

## 論 說 報 告

第 22 卷 第 3 號 昭和 11 年 3 月

## 重力堰堤の応力計算に就いて

會員 工学士 石原藤次郎\*

准員 工学士 小西一郎\*\*

On the Calculations of the Stresses in the Straight Gravity Dam

By Tōzirō Isihara, C. E., Member.

Itirō Konisi, C. E., Assoc. Member.

## 要 旨

本文は弾性学的立場から極座標系を用ひて堰堤応力を求める方法を一般化し、直角座標系による解法と比較し、更に進んで梯形法則を用ひた従来の實用的解法の正否を吟味したものである。

目 次	頁
緒 言	1
第 1 章 重力、地震力及び静水圧を受けた堰堤の内部応力の算定	5
第 1 節 基本公式	5
第 2 節 堤頂まで貯水した場合の堰堤応力	8
第 3 節 堤頂上 $h$ の餘裕水深を考へた場合の堰堤応力	10
第 4 節 重力及び地震力のみによる堰堤応力	11
第 5 節 重力のみによる堰堤応力	12
第 6 節 主応力及び其の方向並に最大剪断応力	13
第 7 節 計算例 其の 1	13
第 2 章 堤頂に集中荷重及び曲げモーメントを受けた堰堤の内部応力の算定	18
第 1 節 概 説	18
第 2 節 堤頂に作用する任意方向の集中荷重 $P$ のみによる堰堤応力	18
第 3 節 堤頂に作用する曲げモーメント $M$ のみによる堰堤応力	20
第 4 節 堤頂修正の堰堤応力に及ぼす影響	21
第 5 節 計算例 其の 2	22
結 言	23
附 言	24

## 緒 言

近時重力堰堤の發達は、著しく堤高の増加を來す様になつた。此の場合に於いて、堤底幅と堤高の比を許し得る限り減少させることは、材料の節約となり、工事費に及ぼす影響は著しいものがある。而して此の比の最小限度、即ち最も有効な最小断面を決定するには、堰堤の内部応力を正確に算出することが必要であり、これに因つて堰堤の安全度が確立されることになる。特に高堰堤に對する安全度は、堰堤の破壊に伴ふ被害が、他の構造物に比し著

\* 京都帝國大學工学部助教授

\*\* 同 講師

しく大きいことから考へても、重大なる意義を有するものである。

此の意味で堰堤応力に就いては、古くから研究され、多くの權威者の發表したものがあつたが、之を大別して、實用的解法と弾性学的解法の二つにする事が出来ると思ふ。以下之等に就いて、簡単にその發達の経路を述べよう。

### (1) 在來の實用的解法

茲に實用的解法とは、純弾性学理論に基かないもの全体を指すものとする。此の實用的解法の特質として擧げることの出来るのは、堰堤の水平断面を考へることである、即ち一定断面形を有する眞直な片持梁の理論を、堰堤の場合に擴張したものに相當する。

此の内最も古いものは Méry が提唱し、Sazilly, Bélanger を經て發達した堰堤理論である。これは堰堤を曲げモーメントと垂直圧縮力とを受ける眞直な片持梁と見做し、梯形法則の理論から水平断面に働く鉛直圧縮応力を求め、そのみによつて堰堤応力に對する安全度を論じたものである。従つて軸に垂直でない水平断面に對しても、Navier の假定がそのまま成立するものと假定したわけである。

Atcherley と Pearson<sup>(1)</sup> は、水平断面に於ける鉛直直応力は直線的に、剪断応力は拋物線的に変化するものと假定して応力状態を求めた。その上實驗を行ひ、其の結果が計算式とよく一致する事及び貯水池満水の時、堰堤上流趾に引張応力を生ずることを發表して居る。然し彼等の水平断面に於ける応力分布に關する假定は、弾性理論に根據を置かないものである。

Schäffer<sup>(2)</sup> 及び Ramisch<sup>(3)</sup> は剪断応力分布の假定を除き、水平断面の鉛直直応力が直線的変化をすると云ふ假定のみから応力を求めた。

Cain<sup>(4)</sup> も同様に鉛直直応力を梯形法則から誘導し、他の未知2応力は、鉛直及び水平の方向の釣合方程式を解いて求め、更に此等3応力から堰堤断面の各點に作用する主応力、最大剪断応力を求め、此れに依つて堰堤の安定を論ずべきものだと主張した。

新井氏<sup>(5)</sup>はあらゆる外力に對しても梯形法則が成立するものと假定して、先づ鉛直直応力を求め、之れを釣合方程式に入れて他の未知2応力を算定する方法を發表された。

又 Cain の理論は、Holmes<sup>(6)</sup> により重力堰堤より曲線重力堰堤、支壁式堰堤にまで適用された。

斯くして梯形法則を用ひる實用的解法は主応力及び最大剪断応力の算出に迄發達したが、常に問題となるのは梯形法則の可否であつて、種々の荷重状態に就いて夫々嚴密な吟味を要するものと考へられる。

最近 Jakobsen<sup>(7)</sup> は水平断面に於ける鉛直直応力を

$$\sigma_x = Ax + By + C \frac{y^2}{x} + F \frac{y^3}{x^2}, \quad (\text{座標系の取り方は本文のものに倣ふ})$$

と假定し、その諸係數  $A, B, C$  及び  $F$  を釣合の法則と最小働の原理より求める方法を提唱し、從來の梯形法則の缺點を正さうとした。彼の方法によれば、先に行はれた Atcherley と Pearson の模型實驗とよく符合する結果を示し、鉛直直応力、水平直応力及び剪断応力は、何れも上に凸の曲線的な分布をなす。その結果普通に採用されて居る断面形に就いても、上流面に於いて相當著しい引張応力の生ずることを指摘して居る。然し乍らこの鉛直直応力の假定そのものゝ弾性学的合理性を證明せざる限り、從來の梯形法則の適用に比し、さしたる進歩を認める事が出来ないと思ふ。

### (2) 在來の弾性学的解法

純弾性学理論より出發して、堰堤応力を解かうとしたものであつたが、此の解法では主として応力函數の導入を其の

特徴と見るべきであらう。

此の方面に於ける最初の開拓者は Lévy<sup>(8)</sup> である。彼は基本三角形断面を有する堰堤に於いて、上下流両面が無限に下方に擴がつて居り、堰堤の長さも亦無限に大きいものと仮定して、外力として自重及び堤頂を水面とする静水圧を取つた。斯様な堰堤の応力を、平面応力状態と仮定して、座標  $(x, y)$  に關する三次同次式を応力函數に取り、上下流両面の限界條件より其の諸係數を定めた。其の結果鉛直直応力、水平直応力及び剪断応力は何れも直線的に変化することを結論した。

物部博士<sup>(9)</sup> の發表せられた解法は、Lévy の解法を擴張して、更に地震力を考慮した場合の応力算定方法を與へたものである。即ち始めに鉛直直応力、水平直応力及び剪断応力を Lévy の研究の結果に従つて、夫々座標  $(x, y)$  に關する一次式と仮定して、其の諸係數を限界條件と釣合方程式から求めた。此の解法の嚴密に適用されるのは、貯水池が全部空虛なるか、又は貯水池水面が丁度基本三角形頂點まで達して居る場合に限るのであつて、他の水面位置に對しては論及されて居ないことは、注目に價することである。

Lévy の後に Mitchell<sup>(10)</sup> は、堤頂に附加荷重が作用する場合や、堤頂に任意の方向を以つて集中荷重が作用する場合の応力を論じ、Lévy の理論に一進展を劃した。

次に Fillunger<sup>(11)</sup> は Lévy と同様な仮定のもとに、極座標系によつて応力を求めた、尚堤頂に作用する曲げモーメントに依る応力、又揚圧力及び堰堤体内に於ける水の滲透<sup>(12)</sup> に對しても有力な理論を展開した。

一般に二次元応力問題では、與へられた限界條件のもとに於いて、四次の偏微分方程式を充す Airy の応力函數を用ひて、諸応力を表はし得る事は周知の事實であり、而もこの四次偏微分方程式の一つの特解として、多項式の形で表はされるものがある事も知られて居る。この事實に立脚して Wolf<sup>(13)</sup> は、基本三角形断面を有する堰堤の応力を求めたが、その際基礎の影響に關する一考察として、基礎が硬直であつて変形を起さないと云ふ場合を取扱つた。尚彼は鉛直な上流面と  $45^\circ$  に傾いた下流面とを有する堰堤に就き、鉛直方向の座標に關する五次の多項式を用ひて數値計算を行つた。その結果によると堤底の水平断面に於いて、鉛直直応力の分布は直線的でなく、Lévy の解法で求めたものと比較すると、中央部ではそれより大きく、兩端部ではそれより小さい。又剪断応力の分布も同様に直線的でなく、下流面近くで最大値を取り、下流趾に於いては直線分布の場合より小となる。次に堰堤の高さの中央の断面に於ける剪断応力は、僅かに直線分布から外れ、唯下流面近くで、大きな誤差を示すに止ると云ふ結果になつて居る。

### (3) 著者の研究

著者は堰堤応力の彈性学的研究の一段階として、基本三角形断面を有する直線重力堰堤をとり、極座標系による応力の洞察を試みた。この極座標系による取扱は、既に Fillunger<sup>(11)</sup> が用ひたものであるが、著者はこれに地震力を加へ、且つ断面形も一般の場合を取扱つて、(1) 静水圧、重力及び地震力による応力、(2) 堤頂に作用する集中荷重及び曲げモーメントによる応力を彈性学的に算定した。次いで各場合に對し直角座標系に交換して、從來實用的解法として一般に用ひられた、水平断面に於ける垂直応力  $\sigma_x$  の分布に對する梯形法則の正否を検討し、特殊の外力に對してのみこの梯形法則が正しい事を明らかにした。尚堤頂に作用する結水圧、貯水面の波動力及び堤頂修正による堰堤応力の算定に關しても、一考察方法を述べたのである。斯くして彈性学的立場から極座標系を用ひて堰堤応力を求める Fillunger<sup>(11)</sup> の方法を一般化して、Lévy<sup>(8)</sup>、物部博士<sup>(9)</sup>、Mitchell<sup>(10)</sup> などによる直角座標系による彈性学的解法とを比較し、更に進んで梯形法則を用ひた從來の實用的解法<sup>(1)-(3)</sup> の正否を吟味したのである。

