論　說　報　告

測量

第21卷第11號　昭和10年11月

三角測量に於ける對數計算に就て

會員 工學士　江　藤　　禮*

On the Logarithmic Calculations in Triangulation

By Rei Etô, C. E., Member.

要　旨

三角測量に於ける 邊方程式の計算，或は邊長の算出等には 對數が利用されてゐる。この場合に，測定値と對數との間に存する誤差の關係を吟味し，對數計算に於ける規準を示したものである。

1. 測定値と誤差

與へられた量を測定する場合，之を表はす數値を 測定値と呼ぶ。以下に於ては廣義に解して，單觀測のみに限らず，算術平均等の最確値をも含ませる。一般に測定値は與へられた量の眞の値を示さず，その近似値を示す。何となれば 測定値に於ける 最終桁の 位置には 限度があり，夫は測定に用ひた 器具や方法によつて 定まるからである。もしも最確値を測定値とするならば，特に最終桁の位置に 注意を要す。而して近似値と眞の値との差を近似値の誤差といひ，誤差のとりうる最大量を限界誤差といふ。計算に當り常にこれだけの 誤差があるものと覺悟してをれば安全である。最終桁未滿を四捨五入して得た近似値の限界誤差は，最終桁について ± 0.5 である。なほ最確値に對する推差等は，精密度を表示する 場合に役立つもので，近似値には 直接の關係をもたない。一般に誤差は近似値に比して微小であるから，數個の近似値 $x, y, \ldots$ (夫らの誤差を $\Delta x, \Delta y, \ldots$ とする) を含む一つの函數 F に生ずる誤差 ΔF を求めるには

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta y + \ldots\ldots$$

なる公式を用ひて差支へない。二三の例を示せば

$$F = x \pm y \quad \text{の時は} \quad \Delta F = \Delta x + \Delta y$$
$$F = x \cdot y \quad 〃 \quad \Delta F = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x$$
$$F = x/y \quad 〃 \quad \Delta F = (x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x)/y^2$$

但し誤差が正負の符號をとりうる場合を考へ，上式に於て Δx, etc. は絶對値を表はすものとす。

さて對數表に記載されてゐる 數値或は角度は眞の値 (四捨五入なし) であるから，夫らの對數は 最終桁まで信用出來るが，測定値の對數に於てはさうでなく，小數點以下幾桁まで 信用出來るかは，測定値の桁數から 定まるのである。三角測量に於て基線長と角度との測定値を得た場合，前者に對しては之を表はす數値の log が必要で後者に對しては之の Log sin が必要となる。

2. 數値の對數

測定値を l, 四捨五入の量を v, v の $\log l$ に及ぼす誤差を Δ で表はす。便宜上この Δ を對數誤差と呼ぶこと

* 神戸高等工業學校勤務

にする。Taylor の展開式により

$$\log(l+v)=\log l+\Delta$$

$$\Delta=0.4343v/l$$

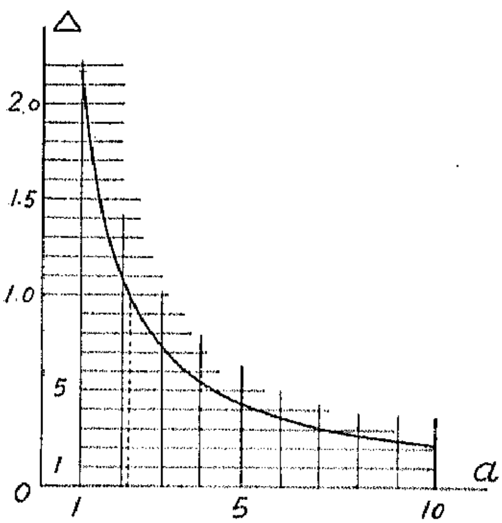
但し v^2 及び高次の項を無視するも差支へない。

今 l の最終桁を整數第1位にとれば，限界誤差は $v=0.5$ となる（正負の符號あるも絶對値を考へればよい)。従つて $\Delta=0.2171/l$ となる。l が n 桁の數で

$$l\equiv a\cdot10^{n-1},\quad 1\leq a<10$$

と置くならば $\Delta=2.171\cdot10^{-n}/a$ となる。上式から a と Δ の關係は双曲線で表はされることが分る。もしも $a=2.17\cdots$ なら $\Delta=10^{-n}$ であるから，この場合は小數第 n 位に 1 なる對數誤差を生ず。同様にして $a<2.17\cdots$ なら小數第 n 位に，$a>2.17\cdots$ なら小數第 $n+1$ 位に對數誤差の生ずるを知る。而して Δ の大きさは第1圖に示され，種々の l に對し Δ の起りうる最初の桁（對數第幾位）を求むれば第1表の如くなる。

