論 說 報 告

第21巻第7號 昭和10年7月

地下水流の理論に關する新方法

准員 工學士 本 間 仁*

New Methods for the Theory of Groundwaterflow

By Masashi Homma, C.E., Assoc. Member.

內 容 梗 槪

地下水流の理論に關しては流速の極めて小さい場合以外は屢々矛盾又は不正確が指摘され，之に對して個々の問題に關しては特殊の解法も散見するが，著者は此處にて特に重要と思はれる諸問題を擇び之等に對して新しき方法によつて綜合的な且つ相當實用的と思はれる理論を導かんと試みたのである。

目 次

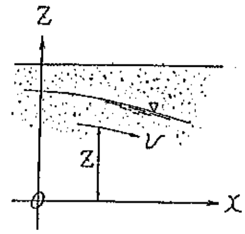
第1章 基本法則及び基本方程式

地下水の運動に關しては Darcy の法則が成立する事が一般に認められてゐるが，土砂の間隙を流れる水分子の實際の速度は一般に限界速度以下であつて流れは整流 (laminar flow) の狀態にあるものと考へられるから，此處にも Darcy の法則が常に成立するものと考へても充分一般的な理論が得られると思ふ。先づ以下に用ふる記號の主なるものを擧げれば

v: 地下水の流速，k: 滲透係數，Q: ある斷面を通る流量，z: 任意の點の基準面よりの高さ，p: この點に於ける水壓，w_0: 水の單位體積の重さ，ρ: 水の比重，μ: 水の粘性係數

v は水分子の實際の速度ではなく流れの平均方向に垂直に小面積 ΔA を取り之を通る流量を ΔQ とする時に

第 1 圖



$$v=\Delta Q/\Delta A$$

にて表はしたものであつて，之に關する Darcy の法則は

$$v=-k\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{w_0}\right) \quad\cdots\cdots(1)$$

但し s は流れの方向に測る長さである。土砂粒の大さ及びその配合狀態と k の値に關しては種々の硏究があるが，此處にはこの問題に觸れず k は常に既知の常數で

* 內務省土木試驗所勤務

あると考へる。

地下水の運動方程式に關しては流速が小さいのであるから慣性項は總て無視される。即ち一般的な直角座標を考へ各方向の分速度を u, v, w とすれば, Navier-Stokes の運動方程式に於て $u\frac{\partial u}{\partial x}, v\frac{\partial v}{\partial y}, w\frac{\partial w}{\partial z}$ 等を無視する事により

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u,\quad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v,\quad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w\cdots\cdots(2)$$

地下水流に於ては速度ポテンシャルが存在するものと見做す事が出來るから之を φ とすれば

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

之を (2) の各式に代入しその第1式に $\partial x/\partial s$, 第2式に $\partial y/\partial s$, 第3式に $\partial z/\partial s$ を乘じて之等を加へれば

$$-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s}-\mu\frac{\partial}{\partial s}(\nabla^2\varphi)-\rho g\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}=\rho g\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial s}(\nabla^2\varphi)\cdots\cdots(3)$$

從つて定流狀態に於ては $\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)+\frac{\mu}{\rho g}\cdot\frac{d}{ds}(\nabla^2\varphi)=0$

然るに一方に於て定流に對しては Darcy の法則により

$$\frac{d\varphi}{ds}=k\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)$$

が成立しなければならない。故に之等を比較する事により

$$\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{\mu}{\rho g}\cdot\frac{d}{ds}(\nabla^2\varphi)$$

之が成立する爲には

$$\mu\nabla^2 u=-\frac{\rho g}{k}u,\quad \mu\nabla^2 v=-\frac{\rho g}{k}v,\quad \mu\nabla^2 w=-\frac{\rho g}{k}w$$

が成立すればよいのであるから之等を (2) 式に代入すれば

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho g}{k}u,\qquad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\rho g}{k}v,\qquad \rho\frac{\partial w}{dt}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w\cdots\cdots(4)$$

(4) 式は地下水の基本運動方程式となるものである。之を軸對稱の圓壔座標に書き直はせば

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\rho g}{k}v_r,\quad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w\cdots\cdots(5)$$

但し v_r は r 方向の流速である。尙運動の平均方向たる s の方向の速度を v_s とすれば (3) 式より

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{g}{k}v_s-g\frac{\partial z}{\partial s}\cdots\cdots(6)$$

連續方程式の一般の形は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\quad 又は\quad \nabla^2\varphi=0\cdots\cdots(7)$$

z 軸のまはりの軸對稱の場合に對しては

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial(rw)}{\partial z}=0\cdots\cdots(8)$$

以下に述べる諸問題に於ては流れは常に2次元又は軸對稱と假定してゐるから(6)式中の v_i は常に一平面内の流れの流速を表はす事となる。從つて殆ど此の式が基本運動方程式として用ひられる。

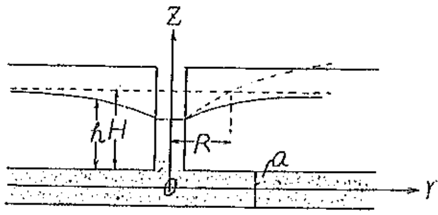
第2章　定流狀態にある地下水流

I. 自由水面なき場合

(1) 掘拔井の問題

地下の深所に在る二つの不滲透層の間の含水層より井によつて水を汲み上げる場合であつて，含水層内の水は相當大なる壓力を受けてゐる。含水層は水平にて厚さが一様，且つ之が無限に擴がりその中の水壓は一様なるものとする。井のなき時の靜水壓を w_0H, 井によつて單位時間に Q なる水量を汲み出す時の含水層内の水壓を w_0h とする。水を汲み出す時は井の中心に向ふ地下水流を生じ從つて或る壓力勾配が必要となるから壓力線の高さ h は r の函數である。井の中心に z 軸を鉛直上向きに取り流速を v にて表はせば r の方向は r と一致するから