尙本文に於いては Lévy<sup>(8)</sup> その他と同様に、三角形断面の上下流面は長く下方に擴り、且つ堰堤の長さ即ち  $z$

軸の方向の長さは断面の寸法に比して極めて大きいものとした。堰堤の長さが大きく、之に作用する外力も亦後述する如く堰堤の長さの方向に對して変化しないものを取扱ふから、堰堤の兩岸との取付部分から相當離れた断面に於いて平面変形 (plane strain) をなし、長さの方向に垂直な断面内の各點は変形後もやはり長さの方向に垂直な平面内に止まるものと考へてよいわけである。斯くして平面変形をなすものとすれば、この問題は第1章第1節に見る如く、応力算定に關して断面に於ける二次元の問題に変換されるのであつて、本文は何れも上の仮定の下に二次元の応力問題として取扱つてゐる。

### 参 考 文 献

- (1) L. W. Atcherley and K. Pearson: „On some disregarded points in the stability of masonry dams”, Drapers' Company Research Memoirs, Technical Series II, London 1904; abstract in Minutes of Proceedings, Inst. C. E., Vol. 162, p. 456. 1905.
- (2) Schäffer: „Zur Frage der Standsicherheit der Stützmauern”, Zentralblatt der Bauverwaltung, Nr. 67, S. 432-433. 1906.
- (3) Ramisch: „Über statische Berechnung von Talsperren”, Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 43, S. 691-694. 1909.  
Ramisch: „Beitrag zur statischen Berechnung von Talsperren”, Zeitschr. des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 6, S. 81-86. 1911.
- (4) W. Cain: „Stresses in Masonry Dams”, Transactions Am. Soc. C. E., vol. 64, p. 208-223. 1909.
- (5) 新井義輔: „重力堰堤の内部応力算定に關する一方法”, 本誌第 21 卷第 5 號 677 頁
- (6) W. H. Holmes: „Determination of Principal Stresses in Buttresses and Gravity Dams”, Proceedings Am. Soc. C. E., vol. 58, p. 71-93. 1932.
- (7) B. F. Jakobsen: „Stresses in Gravity Dams by Principle of Least Work”, Transactions Am. Soc. C. E., vol. 96, p. 489-513. 1932.
- (8) Maurice Lévy: „Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire”, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris., t 127, p. 10, 1898.
- (9) 物部長穂: „土木耐震學”, 150-165 頁
- (10) J. H. Mitchell: Proc. London Math. Soc., vol. 32, p. 80, 1900.
- (11) P. Fillunger: „Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers”, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 59-60, S. 275-285. 1912.  
P. Fillunger: „Über die Anwendung des Trapezgesetzes zur statischen Berechnung von Talsperren”, Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst., H. 45, S. 767-774. 1913.  
P. Fillunger: „Neuere Grundlagen für die statische Berechnung von Talsperren”, Zeitschr. des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 23, S. 441-447. 1914.
- (12) P. Fillunger: „Der Auftrieb in Talsperren”, Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst., 1913, S. 532 ff., S. 552 ff., S. 567 ff. u. S. 586 ff.
- (13) K. Wolf: „Zur Integration der Gleichung  $\Delta \Delta F = 0$  durch Polynome im Falle des Staumauernproblems”, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Feb., 1914.
- (14) S. Timoshenko: „Theory of Elasticity”, p. 114, 1934.
- (15) Lorenz: „Technische Elastizitätslehre”, S. 529 ff.  
A. Miura: „Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern”, S. 47 ff. S. 68 ff.
- (16) Vogt: „Über die Berechnung der Fundamentdeformation”, Det. Norske Videnskap<sup>2</sup> Akademi, 1925.

## 記 號

本文に於いては 圖-1 の如く、三角形堰堤の堤頂を原点とし、これより鉛直下向きに原線を取り、偏角は堰堤下流向きに測つたものを正に取る。又直角座標系を用ひる時は原点を堤頂、 $x$  軸はこれより鉛直下向きに取り、 $y$  軸は下流向きに取ることにする。尚  $z$  軸を考へる時は  $xy$  面に垂直、即ち堰堤の長さの方向に取るものとする。記號は次の如く取り、單位は總べて  $m, t$  とする。

- $\alpha$ : 堰堤下流面が鉛直軸  $x$  となす角 (符號を含める)  
 $\beta$ : 堰堤上流面が鉛直軸  $x$  となす角 (符號を含める)  
 $\gamma$ : 堰堤頂角の二等分角  $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$  (符號を含めない)  
 $m$ :  $\tan \alpha =$  下流面の傾斜,  $n$ :  $\tan \beta =$  上流面の傾斜,  $H$ : 堰堤の總高  
 $H_1$ : 堤頂修正を行つた場合の基本三角形断面の高さ  
 $h_0$ : 基本三角形断面の堤頂上の餘裕水深  
 $w$ : 堤体の單位容積の重量,  $w_0$ : 池水の單位容積の重量  
 $k_1$ : 満水時の水平震度 (下流向きに作用するものを正に取る)  
 $k_2$ : 空虛時の水平震度 ( 同 上 )  
 $k_0$ : 鉛直震度 (上向きを正に取る)  
 $M$ : 堤頂に作用する曲げモーメント  $P$ : 堤頂に作用する集中荷重  
 $\sigma_r$ : 導径方向の直応力,  $\sigma_\theta$ : 切線方向の直応力,  $\tau_{r\theta}$ : 剪断応力 (極座標系に依る場合)  
 $\sigma_x$ : 鉛直方向の直応力,  $\sigma_y$ : 水平方向の直応力,  $\tau_{xy}$ : 剪断応力 (直角座標系に依る場合)  
 $\sigma_1$ : 第 1 主応力,  $\sigma_2$ : 第 2 主応力,  $\max \tau$ : 最大剪断応力  
 $t$ : 第 2 主応力がその點の導径となす角  
 $u$ : 導径方向の変位,  $v$ : 切線方向の変位,  $w$ :  $z$  軸の方向の変位  
 $\mu$ : ポアソン比,  $E$ : ヤング係數,  $G$ : 剪断彈性係數

## 第 1 章 重力、地震力及び靜水圧を受けた堰堤の内部応力の算定

## 第 1 節 基本公式

## (1) 概 説

本文に於いては基本三角形断面、即ち  $r, \theta$  面に垂直に、且つ堤頂  $O$  を通る如く  $z$  軸を取るものとする。然らば堰堤の長さの方向、即ち  $z$  軸の方向に関する歪は、次式で表はされる。

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \quad \dots \dots \dots (1)$$

然るに前述の如く平面変形状態とすれば、 $w$  は一定となり、又  $u, v$  は  $r, \theta$  のみの函数で表はされる。この關係を (1) 式に入れると、

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{rz} = 0, \quad \gamma_{z\theta} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

となる。故にフックの法則を (3) 式に用ひると、

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} = 0, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G} \tau_{rz} = 0, \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G} \tau_{z\theta} = 0$$

$$\therefore \sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

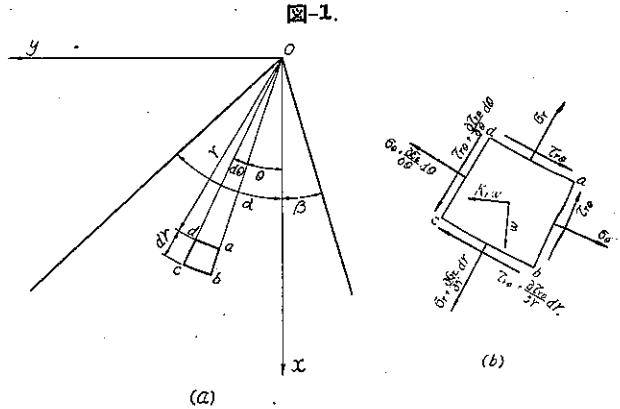
なる關係を得る。従つて此の堰堤が平面変形を保つ爲に必要な応力  $\sigma_z$  は、三角形断面内に働く応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  を知れば、(3) 式の第 1 式から求める事が出来る。故に此の場合の未知応力は  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の 3 個になり、その算

定の手続は平面応力 (plane stress) の場合に一致するわけである。

擬て此等 3 未知応力を求めるには、次の如く釣合方程式を作り連続条件及び限界条件を充す様に之を解けばよいのであるが、その手段として応力函数  $\phi(r, \theta)$  を用ひる事にする。

(2) 釣合方程式

図-1 (a) の如く、2 つの極面 ob, oc 並に 2 つの円錐面 bc, ad によつて圍まれた微素片 aded (その厚さを単位長と考へる) に就いて、其の導線及び切線方向の力の釣合を考へる。図-1 (b) は此の微素片 abcd を取り出し、各面に作用する応力と重力及び地震力の作用方向を示したものであるが、之等を夫々導線及び切線方向への分力に分けて加算すると、次の 2 つの釣合方程式が得られる。



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + w \cos \theta + k_1 w \sin \theta = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - w \sin \theta + k_2 w \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

(3) 限界条件と連続条件

堰堤の上下流両面に作用する外力が  $r$  の多項式で表はされるものとする、限界面上の各點に於ける応力は夫々此の點に働く外力と釣合を保たねばならないから、次の限界条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{上流面に對して} \\ (\sigma_\theta)_{\theta=\beta} &= A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} &= B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \dots \\ \text{下流面に對して} \\ (\sigma_\theta)_{\theta=\alpha} &= C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + \dots \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=\alpha} &= D_0 + D_1 r + D_2 r^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

次に断面各部の変形、従つて各部の応力は、連続の条件を満足することが必要である。此の条件は連続方程式 (Compatibility equation) として表されるものである。而して茲に取扱つて居る応力状態に對しては、連続方程式は次式の如く表される。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

(4) 応力函数

今 (4) 式を解くに際し、応力  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  が応力函数  $\phi(r, \theta)$  より次の如くして導かれるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - w r \cos \theta - k_1 w r \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - w r \cos \theta - k_1 w r \sin \theta, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

この (7) 式の  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を (4) 式に代入すると (4) 式が満足される事がわかるから、 $\phi(r, \theta)$  を用ひて (7) 式から導かれる 3 個の未知応力は釣合の条件を満足して居る事を知る。

次に連続方程式 (6) の応力の項に (7) 式を代入すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - 2wr \cos \theta - 2k_1 wr \sin \theta\right) = 0$$

然るに 
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) (2wr \cos \theta + 2k_1 wr \sin \theta) = 0$$