第1圖　數値と對數誤差の關係



第1表

l の桁數	$a<2.17\cdots$	$a>2.17\cdots$
4	第4位	第5位
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10

$\log l$ の値としては $a<2.17\cdots$ なら第 n 位まで求め（出来れば第 $n+1$ 位を四捨五入する），$a>2.17\cdots$ なら第 $n+1$ 位まで正しく（茲に正しくと云ふのは第 $n+1$ 位未滿を切り捨てる意である）求めれば充分であらう。何れにしても最終桁の信用限度は對數誤差の大きさで判斷せねばならない。たとへば log 18 を對數表から引くと 1.2552 725$\cdots$ と記載されてゐる。之は 18 を眞の値とした場合であるが，もしも之が測定値の場合であれば桁數に限りがある。

log 1 800 に對しては近似値として 3.2553 を採用す

log 18 000　〃　4.2552 7　〃

この場合最終桁に，約 2 なる誤差があることを覺悟せねばならない。

3. 角度の對數

角度に對してはその Log sin が必要となる。測定値を l，四捨五入の量を v とすれば

$$\mathrm{Log}\sin(l+v)=\mathrm{Log}\sin l+\Delta$$

$$\Delta=2.106\cdot10^{-6}\cdot v\cdot\cot l$$

但し v^2 及び高次の項を無視するも差し支へない。

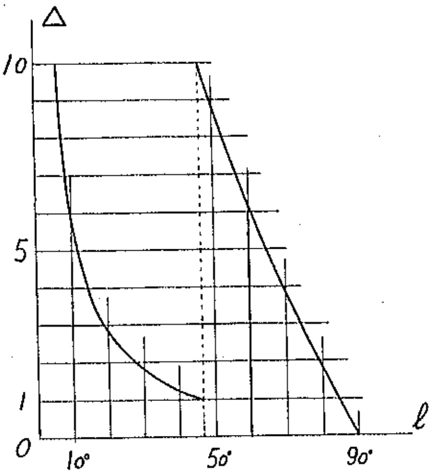
l の最終有效數字が秒位の場合には，限界誤差は $v=0.5''$ となるから $\Delta=1.053\cdot10^{-6}\cot l$ となる。即ち Δ は

cot l に比例するから，Δ は 0 から ∞ までのすべての値をとることが出來る。その内で Δ をして 1×10^{-n} ならしめる角の大さを示すと第 2 表の如し。

第 2 表

角 度	小數位
0° 36′ 12″	第 4 位
6 00 35	5
46 28 20	6
84 34 25	7
89 27 20	8

第 2 圖 角度と對數誤差の關係



又 6°‥‥ と 90° との間にある角に對する Δ の大さは第 2 圖に示され，第 3 表には角度の最終有效數字の位置を與へたとき，Δ の起りうる最初の桁を示す。

$\log l$ の値としては $6°\cdots\cdots<l<46°\cdots\cdots$ に對しては第 3 表に示す桁まで求め，$46°\cdots\cdots<l<84°\cdots\cdots$ に對しては同表に示す桁まで正しく求めることにする。たとへば $l_1=24°57'35.2''$ の對數誤差は第 7 位に約 2 だけ生じてゐる。今この角を眞の値と考へ，Vega の對數表[1] を用ふれば 9.6252 9384 41 の如く 10 桁まで求まる。但しこの値の算出に當つては，單なる比例挿入でなく Newton の補間公式によらねばならない。何となればこの場合第 2 階差を無視する譯にゆかないからである。さて l_1 は近似値であるから $\log l_1$ は 7 桁まで求めれば充分である。即ち 9.6252 938 となる。この場合 7 桁の對數表を用ふれば，最終桁の數字が 1 だけ狂ふこともあるが，何ら差支へない。たとへば

第 3 表

最終有效數字	$6°\cdot\cdot<l<46°\cdot\cdot$	$46°\cdot\cdot<l<84°\cdot\cdot$
10 秒位	第 5 位	第 6 位
秒 位	6	7
秒の小數 1 位	7	8
〃 2	8	9
〃 3	9	10

Chambers の對數表[2]によれば 9.6252 938
Bruhns の對數表[3] 〃 9.6252 939
Peters の對數表[4] 〃 9.6252 938

次に $l_2=24°57'35.2000''$ の對數誤差は第 10 位に生じる。故にもしも l_2 に對して，7 桁の對數表を用ひたとすれば，之は測定値に於て秒の小數 2 位以下を無視したことになる。又 l_1 に對して，その對數を第 10 位まで採用したとすれば，第 8 位以下の數字は無意味である。

1) Thesaurus Logarithmorum Completus.
2) Seven Figure Mathematical Tables.
3) A New Manual of Logarithms.
4) Siebenstellige Logarithmentafeln.