第2圖



$$p=w_0h,\quad \therefore\ -\frac{w_0}{\rho}\cdot\frac{dh}{dr}-\frac{g}{k}v=0,\quad \therefore\ v=-k\frac{dh}{dr}\cdots\cdots(9)$$

連續方程式としては次の形を用ふる。

$$Q=-2\pi rav\cdots\cdots(10)$$

(9) と (10) 式を解いて壓力線の形を求めれば

$$\frac{dh}{dr}=\frac{Q}{2\pi ka}\cdot\frac{1}{r},\quad \therefore\ h=\frac{Q}{2\pi ka}\ln r+C$$

C は常數である。h は水流が釣合の狀態にある時の壓力線の高さであるからその時は井の中の水面も或る一定の高さを保つてゐる。この高さを h_0 とし井の半徑を r_0 とすれば $r=r_0$ にて $h=h_0$ であるから

$$h-h_0=\frac{Q}{2\pi ka}\ln\frac{r}{r_0}\cdots\cdots(11)$$

この (11) 式は從來の理論にて求められた結果と同じであるがこの中には明かに矛盾が含まれてゐる。この壓力線の形を圖に畫けば第2圖の點線にて示す曲線の様な形となり，r の或る有限値 R にて $h=H$ となる。卽ち

$$H-h_0=\frac{Q}{2\pi ka}\ln\frac{R}{r_0},\quad \therefore R=r_0\exp\left\{\frac{2\pi ka}{Q}(H-h_0)\right\}$$

而て $r>R$ の部分にては $h>H$ となり，之は井より水を汲み上げたる爲に井より遠き部分は壓力が著しく上昇する事を示すものであつて明かに不合理である。若し實際に水量 Q を汲み上げて水量が安定の狀態に在るならば $r\to\infty$ にて $h\to H$ でなければならない。

この不合理を消滅せしめる一つの方法として Darcy の法則の代りに地下水面の勾配を I として

$$v=kI^{\frac{1}{\beta}},\quad \beta>1$$

を用ふるものがある。この方法によれば

$$h-h_0=\left(\frac{Q}{2\pi ka}\right)^{\beta}\frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{r_0^{\beta-1}}-\frac{1}{r^{\beta-1}}\right),\quad 又は\quad H-h=\left(\frac{Q}{2\pi ka}\right)^{\beta}\frac{1}{\beta-1}\cdot\frac{1}{r^{\beta-1}}$$

の形となる[1]。之によれば $r\to\infty$ にて $h\to H$ であるから上記の不合理は取り除かれてはゐるが，かゝる方法は問題の本質的な部分に觸れてゐるのではないから決して矛盾を全然消滅せしめる事は出來ないのである。何となれば Darcy の法則のほゞ成立する事は誤りないものと考へてよいから β は 1 に極めて近き數であつて，$H-h_0$ が有限の量であるならば Q は極めて小さい量とならざるを得ない。而て $\beta\to1$ の極限値に於ては H が有限なる限り $Q\to0$ となるのであるから之も決して妥當なる理論と言ふ事は出來ないのである。

之等の點を綜合して得られる結論としては次の樣に言ふ他はないと思ふ。卽ち有限の一樣壓力水頭を有する無限に廣い水平含水層に掘拔井を掘り，之より一定水量を絶えず汲み上げる時は含水層內の地下水流は安定の狀態に達し得ない。之は斯の如き掘拔井の周圍の地下水流は定流狀態とはなり得ない事を意味する。然し含水層の廣さが有限であるか又は之がある勾配を有してゐれば定流狀態を保つ事が出來るのである。

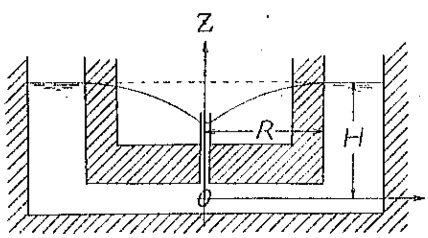
例へば第 3 圖の樣に含水層が半徑 R の地域內に限られ，壓力線の高さが $r=R$ にて H に保たれる時に井より Q なる一定流量を汲み出す場合には

$$H-h=\frac{Q}{2\pi ka}\ln\frac{R}{r}$$

この時の井の中の水面の高さ h_0 は

$$h_0=H-\frac{Q}{2\pi ka}\ln\frac{R}{r_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

第　3　圖



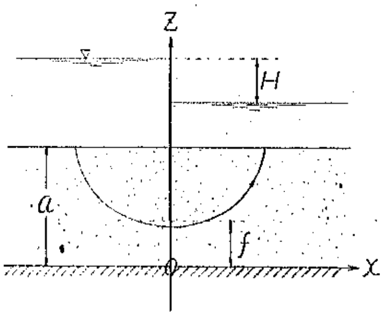
この場合は何等の矛盾を含まないから安定なる狀態として永續する事が出來る。尚不定流狀態の問題に就ては後章にて述べる。