であるから結局所要の連続方程式は次の如くなる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

(5)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の算式

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を (7) 式の如く  $\phi(r, \theta)$  を用ひて表すと釣合方程式 (4) を満足するから、結局 (8) の連続方程式を満し、而も (5) 式の限界条件を満す様な  $\phi(r, \theta)$  を求めれば、(7) 式に依つて所要の  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を知る事が出来るわけである。

然るに先づ (8) 式を満す  $\phi(r, \theta)$  は、一般に次式 (14) で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) = & a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r + d_0 r^2 \theta + a_0' + b_0' \theta + c_0' r \sin \theta + d_0' r \cos \theta \\ & + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

この (9) 式を (7) 式に代入して求めた応力を  $r=0$  にて  $\infty$  とする事のない様に、 $r^n, (n \geq 2)$  なる項のみを取ると次の如し。

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) = & b_0 r^2 + d_0 r^2 \theta + b_1 r^3 \cos \theta + d_1 r^3 \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2}) \sin n\theta \dots\dots\dots (9') \end{aligned} \right\}$$

(9') を (7) 式に入れると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = & 2b_0 + 2d_0 \theta - 2a_2 \cos 2\theta - 2c_2 \sin 2\theta \\ & + r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} r^n [-(n+1)\{(n-2)b_n \cos n\theta + (n-2)d_n \sin n\theta \\ & \quad + (n+2)a_{n+2} \cos(n+2)\theta + (n+2)c_{n+2} \sin(n+2)\theta\}] \\ \sigma_\theta = & 2b_0 + 2d_0 \theta + 2a_2 \cos 2\theta + 2c_2 \sin 2\theta \\ & + r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} r^n [(n+1)(n+2)\{b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta + a_{n+2} \cos(n+2)\theta + c_{n+2} \sin(n+2)\theta\}] \\ \tau_{r\theta} = & -d_0 + 2a_2 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [(n+1)\{n b_n \sin n\theta - n d_n \cos n\theta \\ & \quad + (n+2)a_{n+2} \sin(n+2)\theta - (n+2)c_{n+2} \cos(n+2)\theta\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$\phi(r, \theta)$  が限界条件を充す爲には、この (10) 式の  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の諸係数が (5) 式を充す様にすればよい。今 (10) 式に (5) 式を代入すると、 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の  $r^n (n \geq 0)$  の項は何れも未知係数  $b_n, d_n, a_{n+2}$  及び  $c_{n+2}$  を含むが、左右

両邊の  $r^n$  の係数を等しく置く事により、(5) の 4 個の式に対応して 4 個の條件式が得られるから、之等の係数の全部を決定する事が出来る。

即ち堰堤の上、下流面に作用する外力が、 $r$  の多項式で表される時には連続方程式 (8) を満足し而も限界条件 (5) を満足する  $\phi(r, \theta)$  が求められ、その  $\phi(r, \theta)$  は釣合方程式 (4) を満足するから、結局堰堤の内部応力を弾力学的に厳密に算定し得る事になる。

(6)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  の算式

以上の如くして応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  を決定することが出来たから、次に極座標系を直角座標系に変換して直角座標系に於ける応力  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  を求める事が出来る。

この爲に 図-2(a) の如く偏角  $\theta$ 、導半径  $r$  を有する一 点  $P$  に於いて、水平面  $ab$  導線に平行な平面  $ac$  及びこれに直角に交はる  $bc$  なる平面で圍まれた極微三角形片  $abc$  をとつて、各平面に作用する垂直応力及び剪断応力の正の方向を图示すれば 図-2(b) の如くなり、

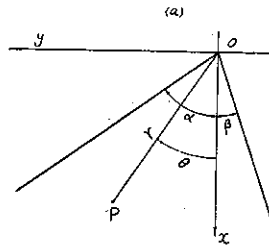
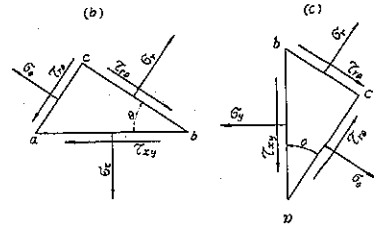


図-2.



又鉛直面  $ac$ 、導線に平行な平面  $ac$  及びこれに直角に交はる  $bc$  なる平面で圍まれた極微三角形片  $abc$  をとつて、各平面に作用する垂直応力及び剪断応力の正の方向を图示すれば 図-2(c) の如くなる。此の極微三角形片  $abc$  に就いて各応力の釣合条件から次の關係が導かれる。

$$\sigma_x = \cos^2 \theta \sigma_r + \sin^2 \theta \sigma_\theta - \sin 2\theta \tau_{r\theta} \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma_y = \sin^2 \theta \sigma_r + \cos^2 \theta \sigma_\theta + \sin 2\theta \tau_{r\theta} \dots\dots\dots (12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \sigma_r - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sigma_\theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \tau_{r\theta} \dots\dots\dots (13)$$

茲に (11) 式は 図-2 (b) に於いて鉛直方向の釣合、(12) 式は 図-2 (c) に於いて水平方向の釣合、(13) 式は 図-2 (b) 又は (c) に於いて水平又は鉛直方向の釣合条件から求められるものである。

第 2 節 堤頂まで貯水した場合の堰堤応力

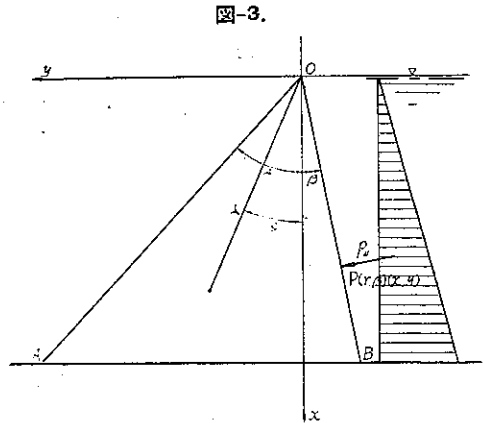
(1)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$

この場合の水圧は 図-3 の様であるから、限界条件式 (5) は次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{上流面に對して} \\ & (\sigma_\theta)_{\theta=\beta} = -A_1 r, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} = 0 \\ & \text{下流面に對して} \\ & (\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

茲に  $A_1 = w_0 \cos \beta$

従つてこの (14) 式の關係を充す様に (10) 式の諸係数を定めれば、所要の  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  が求められるわけである。今 (14) 式の各關係を (10) 式に代入し、夫々左右兩邊の  $r^n$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) の係数を等しいと置けば、 $r$  の一乗項の係数  $b_1, d_1,$





$a_3$  及び  $c_3$  は次の関係を満足することを要し、他の諸係数は何れも零であることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cdot b_1 + \sin \beta \cdot d_1 + \cos 3\beta \cdot a_3 + \sin 3\beta \cdot c_3 &= \frac{1}{6}(w \cos \beta + k_1 w \sin \beta - A_1) \\ \sin \beta \cdot b_1 - \cos \beta \cdot d_1 + 3 \sin 3\beta \cdot a_3 - 3 \cos 3\beta \cdot c_3 &= 0 \\ \cos \alpha \cdot b_1 + \sin \alpha \cdot d_1 + \cos 3\alpha \cdot a_3 + \sin 3\alpha \cdot c_3 &= \frac{1}{6}(w \cos \alpha + k_1 w \sin \alpha) \\ \sin \alpha \cdot b_1 - \cos \alpha \cdot d_1 + 3 \sin 3\alpha \cdot a_3 - 3 \cos 3\alpha \cdot c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

この (15) 式を解いて  $b_1, d_1, a_3$  及び  $c_3$  を求めると、

$$b_1 = \frac{D_1}{D}, \quad d_1 = \frac{D_2}{D}, \quad a_3 = \frac{D_3}{D}, \quad c_3 = \frac{D_4}{D}$$

茲に

$$D = \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta & \cos 3\beta & \sin 3\beta \\ \sin \beta & -\cos \beta & 3 \sin 3\beta & -3 \cos 3\beta \\ \cos \alpha & \sin \alpha & \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 3 \sin 3\alpha & -3 \cos 3\alpha \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 10 \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - 6 \cos(\alpha - \beta) \cos 3(\alpha - \beta)$$

$D_1, D_2, D_3$  及び  $D_4$  は行列式  $D$  の第 1, 第 2, 第 3 及び第 4 行の各要素の代りに夫々 (15) 式右邊の常數項を置き換へたものであつて、其の計算の結果は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= w \left\{ \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ &\quad + k_1 w \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ &\quad + A_1 \left\{ \frac{3}{2} \sin \alpha \sin 3(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 3(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos \beta \right\} \\ D_2 &= w \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \right\} + k_1 w \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ &\quad + A_1 \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 3(\alpha - \beta) - \frac{3}{2} \cos \alpha \sin 3(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \beta \right\} \\ D_3 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 3\beta - \frac{1}{2} \cos 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \sin 3\alpha \cos \beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos \alpha \sin 3\beta \right\} \\ &\quad + k_1 w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \cos 3\alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 3\beta + \frac{1}{6} \sin \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{6} \right. \\ &\quad \left. \sin 3\alpha \sin \beta \right\} + A_1 \left\{ \frac{1}{6} \sin 3\alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos 3\alpha \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos 3\beta \right\} \\ D_4 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{2} \sin 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \cos \alpha \cos 3\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos 3\alpha \cos \beta \right\} \\ &\quad + k_1 w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin 3\alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{6} \sin \alpha \cos 3\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos 3\alpha \sin \beta \right\} + A_1 \left\{ \frac{1}{2} \sin 3\alpha \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{6} \cos 3\alpha \sin(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin 3\beta \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

依つて求める応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ \sigma_\theta &= r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ \tau_{r\theta} &= r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

茲に諸係数は (16) 式により與へられる。

(2)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は 夫々 (11), (12), (13) 式に (17) 式を代入し、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

なる關係を入れると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (2b_1 - 6a_3 - w)x + (6d_1 - 6c_3 - k_1 w)y \\ \sigma_y &= (6b_1 + 6a_3 - w)x + (2d_1 + 6c_3 - k_1 w)y \\ \tau_{xy} &= -\{(2d_1 + 6c_3)x + (2b_1 - 6a_3)y\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