4. 眞數を求める場合

對數の四捨五入が眞數に如何なる誤差を及ぼすかを調べる。今，指數を c, 假數を l, その四捨五入の量を v, 之が眞數に及ぼす誤差を Δ とすれば

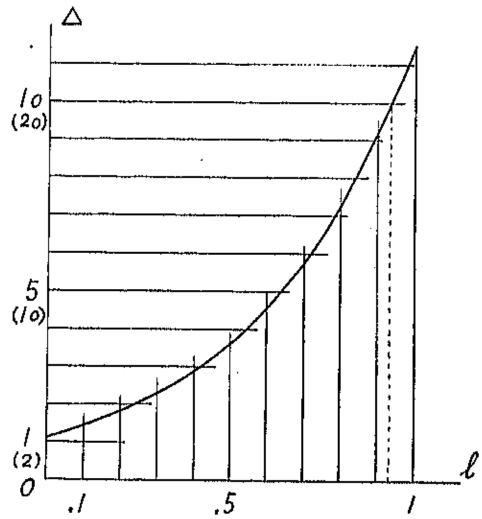
$$10^{c+l+v}=10^{c+l}+\Delta, \qquad \Delta=v\cdot 10^{c+l}/0.4343$$

但し v^2 及び高次の項を無視するも差支へない。

對數が第 n 位まで與へられた時は，限界誤差は $v=0.5\cdot 10^{-n}$ であるから $\Delta=1.15\cdot 10^{l}\cdot 10^{c-n}$, $1\leqq 10^{l}<10$.

上式から l と Δ の關係は指數曲線となることが分る。$l=0.9387\cdots\cdots$ の時 $\Delta=10^{c-n+1}$ であるから，眞數には有效數字の左から第 n 桁に誤差 1 を生ず。同樣にして，$l<0.93\cdots\cdots$ ならば第 $n+1$ 桁に，$l>0.93\cdots\cdots$ ならば第 n 桁に誤差の生ずるを知る。而して Δ の大さは第 3 圖に示され，第 4 表には Δ の起りうる最初の桁を示す。

第 3 圖　眞數に生ずる誤差



第　4　表

l の桁數	$l<0.93\cdots\cdots$	$l>0.93\cdots\cdots$
5	第 6 桁	第 5 桁
6	7	6
7	8	7
8	9	8
9	10	9
10	11	10

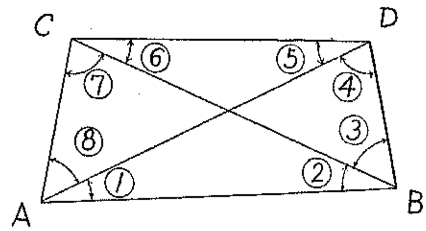
場合によつては，與へられた對數に，四捨五入以外の誤差が含まれることがある。もしも對數第 n 位に 1 なる誤差があれば，之が眞數に及ぼす影響は，上に求めた Δ の 2 倍となる。第 3 圖の縱軸上（ ）内にこの値を示す。$l=0.6377\cdots\cdots$ の時，眞數の第 n 桁に 1 なる誤差を生じるから，第 4 表に於て $0.93\cdots\cdots$ の代りに $0.63\cdots\cdots$ と置くなら，この表がそのまゝ利用される。

5. 三角測量に於ける注意

三角測量の計算は主として，對數の利用によつてなされるが，その實例を見るに往々にして桁數に就て無關心なため，計算に誤差を伴ひ，特に最小二乘法を用ひて更正量を求める場合に，その嚴密さを失ふことがある，基線と角度とを測定せる場合は，兩者の最終桁は無關係にとらず，精密度をして釣合ひを保つ樣にせねばならない。夫れには第 1 表及び第 4 表を參照すれば便利である。なほ測定値の對數をとる時に，その桁數が不足してゐるなら，測定の精密度を充分に發揮せぬことになり，野外に於ける緻密なる仕事をして徒勞に終らせる結果となる。又桁數を過剩にとることは，計算の手數を煩雜ならしめ一般に無意味である。對數から眞數を求める場合には，先づその對數に含まれる誤差を調べ，眞數の必要桁數を決定せねばならぬ。無暗に多くの桁まで信用の出來ない數字を書き列ねるのは忌むべきである。