(2) 矢板の下の透水

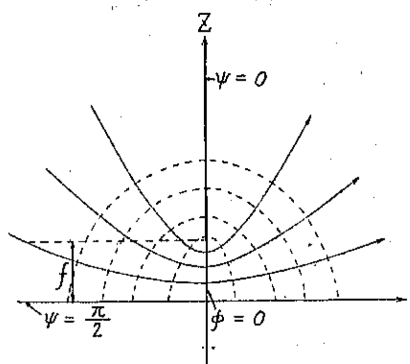
第 4 圖の樣に厚さ a の水平含水層に矢板を鉛直に $a-f$ の深さまで打ち込み，その兩側に H なる水位差を與へれば矢板の下を通る地下水流を生ずる。而してかゝる地下水流は重力の影響は極めて小さく純然たるポテンシァル流であるから適當なる方法によつてポテンシァル函數及び流函數の形を定めれば水流に對する精密なる解が得られる。

先づ簡單なる例として含水層の厚さ a が f に比して非常に大きい場合を考へればポテンシァル函數及び流函數は次の形にて與へられる。

第　4　圖



第　5　圖



[1] Ph. Forchheimer; Hydraulik (1930) S. 70.

$$\frac{z^2}{f^2\cosh^2\varphi}+\frac{x^2}{f^2\sinh^2\varphi}=1,\qquad \frac{z^2}{f^2\cos^2\psi}-\frac{x^2}{f^2\sin^2\psi}=1 \qquad\cdots\cdots(13)$$

流線 $\psi=\text{const.}$ 及び等ポテンシャル線 $\varphi=\text{const.}$ は第 5 圖の様な形となるが，圖の様な方向の流れを生ずる爲には z 軸の左側では $\varphi>0$, z 軸の右側では $\varphi<0$ でなければならない。然し (13) 式は一つの φ の値に對して一つの完全なる楕圓を規定するものと考へなければならないから，此處には $\varphi>0$ として z 軸の右側のみを考へ z 軸の左側にては總て之と對稱なる事より定める。從つて矢板の下を通過する流速又は流量を計算する時は φ は $x=0$ にて不連續に變化するから x 及び z 方向の流速を v_x 及び v_z とすれば

$$v_x=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v_z=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

を用ひて計算しなければならない[1]。(13) 式より

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\psi&=\frac{1}{2f^2}\left[-(x^2+z^2-f^2)+\sqrt{(x^2+z^2-f^2)^2+4x^2f^2}\right]\\&=\frac{1}{2f^2}\left[-(x^2+z^2-f^2)+\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}\right]\\\cos^2\psi&=\frac{1}{2f^2}\left[x^2+z^2+f^2-\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}\right]\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}&=\frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}\sqrt{\frac{x^2+z^2+f^2-\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}{-x^2-z^2+f^2+\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}}\\\frac{\partial\psi}{\partial z}&=\frac{-z}{\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}\sqrt{\frac{-x^2-z^2+f^2+\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}{x^2+z^2+f^2-\sqrt{(x^2+z^2+f^2)^2-4z^2f^2}}}\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(15)$$

(15) 式より v_x 及び v_z を決定する事が出來るが之は含水層の厚さ a を無限大と假定し，矢板の兩側の落差も從つて無限大と假定したものであるから，各點に於ける相對的の流速を知るのみであつて之を應用して直ちに a が有限の大さを持ち落差 H も一定なる値を有する場合の流速を求める事は出來ない。矢板の下側卽ち $x=0$ の面に於ては

$$\left.\begin{aligned}v_z&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\\v_x&=-\frac{\partial\psi}{\partial z}=0\qquad\text{for } z\geqq f\\&=\frac{z}{f\sqrt{f^2-z^2}}\qquad\text{for } z<f\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(16)$$

この斷面を通過する流量 q は　$q=\int_0^f\frac{zdz}{f\sqrt{f^2-z^2}}=1$

從つて若しこの流量が q_0 なる事を知るならばその時のポテンシャル函數は $q_0\varphi$ であつて，一方 Darcy の法則より一つの流線に沿ふ流速を v_s とすれば $v_s=-k\frac{\partial h}{\partial s}$ の形にて表はされるのであるから，含水層内の 2 點間の落差を表はす量 Δh は $q_0\Delta\varphi/k$ を以て表はされる。

次に第 4 圖の様に含水層の厚さ a が有限の大さを有する場合を考へる。但しこの層は x 方向には無限に延びてゐるものとする。第 1 に $z=0$ と $z=a$ の 2 直線の間に在る帶狀部分を $Z+iX$ 平面の上半分に寫像する様な

[1] 坐標軸の關係上　$v_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$　である

寫像函數を考へるに之は

$$Z+iX=\sin\frac{\pi}{2a}(z+ix)=\sin\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a}+i\cos\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a}$$

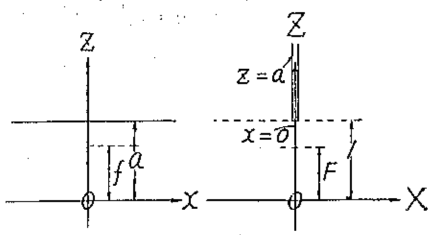
$$\therefore\ Z=\sin\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a},\qquad X=\cos\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a}\quad\cdots\cdots(17)$$