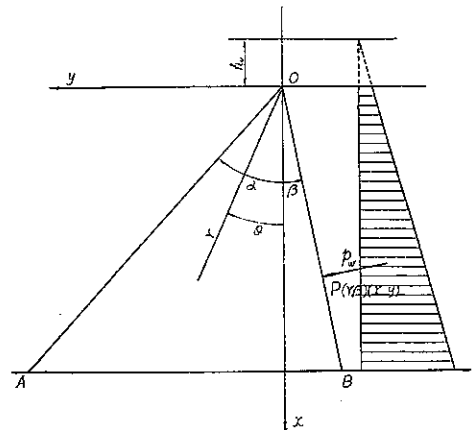
即ち  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は  $x, y$  に關する一次同次式で表され、特に  $x =$  一定 即ち水平断面に對しては  $y$  の一次式となり  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  が何れも直線の変化をなす事になる。然るに堤頂迄貯水した場合の三角形断面を有する堰堤に就いて、其の鉛直直応力  $\sigma_x$  を梯形法則から求め、尙此の  $\sigma_x$  を用ひて、釣合方程式から  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  を求めると、其の結果は (18) 式と全く一致することが證明される。故に本節で取扱つた外力に對しては、從來用ひられた応力分布に關する梯形法則が弾性學的に嚴密に成立することが結論される。

又著者は前述の如く、釣合、連続、限界諸條件より応力算定を行ひ、最後に (18) 式を得たのであるが、物部博士の方法は、始めに各応力を  $x, y$  に關する一次同次式と假定して、同一の限界及び釣合條件によつて各応力の諸係数を定められた。よつて其の過程は互に逆をなして居るが、斯くして得た結果の一致するのは當然である。これは応力を表す  $x, y$  の諸係数を直接計算比較することに依つても證明されることである。

第 3 節 堤頂上  $h_0$  の餘裕水深を考へた場合の堰堤応力

堰堤の構造上基本三角形断面に對しては餘裕水深を考へる 必要はないわけであるが、後述する如く堤頂に附加断面を考へ堰堤断面の補正を行つた場合の応力の考察に必要であるから、茲に一節を割く事にする。

図-4.



(1)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$

この場合の水圧は 図-4 の様であるから、限界條件式 (5) は次の如く表される。

$$\left. \begin{aligned} \text{上流面に對して, } (\sigma_\theta)_{\theta=\beta} &= -(A_0 + A_1 r), & (\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} &= 0 \\ \text{下流面に對して, } (\sigma_\theta)_{\theta=\alpha} &= 0, & (\tau_{r\theta})_{\theta=\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} (19)$$

茲に  $A_0 = w_0 h_0, A_1 = w_0 \cos \beta$

この (19) 式の關係を (10) 式に代入し、夫々左右兩邊の  $r^n (n=0, 1, 2, \dots)$  の係数を等しいと置けば、第 2 節に於けると同様に、常數項及び  $r$  の一乘項の係数は次の如くなり、その他の諸係数は何れも零である事がわかる。

$$\left. \begin{aligned} \text{常數項: } b_0 &= \frac{D_1'}{D'}, d_0 = \frac{D_2'}{D'}, a_2 = \frac{D_3'}{D'}, c_2 = \frac{D_4'}{D'} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{茲に } \left\{ \begin{array}{l} D' = 4 - 4(\alpha - \beta) \sin 2(\alpha - \beta) - 4 \cos 2(\alpha - \beta) \\ D_1' = A_0 \{ 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) - 1 \} \\ D_2' = -2A_0 \sin 2(\alpha - \beta) \\ D_3' = A_0 (\cos 2\alpha - \cos 2\beta) \\ D_4' = A_0 (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \end{array} \right. \dots\dots (20)$$

$r$  の一乗項の係数:  $b_1, d_1, a_3, c_3$  は (16) 式の通り

従つて求める応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  は次の如くなる。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = 2b_0 + 2d_0\theta - 2a_2 \cos 2\theta - 2c_2 \sin 2\theta \\ \quad + r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ \sigma_\theta = 2b_0 + 2d_0\theta + 2a_2 \cos 2\theta + 2c_2 \sin 2\theta \\ \quad + r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\ \tau_{r\theta} = -d_0 + 2a_2 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta \\ \quad + r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta) \end{array} \right\} \dots\dots (21)$$

茲に諸係数は (20) 式にて與へられる。

(2)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

(21) 式を (11), (12), (13) 式に代入して,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \left\{ 2b_0 - 2a_2 + 2d_0 \left( \arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \right. \\ \quad \left. + (2b_1 - 6a_3 - w)x + (6d_1 - 6c_3 - k_1 w)y \right\} \\ \sigma_y = \left\{ 2b_0 + 2a_2 + 2d_0 \left( \arctan \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \right. \\ \quad \left. + (6b_1 + 6a_3 - w)x + (2d_1 + 6c_3 - k_1 w)y \right\} \\ \tau_{xy} = - \left\{ \left( 2c_2 + d_0 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) + (2d_1 + 6c_3)x + (2b_1 - 6a_3)y \right\} \end{array} \right\} \dots\dots (22)$$

従つて  $x$  = 一定, 即ち水平断面に對しても  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は何れも  $y$  の一次式とならず, 従來用ひられた応力分布に關する梯形法則が成立しない事を知る。

#### 第 4 節 重力及び地震力のみによる堰堤応力

(1)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$

(16) 式に於いて  $A_1 = 0$  と置いて  $b_1, d_1, a_3$  及び  $c_3$  を求め, 之等を (17) 式の係数として用ひればよいから, その結果は次の様である。

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \frac{D_1}{D}, \quad d_1 = \frac{D_2}{D}, \quad a_3 = \frac{D_3}{D}, \quad c_3 = \frac{D_4}{D} \\ \text{茲に } D = 6 - 10 \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - 6 \cos(\alpha - \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \\ D_1 = w \left\{ \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ \quad + k_1 w \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ D_2 = w \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\ \quad + k_1 w \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) \right. \\ \quad \left. - \sin \alpha \sin \beta \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \end{array} \right\} (16')$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 3\beta - \frac{1}{2} \cos 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \sin 3\alpha \cos \beta + \frac{1}{6} \cos \alpha \sin 3\beta \right\} \\
 &\quad + k_1 w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \cos 3\alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 3\beta + \frac{1}{6} \sin \alpha \sin 3\beta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{6} \sin 3\alpha \sin \beta \right\} \\
 D_4 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{2} \sin 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \cos \alpha \cos 3\beta + \frac{1}{6} \cos 3\alpha \cos \beta \right\} \\
 &\quad + k_1 w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin 3\alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{6} \sin \alpha \cos 3\beta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos 3\alpha \sin \beta \right\}
 \end{aligned}$$

従つて

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\
 \sigma_\theta &= r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta) \\
 \tau_{r\theta} &= r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (17')$$

茲に 諸係数は (16') 式にて與へられ。

(2)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= (2b_1 - 6a_3 - w)x + (6d_1 - 6c_3 - k_1 w)y \\
 \sigma_y &= (6b_1 + 6a_3 - w)x + (2d_1 + 6c_3 - k_1 w)y \\
 \tau_{xy} &= -\{(2d_1 + 6c_3)x + (2b_1 - 6a_3)y\}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (18')$$

茲に 諸係数は (16') 式にて與へられる

第 5 節 重力のみによる堰堤応力

第 4 節に於いて  $k_1 = 0$  とすればよいかからその結果は次の様である。

(1)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ .

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{D_1}{D}, \quad d_1 = \frac{D_2}{D}, \quad a_3 = \frac{D_3}{D}, \quad c_3 = \frac{D_4}{D} \\
 \text{茲に } D &= 6 - 10 \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - 6 \cos(\alpha - \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \\
 D_1 &= w \left\{ \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin 3(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\
 D_2 &= w \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cos 3(\alpha - \beta) \right\} \\
 D_3 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 3\beta - \frac{1}{2} \cos 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \sin 3\alpha \cos \beta + \frac{1}{6} \cos \alpha \sin 3\beta \right\} \\
 D_4 &= w \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 3\beta - \frac{1}{2} \sin 3\alpha \sin \beta - \frac{1}{6} \cos \alpha \cos 3\beta + \frac{1}{6} \cos 3\alpha \sin \beta \right\}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (16'')$$

従つて

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta) \\
 \sigma_\theta &= r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - w \cos \theta) \\
 \tau_{r\theta} &= r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (17'')$$

茲に 諸係数は (16'') 式にて與へられる

(2)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (2b_1 - 6a_3 - w)x + (6d_1 - 6c_3)y \\ \sigma_y &= (6b_1 + 6a_3 - w)x + (2d_1 + 6c_3)y \\ \tau_{xy} &= -\{2d_1 + 6c_3\}x + \{2b_1 - 6a_3\}y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18'')$$

茲に 諸係数は (16'') 式にて與へられる

**第 6 節 主応力及び其の方向並に最大剪断応力**

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  より 主応力を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

又主応力の方向は

$$\tan 2t = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta} \dots\dots\dots(24)$$

で與へられる。茲に  $t$  は其の點の導線と  $\sigma_2$  との方向のなす角を表す。

次に最大剪断応力は

$$\max \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \dots\dots\dots(25)$$

而して  $\max \tau$  の作用線は恒に、兩主応力線に對して  $45^\circ$  の傾斜を爲すから、特に  $\max \tau$  の方向を計算する必要はない。

要するに (23), (24), (25) の各式に (10) 式で與へられる  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を代入すれば所要の主応力、主応力の方向及び最大剪断応力が判る。

今特別な場合として堤頂まで貯水し、下流向きに  $k_1$  なる水平震度の地震力の作用する場合を考へるに、(17) 式で求めた  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を (23), (24), (25) の各式に代入して、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= r\{f_1(\theta) + f_2(\theta)\}, \quad \sigma_2 = r\{f_1(\theta) - f_2(\theta)\} \\ \text{茲に } f_1(\theta) &= 4b_1 \cos \theta + 4d_1 \sin \theta - w \cos \theta - k_1 w \sin \theta \\ f_2(\theta) &= 2\sqrt{(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + 3a_3 \cos 3\theta + 3c_3 \sin 3\theta)^2 + (b_1 \sin \theta - d_1 \cos \theta + 3a_3 \sin 3\theta - 3c_3 \cos 3\theta)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$$\tan 2t = -\frac{b_1 \sin \theta - d_1 \cos \theta + 3a_3 \sin 3\theta - 3c_3 \cos 3\theta}{b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + 3a_3 \cos 3\theta + 3c_3 \sin 3\theta} \dots\dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} \max \tau &= r f_2(\theta) \\ \text{茲に } f_2(\theta) &\text{ は (26) 式に於ける } f_2(\theta) \text{ と同一である} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