6. 例題とその吟味

第 4 圖



第 4 圖に示す様な測量に就て，その計算過程を吟味して見よう。邊 $\overline{AB}$ の長さを求めるために，基線 $\overline{BD}$ の長さと，8 個の角 ①,②,....⑧ とを測り次の結果を得た。但し角に對する値は，各測點に於て局所條件を滿足する様に，調整したものを採用した（かりに秒の小數 3 位まで信頼出來るとする）。

$\overline{BD}=648.8084\,4$ m

①＝23° 31′ 1.″216	⑤＝24° 30′ 48.″900
②＝24° 31′ 47.″454	⑥＝23° 31′ 59.″858
③＝55° 11′ 40.″592	⑦＝76° 50′ 11.″959
④＝76° 45′ 30.″088	⑧＝55° 6′ 59.″313

この場合，角に對する更正量を求めるには，條件式として角方程式 3 個，邊方程式 1 個，都合 4 個を必要とする。而して見掛けの上では，角方程式も邊方程式も，夫々上記の數より多く存在するかの様に思はれるが，夫らの内から任意に上記 4 式を採べばよいのである。次に選擇の例を示せば第 5 表の如くである。

この内の何れの組を採用しても，その結果は同一でなければならない。但し小數點以下どこ迄も一致すると云ふ譯にはゆかないが，測定値が秒の小數第 3 位まで與へてある以上，更正量に於ては，第 3 位まで正確に一致し，第 4 位も大體一致せねばならぬ。

第 5 表

	角方程式を與へる	邊方程式の極
第 1 組	ΔABD, ΔACD, ΔABC	A
第 2 組	ΔABD, ΔABC, ΔBCD	B
第 3 組	ΔABC, ΔACD, ΔBDC	C
第 4 組	ΔABD, ΔACD, ΔBDC	D
etc.		

さて，l を測定値とし，δ を更正量（秒單位とす）とすれば，第 1 組を採用した場合の條件式は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+w_1=0\\&\delta_5+\delta_6+\delta_7+\delta_8+w_2=0\\&\delta_1+\delta_2+\delta_7+\delta_8+w_3=0\\&a_2\delta_2+a_3\delta_3+a_4\delta_4+a_5\delta_5+a_6\delta_6+a_7\delta_7+w_4=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\left.\begin{aligned}&w_1=l_1+l_2+l_3+l_4-180^\circ\\&w_2=l_5+l_6+l_7+l_8-180^\circ\\&w_3=l_1+l_2+l_7+l_8-180^\circ\\&w_4=\mathrm{Log}\sin l_4+\mathrm{Log}\sin(l_6+l_7)+\mathrm{Log}\sin l_2\\&\quad-\mathrm{Log}\sin(l_2+l_3)-\mathrm{Log}\sin l_5-\mathrm{Log}\sin l_7\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$a_2=42.321,\quad a_3=-3.817,\quad a_4=4.955$

$a_5=-46.172,\quad a_6=-3.853,\quad a_7=-8.777$

但し a's には 10^{-7} を乘ず

先づ，誤れる計算例ではあるが，7 桁の對數表を用ひ，更正量を秒の小數 5 位まで求めて見よう。(b) 式の値を計算すれば

$w_1 = -0.050,\quad w_2 = +0.030,\quad w_3 = -0.058,\quad w_4 = +10\cdot10^{-7}$

4 個の相關係數 $k's$ を次式から求める

$$\left.\begin{aligned}
&4k_1+2k_3+43.459\cdot10^{-7}\cdot k_4-0.050=0\\
&4k_2+2k_3-58.802\cdot10^{-7}\cdot k_4+0.030=0\\
&2k_1+2k_2+4k_3+33.544\cdot10^{-7}k_4-0.058=0\\
&43.459\,k_1-58.802\,k_2+33.544\,k_3+4\,053.023\cdot10^{-7}\cdot k_4+10=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

之を解けば（多くの桁まで求めて見るが實は無駄である）

$k_1=+0.0040\,952,\quad k_2=-0.1707\,755,\quad k_3=+0.1560\,030,\quad k_4=-0.0004\,099\cdot10^7$

$k's$ が分つたから，更正數を公式から求める。その結果

$$\left.\begin{array}{ll|l}
\delta_1=+0.1601\,9 & & \delta_5=+0.1161\,8\\
\delta_2=-0.1110\,8 & & \delta_6=-0.1550\,8\\
\delta_3=+0.0285\,6 & & \delta_7=+0.0325\,8\\
\delta_4=-0.0276\,7 & & \delta_8=-0.0236\,8
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

