波狀磨耗を通じて軌條磨耗を見る”の中にも書いて置いた通りであります。(尙本誌掲載の拙論“軌條匐進に就て”9 頁 16～30 行をも御參照願ひます。)

次に甲を水平に引く力を更に一段と強めまして，變動して居る摩擦抵抗力の最高値以上にしますると，今まで間歇的に行はれた移動が，今度は連續的に起ることになります。然しながら此の場合でも，移動の速度は決して等速度ではなく摩擦抵抗力の減少した位相では速く，摩擦抵抗力の增大した位相では遲く移動します。此が制動せられた車輪の場合であれば，連續的の滑走が起るのでありますが，矢張り速く淺く滑るのと遲く深く滑るのとが交番的に起つて，淺く長い磨耗と深く短かい磨耗とが交番的に波をなして軌條面に現はれるのであります。

以上述べましたことで，恐らく前段の御疑念は御晴れになつたことゝ存じますから，次は後段の點に移ります。

既に摩擦抵抗力の瞬時値は，振動に依つて常に變動して居ることを説明致しましたが，其の値を左右するものは振幅”でありまして，“固有振動周期”は別に關係はありません。振幅を大にすれば，兩体間の圧力は大いに變動し，從つて摩擦抵抗力の値も大いに增減變動致します。例へば、鉄道の例で申しますると，列車速度の高い所，地盤の軟弱な所等では軌條の匐進がよく起りますが，之は結局振動の振幅が大であるため，軌條下の摩擦抵抗力を充分減少するに依るから起ることであります。振動周期は變動が單位時間に何回起るかと云ふことに意義を持つに過ぎないものであります。

以上で一通りの御答は終りました。尙書きたいこともありましたが，何れ稿を改めて御叱正を仰ぐ積りであります。

備考： 光彈性の實驗に於て眼に見えるものは勿論 isochlinic line でありがすが，其は點負荷の場合に限つて stress constant の line を意味して居ります。理論上二次の場合は其の等圧線は円であり，三次の場合は軸方向に圧潰された形の球面となることは申すまでもありませぬ。