- 尙 (i) 鉛直震度  $k_v$  を考へる時は、 $k_1 w$  以外の  $w$  の代りに  $w(1 \pm k_v)$  とおく。
- (ii) 貯水池が空盪の時には (17') を用ひ、尙  $k_1$  の代りに  $-k_2$  を用ふ。

**第 7 節 計算例 其の 1**

(1) 堤頂迄貯水した場合

図-5 の如く堤頂迄貯水したものとし、地震は下流向きに水平震度  $k_1 = 0.15$  を以つて作用するものとする。然らば

堰堤の總高  $H = 120 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \alpha &= 38^\circ, & m &= \tan \alpha = 0.7813 \\ \beta &= -5^\circ, & n &= \tan \beta = -0.0875 \\ w &= 2.4 \text{ t/m}^3, & w_0 &= 1 \text{ t/m}^3 \\ A_1 &= w_0 \cos \beta = 0.9962 \text{ t/m}^3 \end{aligned}$$

であるから、(16) 式より  $b_1, d_1, a_3$  及び  $c_3$  を求めると次の様である。

$$\begin{aligned} b_1 &= +0.3810 & d_1 &= -0.1167 \\ a_3 &= -0.1493 & c_3 &= +0.0688 \end{aligned}$$

依つて求める応力は (17) 式より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r(-1.6380 \cos \theta - 0.5934 \sin \theta + 0.8988 \cos 3\theta - 0.4128 \sin 3\theta) \\ \sigma_\theta &= r(-0.1140 \cos \theta - 1.0602 \sin \theta - 0.8988 \cos 3\theta + 0.4128 \sin 3\theta) \\ \tau_{r\theta} &= r(0.7620 \sin \theta + 0.2334 \cos \theta - 0.8983 \sin 3\theta - 0.4128 \cos 3\theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

今図-6 に示す如く堤頂  $o$  より導線を引き、夫々の  $\theta$  の値に對して (29) 式より  $\sigma_r/r, \sigma_\theta/r, \tau_{r\theta}/r$  を求めると表-1 の様になる。これから  $r$ —一定 な断面に於ける  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の変化の模様を知ることが出来るのであつて、図-6 は其の有様を示したものである。

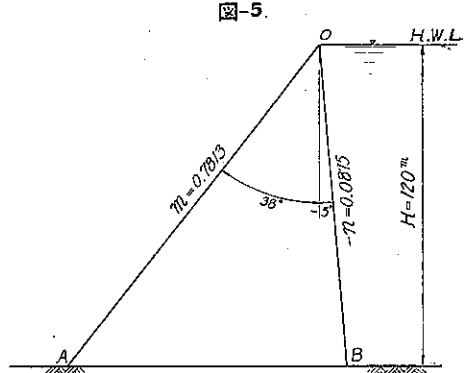
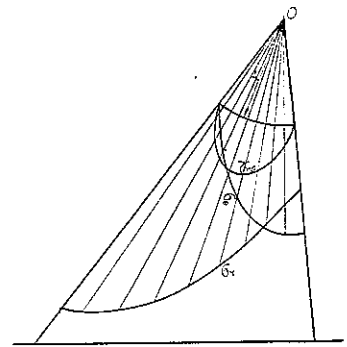


表-1.

$\theta^\circ$	$\sigma_r/r \text{ (t/m}^3\text{)}$	$\sigma_\theta/r \text{ (t/m}^3\text{)}$	$\tau_{r\theta}/r \text{ (t/m}^3\text{)}$
38	-2.3987	0	0
35	-2.3136	-0.0702	-0.1331
30	-2.1280	-0.2160	-0.3157
25	-1.9013	-0.3852	-0.4415
20	-1.6502	-0.5616	-0.5049
15	-1.3922	-0.7282	-0.5039
10	-1.1441	-0.8683	-0.4447
5	-0.9222	-0.9675	-0.3328
0	-0.7392	-1.0128	-0.1794
-5	-0.6050	-0.9962	0

図-6.



以上に求めた  $b_1, d_1, a_3, c_3$  を (26), (27), (28) 式に代入して、

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= -(0.8263 \sin \theta + 0.8760 \cos \theta) \\ f_2(\theta) &= 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2} \\ \text{茲に } S_1 &= -0.1167 \sin \theta + 0.3810 \cos \theta + 0.2064 \sin 3\theta - 0.4494 \cos 3\theta \\ S_2 &= 0.3810 \sin \theta + 0.1167 \cos \theta - 0.4494 \sin 3\theta - 0.2064 \cos 3\theta \\ \tan 2t &= -\frac{S_2}{S_1}, & \therefore t &= \frac{1}{2} \arctan \left( -\frac{S_2}{S_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

を得る。図-6 に示す各導線に對して (30) 式を用ひて計算した結果は表-2 の通りである。

表-2

$\theta^\circ$	$S_1$	$S_2$	$f_2(\theta) = \max \tau / r$ ( $t/m^3$ )	$f_1(\theta)$	$\sigma_1/r(t/m^3)$	$\sigma_2/r(t/m^3)$	$t$
38	0.5996	0	1.1992	-1.1994	0	-2.3983	0°
35	0.5609	-0.0666	1.1296	-1.1919	-0.0623	-2.3213	3° 23'
30	0.4779	-0.1578	1.0066	-1.1720	-0.1654	-2.1786	9° 8'
25	0.3791	-0.2207	0.8774	-1.1433	-0.2659	-2.0207	15° 6'
20	0.2721	-0.2524	0.7422	-1.1060	-0.3638	-1.8482	21° 26'
15	0.1659	-0.2524	0.6042	-1.0601	-0.4559	-1.6643	28° 21'
10	0.0689	-0.2224	0.4652	-1.0062	-0.5410	-1.4714	36° 24'
5	-1.0113	-0.1662	0.3332	-0.9448	-0.6116	-1.2780	46° 57'
0	-0.0684	-0.0897	0.2256	-0.8760	-0.6504	-1.1016	63° 40'
-5	-0.0977	0	0.1954	-0.8006	-0.6050	-0.9962	90°

表-2 よりわかる様に  $\sigma_1, \sigma_2$  は何れも圧縮応力にして、常に  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$  となつて居る。

次に等応力度線を求める爲  $\sigma_2$  及び  $\max \tau$  に對して、下記の値を與へ、

$$\sigma_2 = -20, -40, -60, \dots, -360 \text{ t/m}^2$$

$$\bullet \max \tau = 5, 10, 20, 30, \dots, 180 \text{ t/m}^2$$

此等の応力を生ずる點の極座標を (30) 式より求めた結果は表-3 の通りである。

表-3. (其の 1)

$\theta^\circ$	38	35	30	25	20	15	10	5	0	-5
$\sigma_2 = -20$	8.34	8.62	9.18	9.90	10.82	12.02	13.59	15.65	18.16	20.08
- 40	16.68	17.23	18.36	19.80	21.64	24.03	27.19	31.30	36.31	40.16
- 60	25.02	25.85	27.54	29.69	32.46	36.05	40.78	46.95	54.47	60.24
- 80	33.35	34.46	36.72	39.59	43.29	48.07	54.37	62.60	72.62	80.32
-100	41.69	43.03	45.90	49.49	54.11	60.09	67.96	78.25	90.78	100.40
-120	50.03	51.70	55.08	59.39	64.93	72.10	81.56	93.90	108.93	
-140	58.37	60.31	64.26	69.28	75.75	84.12	95.15	109.55		
-160	66.71	68.98	73.44	79.18	86.57	96.14	108.74			
-180	75.04	77.54	82.62	89.08	97.39	108.15				
-200	83.38	86.16	91.80	98.98	108.21	120.17				
-220	91.72	94.77	100.98	108.87	119.04					
-240	100.06	103.39	110.16	118.77						
-260	108.40	112.01	119.34	128.67						
-280	116.74	120.62	128.52							
-300	125.07	129.24	137.70							
-320	133.41	137.85								
-340	141.75	146.47								
-360	150.09									

表-3. (其の2)

$\theta^\circ$	38	35	30	25	20	15	10	5	0	-5
$t/m^2$	(an)									
$\max \tau = 5$	4.17	4.43	4.97	5.70	6.74	8.28	10.75	15.01	22.16	25.59
10	8.34	8.85	9.93	11.40	13.47	16.55	21.50	30.01	44.33	51.18
20	16.68	17.71	19.87	22.80	26.95	33.10	42.99	60.02	88.65	102.35
40	33.36	35.41	39.74	45.59	53.89	66.20	85.99	120.05		
60	50.03	53.12	59.61	68.38	80.84	99.31				
80	66.71	70.82	79.48	91.18	107.79					
100	83.39	88.53	99.34	113.97						
120	100.07	106.23	119.21							
140	116.74	123.94	139.08							
160	133.42	141.64								
180	150.10									

此の値を堰堤断面に取り、等応力度の点を滑かな曲線で結べば等応力度線を得るが、図-7 はその結果を示したものである。尚図-8 は表-2 で求めた  $t$  を用ひて  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  の方向線を描いた所方向線図である。

図-7.

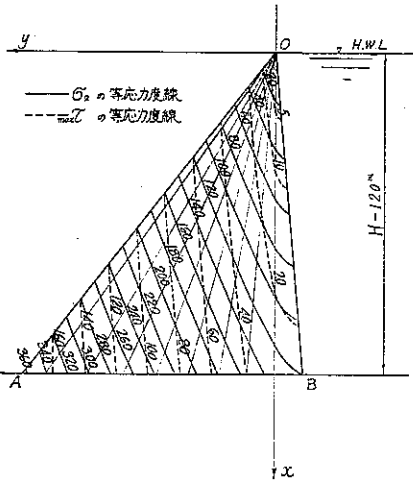
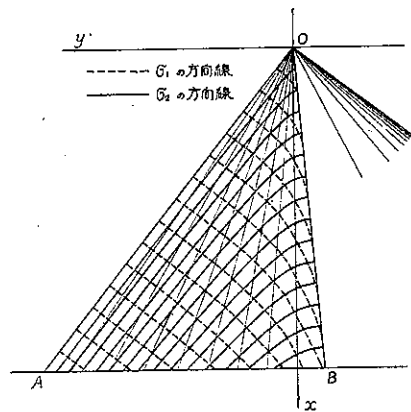


図-8.