(d) の値を條件式 (a) に入れて檢するに之を滿足する。全く同樣の手續きを其他の組に就て行ひたる結果は第 6 表 となる。

第 6 表

	δ_1	δ_2	以下省略
第 1 組	+0.1601 9	−0.1110 8	
第 2 組	+0.1528 3	−0.1037 3	
第 3 組	+0.1537 1	−0.1046 1	
第 4 組	+0.1582 4	−0.1001 3	

δ_1, δ_2 等を見るに，秒の小數 2 位の數字が大體一致してゐるのである。

次に基線 BD から邊長 AB を算出する。

$AB = BD\cdot\sin④/\sin①$

又は $\log AB = \log BD + \mathrm{Log}\sin④ - \mathrm{Log}\sin①$

かりに $\delta's$ の値には上記 4 組の平均をとることにすれば $\delta_1 = +0.156$ 及び $\delta_4 = -0.027$ となり，調整後の角は夫々 ①＝23°31′ 1.″379 及び ④＝76°45′ 30.″601 となる。

$\log BD\quad = 2.8121\,105\cdots$ 誤差は 7 位に 0.5

$\mathrm{Log}\sin④ = 0.9882\,073\cdots$　　同上

$\mathrm{Log}\sin① = 0.6009\,007$　　同上

$\log AB\quad = 3.1994\,171\cdots$ 誤差は 7 位に 1.5

故に $\overline{AB} = 1\,582.7675$ m を得。之に於ける誤差として約 0.0005 m を覺悟せねばならない。

扨て $\mathrm{Log}\sin l$ に對し上の如く 7 桁の對數表を用ひた時に，その最終桁の限界誤差が，角度に及ぼす影響を調べて見ると，第 7 表の如くなる。

第 7 表

角度	誤差	角度	誤差
°	″	°	″
10	0.005	50	0.028
20	0.009	60	0.042
30	0.014	70	0.065
40	0.020	80	0.135

たとへば 60° 附近の時は 0.″04 ‥なる誤差を考へるから，測定値に於て秒の小數 2 位が信用出來ない。今，w_4 を形成せる 6 個の $\mathrm{Log}\sin l$ に於て，l は秒の小數 3 位まで與へられ，最小 24°‥‥で，最大 76°‥‥であるから，夫らの對數誤數は第 9 位又は第 10 位に生ず。もしも $\Sigma\mathrm{Log}\sin l$ の値を第 10 位まで算出する時は $+0.875\times10^{-10}$ となる。之に於ける限界誤差は $54\cdot10^{-10}$ であるから，相關係數

を與へる式 (c) に於て，w_i の値には 0.821～9.929 の近似値として 0.88 を採用する。更正量 δ's を計算する場合，限界誤差に對する吟味を行ひたるに，δ's の値は小數第 3 位まで求めて（第 4 位を四捨五入す）差支へないことを知つた。卽ち

$$\left.\begin{array}{ll|ll} \delta_1=+0.159 & & \delta_5=+0.115 \\ \delta_2=-0.110 & & \delta_6=-0.154 \\ \delta_3=+0.028 & & \delta_7=+0.032 \\ \delta_4=-0.027 & & \delta_8=-0.023 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

之は第 1 組から求めた値であるが，他の組に就ても同一の結果を得る。

最後に $\overline{AB}$ の長さを求めるのであるが，この場合も對數 9 位まで算出すればよい。かりに，基線長はそのままで角度の測定値が秒の小數 1 位しか與へてなかつたとすれば，基線の測定は角度の夫れに比して丁寧すぎたことになる。この例題では兩方が丁度釣合つてゐる。さて調整後の角は ①=23° 31′ 1.″375 及び ④70° 45′ 30.″661 となる。

$\log\overline{BD}$	$=2.8121\,1640\,1\cdots$	誤差は 9 位に	3.2
Log sin ④	$=9.9882\,9728\,4\cdots$	〃	0.2
Log sin ①	$=9.6009\,9676\,1\cdots$	〃	2.4
$\log\overline{AB}$	$=3.1994\,1701\,4\cdots$	〃	5.8

故に $\overline{AB}=1\,582.7671\,0$ m を得，之に於ける誤差は約 0.0000 2 m である。之を前に 7 桁の對數表を用ひて得た値と比較するに，その誤差は約 0.0002/0.0005＝1/25 の程度に減少してゐる。