$z+ix$ 面にて $(f,0)$ にある點は $Z+iX$ 面にては

$$Z=\sin\frac{\pi f}{2a}=F,\qquad X=0$$

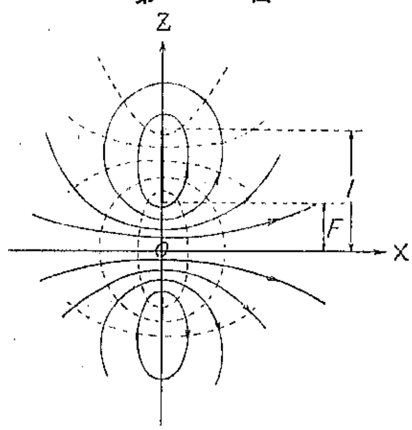
の點である。又前者の $(a,0)$ の點は後者の $(1,0)$ の點に對應してゐる。$z=a$ の直線は $Z+iX$ 面にては $(1,0)$ の點より折れて $\pi/2$ だけ廻轉して Z 軸の $(1,0)$ より上の部分と一致する。

第　6　圖



$Z+iX$ 面内の流れの狀態を知る必要があるが流線は $z=a$ の線に垂直でなければならないから，等角寫像を行へる後は Z 軸の $Z>1$ の部分に垂直となる。尚 z 軸の中にて $0<z<f$ の部分はそのまゝ Z 軸上の $0<Z<F$ の部分に寫像されるのであるから流線はこの部分に對しても垂直である。斯くの如きポテンシァル流は第7圖の上半面の樣に $Z=0$ の處に境界がある，Z 軸上に $1-F$ の長さの壁が圖の位置にある時の壁のまはりの循環流である。かゝる流れの問題を解くには境界線がないものと假定し圖の樣に X 軸に就て對稱なる第2の壁を考へ，このまはりにも前のものと大さが等しく廻轉方向の反對な循環流が存在するものとして兩者を組み合はせるのである。この二つの循環流の各流函數を夫々 ψ_1,ψ_2 とすれば之は境界線がないものと假定せるものであるから

第　7　圖



$$\left.\begin{aligned}\frac{4\left(Z-\dfrac{1+F}{2}\right)^2}{(1-F)^2\cosh^2\psi_1}+\frac{4X^2}{(1-F)^2\sinh^2\psi_1}=1,\\ \frac{4\left(Z+\dfrac{1+F}{2}\right)^2}{(1-F)^2\cosh^2\psi_2}+\frac{4X^2}{(1-F)^2\sinh^2\psi_2}=1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

の流函數は $\psi=\psi_1+\psi_2$ である。玆に

$$\frac{Z-\dfrac{1+F}{2}}{\dfrac{1-F}{2}}=\zeta_1,\quad \frac{Z+\dfrac{1+F}{2}}{\dfrac{1-F}{2}}=\zeta_2,\quad \frac{X}{\dfrac{1-F}{2}}=\xi\quad\cdots\cdots(19)$$

と置いて (18) 式を簡單にすれば

$$\frac{\zeta_1^2}{1+\sinh^2\psi_1}+\frac{\xi^2}{\sinh^2\psi_1}=1,\qquad \frac{\zeta_2^2}{1+\sinh^2\psi_2}+\frac{\xi^2}{\sinh^2\psi_2}=1\quad\cdots\cdots(20)$$

之を解いて $\sinh^2\psi_1$, $\cosh^2\psi_1$, $\sinh^2\psi_2$ 及び $\cosh^2\psi_2$ を求めれば

$$
\left.\begin{aligned}
\sinh^2\psi_1&=\frac{1}{2}\left\{\zeta_1^2+\xi^2+\sqrt{(\zeta_1^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_1^2}-1\right\}\\
\cosh^2\psi_1&=\frac{1}{2}\left\{\zeta_1^2+\xi^2+\sqrt{(\zeta_1^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_1^2}+1\right\}\\
\sinh^2\psi_2&=\frac{1}{2}\left\{\zeta_2^2+\xi^2+\sqrt{(\zeta_2^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_2^2}-1\right\}\\
\cosh^2\psi_2&=\frac{1}{2}\left\{\zeta_2^2+\xi^2+\sqrt{(\zeta_2^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_2^2}+1\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(21)
$$

尙夫々の循環流に對するポテンシャル函數 φ_1 及び φ_2 は

$$
\frac{\zeta_1^2}{\cos^2\varphi_1}-\frac{\xi^2}{\sin^2\varphi_1}=1,\qquad \frac{\zeta_2^2}{\cos^2\varphi_2}-\frac{\xi^2}{\sin^2\varphi_2}=1\quad\cdots\cdots(22)
$$

から定められる。然し a が無限大なる場合と同じ樣に流れが矢板の左側から右側に向ふ爲にはポテンシャル函數は z 軸又は Z 軸の左側にては正, 右側にては負とならねばならない。故に前と同じく z 軸の左側のみを取りその右側は之と對稱なる事より定める。尙 ψ_2 及び φ_2 に關しては (20) 及び (22) 式にて興へられるものは符號は任意であるから玆には何れも正と假定して組み合はせたる後のポテンシャル函數及び流函數を

$$
\varphi=\varphi_1-\varphi_2,\qquad \psi=\psi_1-\psi_2
$$

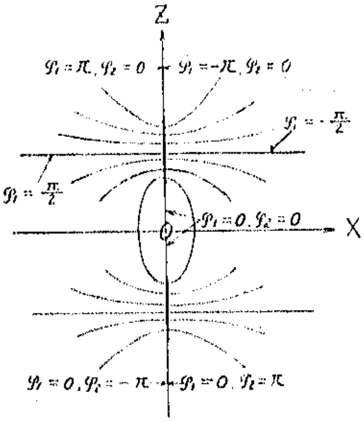
にて表はす事とする。

$\varphi=\mathrm{const.}$ は等ポテンシャル線であつて φ は第 8 圖に示す樣に $-\pi$ より π までの間を變化する。故に矢板の兩側の水位差が H ならば

$$
\varphi=\frac{2\pi}{H}h,\qquad (h\ \text{は變數})
$$

の形で表はされなければならない。然し上の方程式から求めた φ は Z 軸の兩側にて正として居り, 之を Z 軸を通過する時に正より負に變化するものとすればその變化が不連續となる惧れがあるから, この場合の流速の計算には ψ を用ひなければならない。ψ と H の關係に就ては h と直交性 (orthogality) を有する函數 h' を考へれば