次に (18) 式に依り直角座標系の応力に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -(0.7392x + 1.4730y) \\ \sigma_y &= -(1.0128x + 0.1806y) \\ \tau_{xy} &= -(0.1793x + 1.6608y) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

(31) 式は物部博士の方法で求めた結果と全く一致する。

(2) 堤頂上の餘裕水深  $h_0$  を考へた場合

前の計算例と同一の資料を用ひると、 $A_0 = w_0/h_0 = 1 h_0 t/m^2$ 、 $A_1 = w_0 \cos \beta = 0.9962 t/m^2$  であるから、(20) 式より諸係数を求めると次の様である。



$$\begin{aligned} b_0 &= +0.5410 h_0 & d_0 &= -2.7466 h_0 & a_2 &= -1.0227 h_0 & c_2 &= +1.5748 h_0 \\ b_1 &= +0.3810 & d_1 &= -0.1167 & a_3 &= -0.1498 & c_3 &= +0.0688 \end{aligned}$$

之等を用ひて (22) 式より  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , 及び  $\tau_{xy}$  を求めると,

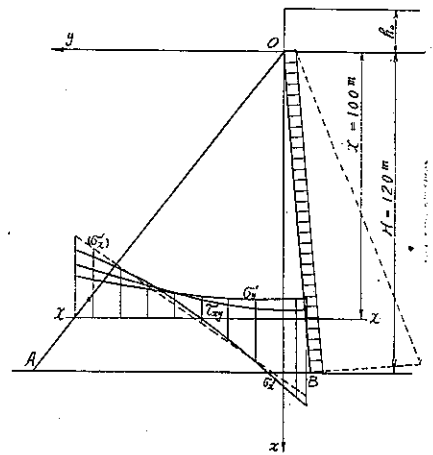
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left\{ 3.1274 h_0 - 5.4932 h_0 \left( \arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \right\} + \left\{ -0.7392 x - 1.4730 y \right\} = \sigma_x' + \sigma_x'' \\ \sigma_y &= \left\{ -0.9634 h_0 - 5.4392 h_0 \left( \arctan \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \right\} + \left\{ -1.0128 x - 0.1806 y \right\} = \sigma_y' + \sigma_y'' \\ \tau_{xy} &= \left\{ -3.1496 h_0 + 2.7466 h_0 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right\} + \left\{ -0.1793 x - 1.6608 y \right\} = \tau_{xy}' + \tau_{xy}'' \end{aligned} \right\} (32)$$

茲に  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\tau_{xy}'$  は (31) 式で與へられるものと全く同一であつて、堤頂まで貯水した場合の応力であるが、餘裕水深  $h_0$  を考へると更に  $\sigma_x''$ ,  $\sigma_y''$ ,  $\tau_{xy}''$  だけの応力が附加されるわけである。一例として  $x=100$  m なる水平断面に於ける  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\tau_{xy}'$  を求めると表-4 の通りであり、図-9 はその結果を图示したものである。

表-4.

$y$ (m)	$\sigma_x'/h_0$ (t/m <sup>2</sup> )	$\sigma_y'/h_0$ (t/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}'/h_0$ (t/m <sup>2</sup> )
78.13	-3.1810	-1.9412	-2.4852
70	-2.8091	-1.7385	-2.2094
60	-2.2653	-1.5089	-1.8571
50	-1.6171	-1.3133	-1.5016
40	-0.8568	-1.1595	-1.1608
30	+0.0144	-1.0529	-0.8565
20	+0.9862	-0.9920	-0.6142
10	+2.0354	-0.9678	-0.4574
0	+3.1274	-0.9634	-0.4030
-5	+3.6767	-0.9634	-0.4167
-8.75	+4.0832	-0.9612	-0.4448

図-9.



次に水平断面に於ける垂直応力  $\sigma_x$  を例にとつて、本文で誘導した算式から求めたものと、従來の梯形法則から求めたものとを比較しよう。今便宜上梯形法則から求めた応力に ( ) を附する事にし、 $x=100$  m の水平断面をとると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \sigma_x'' = \left\{ 3.1274 h_0 - 5.4932 h_0 \left( \arctan \frac{y}{100} + \frac{100y}{1000+y^2} \right) \right\} + \left\{ -73.92 - 1.4730 y \right\} \\ (\sigma_x) &= (\sigma_x') + (\sigma_x'') = \left\{ 2.8564 h_0 - 6.6601 \frac{y}{78.128} h_0 \right\} + \left\{ -73.92 - 1.4730 y \right\} \end{aligned} \right\} (33)$$

となる。即ち  $\sigma_x'' = (\sigma_x')$  であつて、餘裕水深を考へない時の応力は完全に梯形法則を充すが、餘裕水深  $h_0$  の影響を梯形法則で求める事は相當の誤差を伴ふものであり、 $h_0=10$  m とした場合の計算の結果は次の表-5 の通りである。

従つて堤体が梯形水圧を受けた場合に就いては、著者の弾性学的に導いた算式によれば、従來の梯形法則によるものに比して、応力の絶対値が上流側に於いて 23.8%，下流側に於いて 2.8% 小さく、又中央附近に於いて

表-5.

y (m)	著者の算式			梯形法則による算式			$\frac{\sigma_x - (\sigma_x)'}{\sigma_x} (\%)$
	$\sigma_x' (t/m^2)$	$\sigma_x'' (t/m^2)$	$\sigma_x (t/m^2)$	$(\sigma_x') (t/m^2)$	$(\sigma_x'') (t/m^2)$	$(\sigma_x) (t/m^2)$	
78.13	-31.8100	-189.0055	-220.8155	- 38.0370	-189.0055	-227.0425	+ 2.8
70	-28.0910	-177.0300	-205.1210	- 31.1082	-177.0300	-208.1382	+ 1.5
60	-22.6528	-162.3000	-184.9528	- 22.5836	-162.3000	-184.8836	0
50	-16.1708	-147.5700	-163.7408	- 14.0590	-147.5700	-161.6290	- 1.3
40	- 8.5682	-132.8400	-141.4082	- 5.5344	-132.8400	-138.3744	- 2.1
30	+ 0.1440	-118.1100	-117.9660	+ 2.9902	-118.1100	-115.1198	- 2.4
20	+ 9.8616	-103.3800	- 93.5184	+ 11.5148	-103.3800	- 91.8652	- 1.8
10	+20.3536	- 88.6500	- 68.2964	+ 20.0394	- 88.6500	- 68.6106	+ 0.5
0	+31.2740	- 73.9200	- 42.6460	+ 28.5640	- 73.9200	- 45.3560	+ 6.4
-5	+36.7672	- 66.5550	- 29.7878	+ 32.8263	- 66.5550	- 33.7287	+ 13.2
-8.75	+40.8322	- 61.0312	- 20.1990	+ 36.0230	- 61.0312	- 25.0082	+ 23.8

2.4% だけ大きく出てくるわけであり、梯形法則がこの場合には上流側に特に著しい誤差を示すことが認められる。

## 第 2 章 堤頂に集中荷重及び曲げモーメントを受けた堰堤の内部応力の算定

### 第 1 節 概 説

堤頂の修正によつて、堰堤断面は先にも用いた基本三角形断面とは異つた形状となるが、斯かる場合の応力は、附加断面に働く外力を、堤頂に作用する集中荷重と、曲げモーメントになほして近似的に求めることが出来る。又堤頂には結氷圧、貯水池内の波動等に起因する水平力が作用する。因つて斯様な場合の応力算定の一方法として第 2 節、第 3 節に於いて、夫々堤頂に作用する集中荷重、曲げモーメントのみによる応力算定法を示し、更に第 4 節に於いて、堤頂修正の堰堤応力に及ぼす影響に關する一考察方法を記述する事にする。

### 第 2 節 堤頂に作用する任意方向の集中荷重 P のみによる堰堤応力

#### (1) 集中荷重 P が鉛直に對し任意の角 $w$ をなす場合 (圖-10)

この場合応力函数として、<sup>(15)</sup>

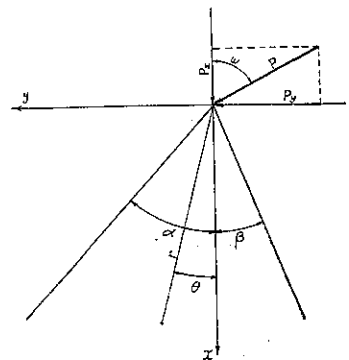
$$\phi(r, \theta) = \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta \dots\dots\dots (34)$$

を用ひ、(7) 式によつて  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{c_1}{r} \sin \theta \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

となる。而してこの (34) 式の  $\phi(r, \theta)$  は (9) 式で與へられる一般の応力函数の内 2 項のみをとつたものであるから、當然連続方程式 (8) を充し、且つ釣合方程式 (4) を充すものである。従つて茲では限界条件を充す様に

圖-10.