第　8　圖



$$
\psi=\frac{2\pi}{H}h'
$$

の形となる。但し $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial h'}{\partial z},\ -\dfrac{\partial h}{\partial z}=\dfrac{\partial h'}{\partial x}$

各點に於ける流速は次の形にて興へられる。

$$
v_x=-k\frac{\partial h}{\partial x},\qquad v_z=k\frac{\partial h}{\partial z}
$$

$$
\therefore\quad v_x=-\frac{kH}{2\pi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad v_z=-\frac{kH}{2\pi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad\cdots\cdots(23)
$$

之を計算する爲には先づ (21) の第 1 式を ξ にて微分すれば

$$
\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}=\frac{\xi}{\sqrt{(\zeta_1^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_1^2}}\cdot\frac{\cosh\psi_1}{\sinh\psi_1},
$$

同樣にして
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}&=\frac{\zeta_1}{\sqrt{(\zeta_1^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_1^2}}\cdot\frac{\sinh\psi_1}{\cosh\psi_1}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}&=\frac{\xi}{\sqrt{(\zeta_2^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_2^2}}\cdot\frac{\cosh\psi_2}{\sinh\psi_2}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}&=\frac{\zeta_2}{\sqrt{(\zeta_2^2+\xi^2+1)^2-4\zeta_2^2}}\cdot\frac{\sinh\psi_2}{\cosh\psi_2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

尙
$$\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{1}{1-F}\cdot\frac{\partial X}{\partial z}=-\frac{\pi}{2a(1-F)}\sin\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a},\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{1-F}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\pi}{2a(1-F)}\cos\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a}$$
$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial z}=\frac{\partial\zeta_2}{\partial z}=\frac{1}{1-F}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\pi}{2a(1-F)}\cos\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a}$$
$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}=\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}=\frac{1}{1-F}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{\pi}{2a(1-F)}\sin\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a}$$

之等の結果を (23) 式に代入すれば
$$\left.\begin{aligned}v_z&=-\frac{kH}{2\pi}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right]=-\frac{kH}{2\pi}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}\cdot\frac{\partial\zeta_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\cdot\frac{\partial\zeta_2}{\partial z}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]\\ &=-\frac{kH}{2a(1-F)}\left[\cos\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\right)-\sin\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_1-\psi_2)\right]\\ v_x&=-\frac{kH}{2\pi}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right]\\ &=-\frac{kH}{2a(1-F)}\left[-\sin\frac{\pi z}{2a}\sinh\frac{\pi x}{2a}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\right)+\cos\frac{\pi z}{2a}\cosh\frac{\pi x}{2a}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_1-\psi_2)\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(25)$$

(25) 式に (21) 及び (24) 式の關係を代入すれば各點に於ける流速の大さを計算する事が出來る。一例として矢板の下の斷面卽ち $x=0\,(z\leqq f)$ に於ける流速を求めればこの斷面にては v_z は明かに零である。水平の流速 v_x は

$$X=0,\qquad Z=\sin\frac{\pi z}{2a}$$
$$\therefore\quad \xi=0,\qquad \zeta_1=\frac{\sin\frac{\pi z}{2a}-\frac{1+F}{2}}{\frac{1-F}{2}}=\zeta_{10},\qquad \zeta_2=\frac{\sin\frac{\pi z}{2a}+\frac{1+F}{2}}{\frac{1-F}{2}}=\zeta_{20}$$

あるから之を (25) 式に代入すれば
$$\begin{aligned}[v_x]_{x=0}&=-\frac{kH}{2a(1-F)}\cos\frac{\pi z}{2a}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\right)\\ &=\pm\frac{kH}{2a(1-F)}\cos\frac{\pi z}{2a}\left[\frac{\zeta_{20}}{\sqrt{(\zeta_{20}^2+1)^2-4\zeta_{20}^2}}\sqrt{\frac{\zeta_{20}^2-1+\sqrt{(\zeta_{20}^2+1)^2-4\zeta_{20}^2}}{\zeta_{20}^2+1+\sqrt{(\zeta_{20}^2+1)^2-4\zeta_{20}^2}}}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\zeta_{10}}{\sqrt{(\zeta_{10}^2+1)^2-4\zeta_{10}^2}}\sqrt{\frac{\zeta_{10}^2-1+\sqrt{(\zeta_{10}^2+1)^2-4\zeta_{10}^2}}{\zeta_{10}^2+1+\sqrt{(\zeta_{10}^2+1)^2-4\zeta_{10}^2}}}\right]\end{aligned}$$

但し ζ_{10} 及び ζ_{20} は z の函數である。又 $z\leqq f$ であるから
$$\sin\frac{\pi z}{2a}\leqq F<1$$
$$\zeta_{10}-1=\frac{2\sin\frac{\pi z}{2a}-(1+F)}{1-F}-1=\frac{2\sin\frac{\pi z}{2a}-2}{1-F}<0,\quad \zeta_{20}-1=\frac{2\sin\frac{\pi z}{2a}+(1+F)}{1-F}-1=\frac{2\sin\frac{\pi z}{2a}+2F}{1-F}>0$$

$$\therefore\quad \zeta_{10}<1,\quad \zeta_{20}>1$$

故に括弧内の第2項は零となる。從つて（±）符號は（+）を取らねばならない。

$$\left.\begin{aligned}
&\therefore\quad [v_x]_{x=0}=\frac{kH}{2a(1-F)}\cos\frac{\pi z}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\zeta_{20}{}^2-1}}\\
&\text{但し}\qquad \frac{1}{\sqrt{\zeta_{20}{}^2-1}}=\frac{1-F}{2\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2a}+(1+F)\sin\frac{\pi a}{2a}+F}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

從つて $[v_x]_{x=0}$ の分布狀態を見るには次の函數を見ればよい。

$$\chi(z)=\frac{\cos\frac{\pi z}{2a}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2a}+(1+F)\sin\frac{\pi z}{2a}+F}}$$

$z=0$ にて　　$\chi(0)=\frac{1}{\sqrt{F}}$

$z=f$ にて　　$\chi(f)=\sqrt{\frac{1-F}{2F}}$

$0<z<f$ にて $d\chi/dz<0$ であるから $\chi(z)$ は $z=0$ より $z=f$ に向つて減少して行く。更に $d^2\chi/dz^2$ を求めれば

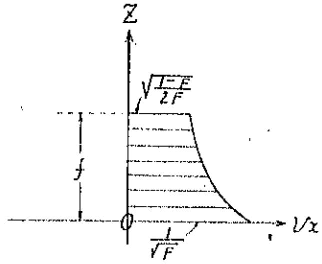
$$\frac{d^2\chi}{dz^2}=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\cos\frac{\pi z}{2a}\cdot\frac{\left[3(1+F)\sin^3\frac{\pi z}{2a}+(4+10F)\sin^2\frac{\pi z}{2a}+(7+8F+F^2)\sin\frac{\pi z}{2a}+3+4F+F^2\right]}{2\left[\sin^2\frac{\pi z}{2a}+(1+F)\sin\frac{\pi z}{2a}+F\right]^{\frac{5}{2}}}$$

故に $0<z<f$ の範圍にては $d^2\chi/dz^2>0$ であるから $x=0$ の鉛直線上の流速分布の狀態は第 9 圖の樣になつてゐる事が知られる。尚矢板の下を通過する流量は單位幅につき

$$q=\frac{kH}{4a}\int_0^f\frac{\cos\frac{\pi z}{2a}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2a}+(1+F)\sin\frac{\pi z}{2a}+F}}\,dz$$

$$\therefore\quad q=\frac{kH}{2\pi}\left\{\cosh^{-1}\left(\frac{1+3F}{1-F}\right)-\cosh^{-1}\left(\frac{1+F}{1-F}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

第 9 圖



次に $z=a$ 即ち水底面に於ける滲透速度を求めれば

$$[v_z]_{z=a}=\frac{kH}{2a(1-F)}\sinh\frac{\pi x}{2a}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\right)$$

然るに $z=a$ にては $X=0,\ Z=\cosh\frac{\pi x}{2a}$ であるから

$$\xi=0,\quad \zeta_1=\frac{2\cosh\frac{\pi x}{2a}-(1+F)}{1-F}=\zeta_{11},\quad \zeta_2=\frac{2\cosh\frac{\pi x}{2a}+(1+F)}{1-F}=\zeta_{21}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad [v_z]_{z=a}=\pm\frac{kH}{2a(1-F)}\sinh\frac{\pi x}{2a}\Bigg[&\frac{\zeta_{11}}{\sqrt{(\zeta_{11}{}^2+1)^2-4\zeta_{11}{}^2}}\sqrt{\frac{\zeta_{11}{}^2-1+\sqrt{(\zeta_{11}{}^2+1)^2-4\zeta_{11}{}^2}}{\zeta_{11}{}^2+1+\sqrt{(\zeta_{11}{}^2+1)^2-4\zeta_{11}{}^2}}}\\
&-\frac{\zeta_{21}}{\sqrt{(\zeta_{21}{}^2+1)^2-4\zeta_{21}{}^2}}\sqrt{\frac{\zeta_{21}{}^2-1+\sqrt{(\zeta_{21}{}^2+1)^2-4\zeta_{21}{}^2}}{\zeta_{21}{}^2+1+\sqrt{(\zeta_{21}{}^2+1)^2-4\zeta_{21}{}^2}}}\Bigg]\end{aligned}$$

この場合は明かに $\zeta_{11}\geqq1,\ \zeta_{21}>1$ 且つ $\zeta_{11}<\zeta_{21}$ であるから

$$
\left.
\begin{aligned}
&[v_z]_{z=a}=\frac{kH}{2a(1-F)}\sinh\frac{\pi x}{2a}\left[\frac{1}{\sqrt{\zeta_{11}^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{\zeta_{21}^2-1}}\right]\\
\text{但し}\quad &\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{1-F}{2\sqrt{\cosh^2\frac{\pi x}{2a}\mp(1+F)\cosh\frac{\pi x}{2a}+F}}
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots(28)
$$

($\mp$) 符號は (ζ_{11}^2-1) に對して ($-$), (ζ_{21}^2-1) に對して ($+$) を取る。$x=0$ の時は $\zeta_{11}=1$ であるが同時に $\sinh\frac{\pi x}{2a}$ が零となるから $[v_z]_{z=a}$ の値は有限になつてゐる。即ち