係数  $a_1, c_1$  を定めれば、所要の  $\sigma_r, \sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  が求められるわけである。

今堤頂  $O$  を中心として極微半径を以て堤体を切り取り、其の円端面に作用する応力  $\sigma_r$  と堤頂  $O$  に作用する外力  $P$  に就いて、水平及び鉛直方向の釣合を考えると夫々次の 2 式が得られる。

$$P \sin w = P_y = - \int_{\beta}^{\alpha} \sigma_r \sin \theta r d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta (a_1 \cos \theta + c_1 \sin \theta) d\theta$$

$$= a_1 \left( \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos 2\beta}{4} \right) + c_1 \left( \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin 2\beta}{4} + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (36)$$

$$P \cos w = P_x = - \int_{\beta}^{\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \cos \theta (a_1 \cos \theta + c_1 \sin \theta) d\theta$$

$$= a_1 \left( \frac{\sin 2\beta}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) + c_1 \left( \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos 2\beta}{4} \right) \dots \dots \dots (37)$$

(36) 及び (37) を  $a_1, c_1$  に關する聯立方程式として解けば  $a_1, c_1$  は次の如くなる。

$$a_1 = \frac{D_1}{D}, \quad c_1 = \frac{D_2}{D} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ c_1 \end{matrix}} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

茲に  $D = 1 - \cos 2(\alpha - \beta) - 2(\beta - \alpha)^2$

$D_1 = 2P \{ \sin(w - 2\alpha) - \sin(w - 2\beta) - 2(\beta - \alpha) \cos w \}$

$D_2 = 2P \{ \cos(w - 2\alpha) - \cos(w - 2\beta) - 2(\beta - \alpha) \sin w \}$

(38) 式によつて  $a_1, c_1$  を求め、これを (35) 式に代入すれば所要の応力が求められる。斯くして求めた応力を (11), (12), (13) の各式によつて直角座標系の応力に変換すれば次の (39) 式が得られる。

$$\sigma_x = \cos^2 \theta \cdot \sigma_r = \cos^2 \theta \left( \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{c_1}{r} \sin \theta \right) = \frac{a_1 x^2 + c_1 x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_y = \sin^2 \theta \cdot \sigma_r = \sin^2 \theta \left( \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{c_1}{r} \sin \theta \right) = \frac{a_1 x y^2 + c_1 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sigma_r = \sin \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{c_1}{r} \sin \theta \right) = \frac{a_1 x^2 y + c_1 x y^2}{(x^2 + y^2)^2} \left. \vphantom{\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix}} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

茲に  $a_1, c_1$  は (38) 式にて與へられる。

(39) 式からわかる如く此の場合には応力  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は  $x, y$  に關する一次式とならず、従つて水平又は鉛直断面に於いて  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は直線的变化をしない事になる。

(2) 集中荷重が水平に作用する場合

(38) 式に於いて  $w = \frac{\pi}{2}$  と置いて  $a_1, c_1$  を求め、之等を (35), (39) 式の係数として用ひればよから、其の結果は次の様である。

$$a_1 = \frac{D_1}{D}, \quad c_1 = \frac{D_2}{D} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ c_1 \end{matrix}} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

茲に  $D = 1 - \cos 2(\alpha - \beta) - 2(\beta - \alpha)^2$

$D_1 = 2P \{ \cos 2\alpha - \cos 2\beta \}$

$D_2 = 2P \{ \sin 2\alpha - \sin 2\beta - 2(\beta - \alpha) \}$

(3) 集中荷重が鉛直に作用する場合

(38) 式に於いて  $w = 0$  と置いて  $a_1, c_1$  を求め、之等を (35), (39) 式の係数として用ひればよい。

$$a_1 = \frac{D_1}{D}, \quad c_1 = \frac{D_2}{D}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{茲に } D &= 1 - \cos 2(\alpha - \beta) - 2(\beta - \alpha)^2 \\ D_1 &= 2P \{-\sin 2\alpha + \sin 2\beta - 2(\beta - \alpha)\} \\ D_2 &= 2P \{\cos 2\alpha - \cos 2\beta\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)'$$

**第 3 節 堤頂に作用する曲げモーメント  $M$  のみによる堰堤応力**

この場合応力函数として<sup>(15)</sup>

$$\phi(r, \theta) = a_0' + b_0'\theta + c_0'r \sin \theta + d_0'r \cos \theta + d_2' \sin 2\theta + b_2' \cos 2\theta \dots \dots \dots (40)$$

を用ひ、(7) 式によつて  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  及び  $\tau_{r\theta}$  を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4}{r^2} (d_2' \sin 2\theta + b_2' \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} (b_0' + 2d_2' \cos 2\theta - 2b_2' \sin 2\theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

となる。而して (40) 式の  $\phi(r, \theta)$  は (9) 式で與へられる一般の応力函数の内 6 項のみをとつたものであるから、當然連続方程式 (8) を充し、且つ釣合方程式 (4) を充すものである。従つて茲では限界條件を満す様に係數  $b_0$ ,  $b_2'$ ,  $d_2'$  を定めれば、所要の  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , 及び  $\tau_{r\theta}$  が求められるわけである。

今簡單の爲に圖-11 の様に上下流兩面の夾む角の二等分線  $Ox'$  を原線に取れば、

(i)  $\theta' = 0$  の時、即ち二等分断面  $Ox'$  に対しては  $\sigma_r = 0$  でなければなら

ないから、  $b_2' = 0 \quad \therefore \sigma_r = -\frac{4d_2' \sin 2\theta'}{r^2}$

(ii)  $\theta' = \pm \gamma$  の時、即ち上下流面に對しては  $\tau_{r\theta} = 0$  でなければなら

ないから、  $b_0' = -2d_2' \cos 2\gamma \quad \therefore \tau_{r\theta} = \frac{2d_2'}{r^2} (\cos 2\theta' - \cos 2\gamma)$

(iii) 堤頂  $O$  を中心とする半径  $r$  なる円壩面上の応力の  $O$  に對する曲げモーメントの總和は  $M$  と釣合を保たねばならないから、

$$\begin{aligned} M &= -2 \frac{2d_2'}{r^2} \int_0^\gamma (\cos 2\theta' - \cos 2\gamma) r^2 d\theta' \\ &= -4d_2' \left( \frac{1}{2} \sin 2\gamma - \gamma \cos 2\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\therefore d_2' = \frac{M}{2(2\gamma \cos 2\gamma - \sin 2\gamma)}$$

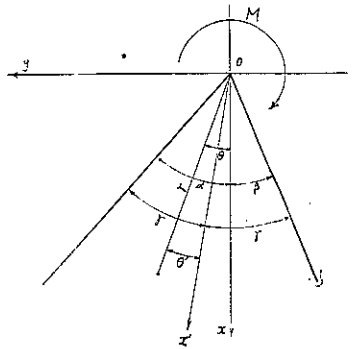
斯くして與へられた限界條件を満す様に定められた係數  $b_0'$ ,  $d_2'$  を用ひると、結局 (41) 式は次の如く表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2M \sin 2\theta'}{K_{(2\gamma)} r^2} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M}{K_{(2\gamma)} r^2} (\cos 2\theta' - \cos 2\gamma) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

茲に  $K_{(2\gamma)} = 2\gamma \cos 2\gamma - \sin 2\gamma$

次に (42) 式で求めた応力を  $Ox$  を原線とする座標系の応力に変換すれば、

圖-11.



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2M \sin(2\theta - \delta)}{K_{(2\gamma)} r^2} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M}{K_{(2\gamma)} r^2} \{ \cos(2\theta - \delta) - \cos 2\gamma \} \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

茲に  $2\delta = \alpha + \beta$

又此の時の応力を直角座標系による応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  で求める爲めに、(43) 式を (11), (12), (13) 式に代入して、次の結果が得られる。

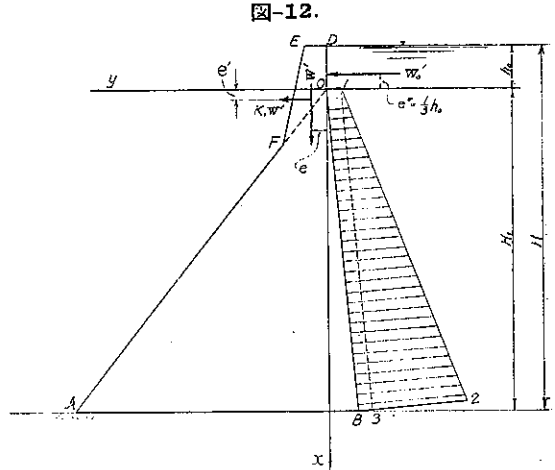
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{K_{(2\gamma)}(x^2 + y^2)^2} \{ 4S_2 x^4 - (6S_1 - 2S_3)x^2 y - 12S_2 x^2 y^2 + (2S_1 + 2S_3)xy^3 \} \\ \sigma_y &= \frac{M}{K_{(2\gamma)}(x^2 + y^2)^2} \{ (2S_1 - 2S_3)x^2 y + 12S_2 x^2 y^2 - (6S_1 + 2S_3)xy^3 - 4S_2 y^4 \} \\ \tau_{xy} &= \frac{M}{K_{(2\gamma)}(x^2 + y^2)^2} \{ (S_1 - S_3)x^4 + 8S_2 x^2 y - 6S_1 x^2 y^2 - 8S_2 xy^3 + (S_1 + S_3)y^4 \} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

茲に  $S_1 = \cos 2\delta = \cos(\alpha + \beta)$   
 $S_2 = \frac{1}{2} \sin 2\delta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$   
 $S_3 = \cos 2\gamma = \cos(\alpha - \beta)$

第 4 節 堤頂修正の堰堤応力に及ぼす影響

図-12 に示す如く堤頂に ODEF なる断面を附加した時の堰堤応力は基本三角形断面に就いて導いた諸式を用ひて、近似的に次の如くして求める事が出来る。

基本三角形 OAB と附加断面 ODEF とは明らかに面 OF に於いて連続してゐるのであるが、これを切断して ODEF に起因する諸力を断面 OAB に作用する外力と考へ、之等の外力を堤頂 O に作用する集中荷重 P と曲げモーメント M とで置き換へると、第 2 節及び第 3 節に求めた算式を用ひて P 及び M による堰堤応力が計算されるから、近似的ではあるが、堤頂修正が堰堤応力に如何なる影響を與へるかを知る事が出来ると思ふ。



今図-12 の様に ED 面迄貯水したものとすると、ODEF に起因する諸力は次の様である。

$$\left. \begin{aligned} \Pi'' &= \text{附加断面 ODEF の重量,} \\ k_1 \Pi'' &= \text{附加断面 ODEF の重心に作用する水平地震力} \\ \Pi_0' &= \frac{1}{2} w_0 h_0^2 = \text{OD 面に作用する水圧} \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

之等を堤頂 O に働く集中荷重 P と曲げモーメント M とで置きかへると、

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{\Pi''^2 + (k_1 \Pi'' + \Pi_0')^2}, \quad \tan w = \frac{k_1 \Pi'' + \Pi_0'}{\Pi''} \\ M &= -(\Pi'' e + k_1 \Pi'' e' + \Pi_0' e'') \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

茲に  $w$  は  $P$  が鉛直線となす角度を表す。

### 第5節 計算例 其の2

計算例其の1に用いたと同一の資料を有する基本三角形断面の堰堤に、図-13の如く附加断面 ODEF を加へた場合を考へ、DE=25m, OD=10m, OD, EF 両面は共に鉛直として、堤頂修正の影響を計算して見よう。