$x=0$ にて $$[v_z]_{z=a}=\frac{kH}{4a}\sqrt{\frac{2}{1-F}}$$

$x\to\infty$ にて $$[v_z]_{z=a}\to 0$$

即ち x が大きくなるに從つて滲透速度 $[v_z]_{z=a}$ は減少して零に近付いて行く事が知られる。

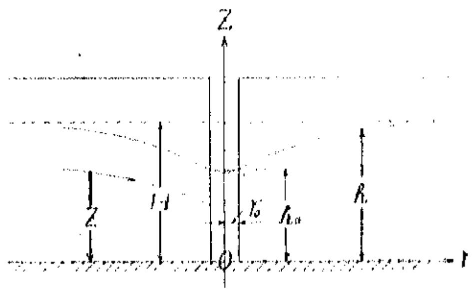
2. 自由水面のある場合

(1) 井の問題

自由水面は所謂地下水面 (groundwater surface) であつて流れはこの面の勾配によつて生ずる。實際の地下水面は自由流線 (free stream line) よりも毛管高だけ上にあるが，之は一般に甚だ小さい量であるから自由流線の位置を以て地下水面と考へる。

先づ第 10 圖の様な不滲透層に達する井を考へ，井の周壁は多孔質で水の滲透が全く自由なるものとする。運動方程式は (6) 式より

第 10 圖



$$\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{dp}{ds}+\frac{v_s}{k}+\frac{dz}{ds}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\therefore\quad v_s=-k\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)=-\frac{d\varphi}{ds}$$

φ は速度ポテンシャルに相當するものであつて軸對稱の問題であるから $ds^2=dr^2+dz^2$ である。この種の問題にて用ひられる境界條件としては次の如きものがある。

i) 不滲透層： $dr/ds=\cos\alpha$, $dz/ds=\sin\alpha$ と置けば

$$v_r=-\frac{d\varphi}{ds}\cos\alpha,\quad v_z=-\frac{d\varphi}{ds}\sin\alpha$$

不滲透層の表面は一つの流線でなければならないから水平と α の傾きをなす直線狀不滲透層ならばその上にて

$$v_r:v_z=\cos\alpha:\sin\alpha$$

ii) 自由水面： この面の上では $p=0$ であるから

$$v_s=-k\frac{dz}{ds},\qquad\therefore\quad v_s^2=-kv_s\frac{dz}{ds}=-kv_z\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

又は $$v_r^2+v_z^2=-kv_z,\qquad\therefore\quad v_r^2+\left(v_z+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}$$

之は速度面に寫像せる時の自由水面の形が $v_r=0$, $v_z=-k/2$ を中心とし半徑 $k/2$ なる圓の弧となる事を示してゐる。

連續方程式の一般形は $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

であるが湧出量の一定なる井の問題に於ては單位時間に井より汲み出す水量 Q を與へて

$$Q=-2\pi r\int_0^h v_r dz \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

を用ふる。h は不滲透層より地下水面までの高さであるから r の函數である。尚之に $v_r=v_z\cot\alpha$ を代入すれば

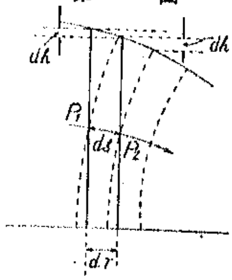
$$\frac{Q}{2\pi r}=-\int_0^h v_z\cot\alpha\,dz \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

從來井の問題に於て用ひられるものは最も簡單なるものは地下水面の勾配か小さく從つて v_r の方向は水平と假定する。かく假定すれば $d\varphi/ds=dh/dr$ であつて，v_r は $z=0$ より $z=h$ まで一様であるから

$$Q=-2\pi rhk\frac{dh}{dr} \qquad \therefore\quad \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0}=h^2-h_0^2$$

但し r_0 は井の半徑，h_0 は井内の水深である。然しこの式は掘拔井の場合に述べたものと同じ不合理を含むものであるから，之に對しては從來も種々の解法が行はれた。然し乍ら著者の知れる範圍にては何れの解法も等ポテンシァル線を鉛直なりと假定してゐる。即ち 2 點 P_1, P_2（第 11 圖）間のポテンシァルの勾配を dh/ds としてゐるが，實際の等ポテンシァル線は圖の點線の様な形であるから P_1, P_2 の間のポテンシャルの勾配は dh_1/ds である。之は不滲透層の附近にては稍大きい差を生ずる事があるから此處には上述の如き假定を用ひない事とする。等ポテンシァル線及び流線は斯の如く重力によつて流れの生ずる問題に於ては之を畫く事は甚だ困難であつて，叉實用的な結果も得難いから此處には自由水面のある場合に對する特殊の方法を述べる。

第 11 圖



連續方程式 (33) の兩邊を r にて微分すれば

$$\frac{Q}{2\pi r^2}=[v_z\cot\alpha]_{z=h}\frac{dh}{dr}+\int_0^h\frac{\partial v_r}{\partial r}dz$$

右邊の第 1 項に自由水面に於ける條件 (30) 式を代入し，更に α は流線への切線が水平線となす角であるから地下水面即ち自由水面の α の値を α_0 にて表はせば

$$\frac{Q}{2\pi r^2}=\left[-\frac{v_s^2}{k}\cot\alpha\right]_{z=h}\tan\alpha_0+\int_0^h\frac{\partial v_r}{\partial r}dz$$