然らば (45), (46) 式より

$$\begin{aligned} W' &= 1559.940 \text{ t} & e &= 15.064 \text{ m} \\ k_1 W' &= 0.15 \times 1559.940 = 233.991 \text{ t}, & e' &= -4.640 \text{ m} \\ W'_0 &= 50.000 \text{ t} & e'' &= 3.333 \text{ m} \\ P &= \sqrt{(1559.940)^2 + (233.991 + 50.000)^2} \\ &= 1562.523 \text{ t} \\ M &= -(1559.940 \times 15.064 - 233.991 \times 4.640 \\ &\quad + 50.000 \times 3.333) = -22579.868 \text{ t} \cdot \text{m} \\ \tan w &= \frac{233.991 + 50.000}{1559.940} = 0.182053 \\ &\therefore \omega = 10^\circ 19' \end{aligned}$$

#### (1) $P$ による応力

(38) 式より

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{0.4361P}{-0.1960} = -3476.5260, \\ c_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{-0.0145P}{-0.1960} = +4101.3469 \end{aligned}$$

従つて (39) 式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-3476.5260x^3 + 4101.3469x^2y) \\ \sigma_y &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-3476.5260xy^2 + 4101.3469y^3) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-3476.5260x^2y + 4101.3469xy^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

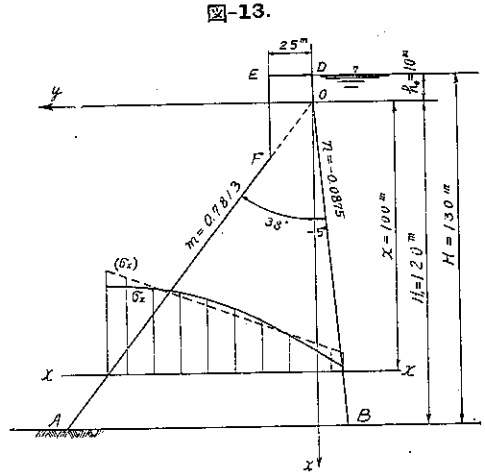
#### (2) $M$ による応力

(44) 式より  $\frac{M}{K(2y)} = \frac{-22579.868}{-0.1331906} = 169530.492$

$$S_1 = 0.8387, \quad S_2 = 0.2723, \quad S_3 = 0.7314$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \sigma_x &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (184652.6097x^4 - 605112.1310x^3y - 553957.8291x^2y^2 + 532359.6447xy^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (36381.2432x^3y + 553957.8291x^2y^2 - 1101100.5326xy^3 - 184652.6097y^4) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (18190.6216x^4 + 369305.2194x^3y - 853111.3318x^2y^2 \\ &\quad - 369305.2194xy^3 + 266179.8223y^4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

次に水平断面に於ける垂直応力  $\sigma_x$  を例にとつて、本文で誘導した算式から求めたものと、従来の梯形法則から求めたものとを比較しよう。今便宜上  $P$  によるものを  $\sigma_x'$ ,  $M$  によるものを  $\sigma_x''$  とし、 $\sigma_x' + \sigma_x'' = \sigma_x$  とし、



且つ梯形法則から求めた応力に ( ) を附する事にすれば,  $x=100$  m なる水平断面に對し次の 表-6 の様な結果が得られる。

従つて附加断面の影響のみに就いては著者の弾性学的に導いた算式によれば, 従來の梯形法則によるものに比して応力の絶対値が上流側にて 37.0%, 下流側にて 55.2% だけ小さく, 又中央附近にて 15.2% だけ大きく出てくるわけであり, 梯形法則がこの場合に於いて如何に不合理であるかを充分に認め得ると思ふ。

表-6.

y(m)	著者の算式			梯形法則による算式			$\frac{\sigma_x - (\sigma_x)}{\sigma_x} (\%)$
	$\sigma_x'(t/m^2)$	$\sigma_x''(t/m^2)$	$\sigma_x(t/m^2)$	$(\sigma_x')(t/m^2)$	$(\sigma_x'')(t/m^2)$	$(\sigma_x)(t/m^2)$	
78.13	-1.0493	-8.9145	-9.9638	+2.4864	-17.9495	-15.4631	+55.2
70	-2.7277	-9.9086	-12.6363	-1.3411	-14.5902	-15.9313	+26.1
90	-5.4916	-10.4496	-15.9412	-6.0466	-10.4581	-16.5047	+3.5
50	-9.1255	-9.7205	-18.8460	-10.7522	-6.3261	-17.0783	-9.4
40	-13.6444	-7.1727	-20.8171	-15.4578	-2.1941	-17.6519	-15.2
30	-18.9052	-2.4993	-21.4045	-20.1633	+1.9379	-18.2254	-14.9
20	-24.5586	+4.0653	-20.4933	-24.8689	+6.0699	-18.7990	-8.3
10	-30.0597	+11.6786	-18.3811	-29.5745	+10.2020	-19.3725	+5.4
0	-34.7653	+18.4653	-16.3000	-34.2800	+14.3340	-19.9460	+22.4
-5	-36.6325	+21.1996	-15.4329	-36.6328	+16.4060	-20.2328	+31.1
-8.75	-37.7733	+22.8429	-14.9304	-38.3974	+17.9495	-20.4479	+37.0

図-13 に於いて水圧, 重力, 地震力及び附加断面の影響を總べて考へた場合の応力は表-5 及び表-6 の和として與へられ, その結果は表-7 の通りであり, 之を图示すれば図-13 に示す様である。

之より  $x=100$  m なる水平断面の  $\sigma_x$  に於いて, 著者の弾性学的に導いた算式によれば, 従來の梯形法則によるものに比して応力の絶対値が上流側にて 29.4%, 下流側にて 5.1% だけ小さく, 又中央附近にて 4.3% だけ大きく出る事がわかる。従つて高堰堤の設計に際しては梯形法則の適用に就いて充分の注意が必要であると思ふ。

## 結 言

著者は基本三角形断面を有する堰堤の応力を純弾性学的に算定する公式を誘導したが, その結果次の事が結論される。

### (1) 極座標系を用いた場合

- 1) 堰頂迄貯水した時, 水圧, 重力及び地震力による堰堤応力  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  及び之等から導かれる主応力  $\sigma_1,$

表-7.

y(m)	$\sigma_x(t/m^2)$	$(\sigma_x)(t/m^2)$	$\frac{\sigma_x - (\sigma_x)}{\sigma_x} (\%)$
78.13	-230.7793	-242.5056	+5.1
70	-217.7573	-224.0695	+2.9
60	-200.8940	-201.3883	+0.2
50	-182.5868	-178.7073	-2.1
40	-162.2253	-156.0263	-3.8
30	-139.3705	-133.3452	-4.3
20	-114.0117	-110.6642	-2.9
10	-86.6775	-87.9831	+1.5
0	-58.9460	-65.3020	+10.8
-5	-45.2207	-53.9615	+27.8
8.75	-35.1294	-45.4561	+29.4

$\sigma_z$  最大剪断応力  $\max \tau$  は何れも  $r \cdot \varphi(\theta)$  なる形で表される、((17), (26), (28) 式参照)。従つて一定の偏角  $\theta$  を有する断面上の各點に於いては之等は何れも  $r$  に比例し、この断面上の各點に於ける応力変化の模様は堤頂  $O$  より發する直線にて表される。尙この時主応力及び最大剪断応力の方向は (27) 式から求められ、 $\theta$  が一定な断面上の各點に於いては常に一定である。

以上の關係は重力及び地震力のみを考へた時、又は重力のみを考へた時も全く同様である ((17')(17'') 式参照)。

ii) 堤頂上餘裕水深を考へた時及び堤頂に集中荷重又は曲げモーメントが働いた時には i) の様な關係が成立しない ((21), (35), (41) 式参照)。

## (2) 直角座標系を用いた場合

i) 堤頂迄貯水した時、水圧、重力及び地震力による堰堤応力  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は (18) 式に示す如く、 $x$  及び  $y$  に關する一次同次式で表されるから、 $x$  が一定な水平断面及  $y$  が一定な鉛直断面上の各點に於いては、之等の応力は何れも直線的に変化する。従つて實用的解法として水平断面に於ける  $\sigma_x$  を梯形法則から求めたやり方はこの際は純彈性學的に正しい事が證明せられるわけである。

以上の關係は重力及び地震力のみを考へた時、又は重力のみを考へた時も全く同様である ((18'), (18'') 式参照)。

ii) 堤頂上餘裕水深を考へた時及び堤頂に集中荷重又は曲げモーメントが働いた時には、 $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}$  は共に  $x$  及び  $y$  の一次同次式で表されない、((22), (39), (44) 式参照)。従つて水平断面に於ける  $\sigma_x$  を梯形法則から求める事は誤であり、その誤差は相當著しい事を注意しなければならない (計算例参照)。

## 附 言

本文に於いて取扱つた外力の外に、堰堤応力に重大な影響を及ぼすものとして、動水圧、堆砂圧、揚圧力及び基礎岩盤の変形がある。又静水圧に就いても堤頂以下に於いて水面を有する場合は本文に於いて取扱つてゐない。之等に就いての解法は後日の研究に俟つ事にする。

尙本文に於いては Lévy<sup>(5)</sup>, Fillunger<sup>(11)</sup> 等の理論に於けると同様に、其の限界條件乃至外力の作用状態からわかる様に、堤底の変形を考慮の外においてゐる。即ち三角形断面の堰堤はその上下流面が一定の傾斜を以つて無限に下方に續いてゐるものと仮定し、応力の算定に際して何等堤底の條件が入つてゐない。換言すれば堤底に於いてもそれより上位の水平断面と相似的な応力が起つてゐるものと仮定してゐる。然るに堰堤の如く高さの底幅に對する比が比較的小さいものに於いては、固定端の応力即ち堤底の応力が變つてくると、その影響が堤底以上の断面に有力に働き、Saint-Venant の理論はあてはまらない事になる。實際には堰堤応力は堤底近くで大となり堰堤の生命を支配するものであるから、之が底面の変形によつて變化すれば、折角求めた応力は堰堤の安全度を檢する上に於いて充分の信頼を置き難くなる。この意味に於いて Wolf<sup>(12)</sup> の研究は注目に價するものであり、又 Vogt<sup>(16)</sup> は Lévy の研究の結果より堤底の変形を計算し、堤底に於いて岩盤と堤体との連続性を満足するには附加応力を加へなければならぬ事を證明した。斯様な意味で堤底の変形が応力に及ぼす影響は極めて大切な事であり、著者は目下この方面の研究に没頭してゐる次第である。