この最後の項に運動方程式より得たる v_r を代入すればよいのであるが，地下水中の壓力 p は容易に定め難いものであるからこの積分内の v_r に對しては近似値として

$$v_r\fallingdotseq-\frac{Q}{2\pi rh}$$

を用ふる。之は $\partial v_r/\partial r$ が他の項に比して小さい事及びこの中に含まれる誤差は積分によつてほゞ相殺される事より大なる誤差とはならない。且つ地下水面にては $v_s=-k\dfrac{dz}{ds}=-k\dfrac{dh}{ds}$ であるから

$$\frac{Q}{2\pi r^2}=-k\left(\frac{dh}{ds}\right)^2+\frac{Q}{2\pi r}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)=-k\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\frac{1}{\left(\dfrac{dh}{dr}\right)^2+1}+\frac{Q}{2\pi r}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{Q}{2\pi rh}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left\{\left(\frac{dh}{dr}\right)^2+1\right)\Big\}=k\left(\frac{dh}{dr}\right)^2$$

此處には $dh/dr=0$ の場合は考へないから

$$\left(\frac{dh}{dr}\right)^2-\frac{2\pi rhk}{Q}\cdot\frac{dh}{dr}+1=0 \quad\cdots\cdots(34)$$

故に dh/dr が實數なる爲の條件は

$$rh\geqq\frac{Q}{2\pi k}\quad 又は\quad k\geqq\frac{Q}{2\pi rh}$$

であつて近似的に一鉛直線内の平均流速 v を $v=-k\dfrac{dh}{dx}$ と考へれば，上の條件は $\dfrac{dh}{dx}<1$ なる事を意味する。尙 $\dfrac{dh}{dr}>0$ なる事は明かであるから (34) 式を解けば

$$\frac{dh}{dr}=\frac{\pi rhk}{Q}+\sqrt{\left(\frac{\pi rhk}{Q}\right)^2-1}$$

之は次の樣にして (34) 式より直接に解く方が簡單である。卽ち一般に dh/dr は 1 に比して小さいからその近似値は $Q/(2\pi rhk)$ である。之を (34) 式の第 1 項に代入すれば

$$\frac{dh}{dr}=\frac{Q}{2\pi rhk}\left\{1+\left(\frac{Q}{2\pi rhk}\right)^2\right\}$$

更に之を第 2 近似値として再び (34) 式の第 1 項に代入すれば

$$\frac{dh}{dr}=\frac{Q}{2\pi rhk}\left\{1+\left(\frac{Q}{2\pi rhk}\right)^2+2\left(\frac{Q}{2\pi rhk}\right)^4\right\}$$

之を積分する爲に右邊の括弧内の h に對して近似値として靜水時の水深 H を用ひれば

$$\int hdh=\frac{Q}{2\pi k}\int\frac{dr}{r}+\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\frac{1}{H^2}\int\frac{dr}{r^3}+2\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^5\frac{1}{H^4}\int\frac{dr}{r^5}+C$$

$$\therefore\quad \frac{h^2}{2}=\frac{Q}{2\pi k}\ln r-\frac{1}{2H^2}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\frac{1}{r^2}-\frac{1}{4H^4}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^5\frac{1}{r^4}+C$$

$r=r_0$ にて $h=h_0$ とすれば

$$h^2-h_0^2=\frac{Q}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0}+\frac{1}{H^2}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{2H^4}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^5\left(\frac{1}{r_0^4}-\frac{1}{r^4}\right)$$

この解と雖も尙 r があまり大きくなく而も H は相當の大さを有する時の近似解に過ぎない。何となればこの場合も掘拔井に於ける同じく $r\to\infty$ にて $h\to H$ とならずに $h\to\infty$ となるのである。この不合理の原因は最初 $h=H$ なる地下水なりし處に井を穿ちて Q なる一定流量を汲み出し，地下水面を安定ならしめる事は不可能であるといふ事實に起因するものである。然らば何故に水面は安定となり得ないかを考へるに，$r\to\infty$ にて一定の水深に近付くと言ふ事は r の非常に大きい處にては流れは底に平行となり 2 次元の水流に於ける等速定流 (uniform steady flow) に相當する狀態となる事であるが等速定流の水深は任意なるものではなく，或る勾配及び或る流量に對して安定を保ち得る水深は唯一つあるのみである。2 次元の場合ならば底勾配のなき時はこの等速定流の水深は無限大なる事明かであるが，軸對稱の場合にも水平底の時は $r\to\infty$ にて安定となるべき水深は無限であらねばならないのである。卽ち H が有限ならば $\lim_{r\to\infty}2\pi rhv=0$ である。

尙この問題に關しては J. Schultze が既に影響圏の半徑 (radius of influence circle) は固定したものではなく絕えず擴大するものなる事を説いてゐる。氏の考へ方は水量 Q を汲み上げる時は h_0 は固定して R が擴大するものとし

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\frac{\partial h}{\partial t}\right]_{r=R},\quad n は常數$$

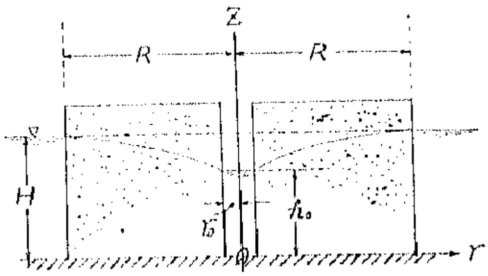
なる法則を與へて t の函數としての R を求めんとするのである。

第 12 圖の樣に含水層の廣さが有限なる時は含水層の外側 $r=R$ にて水深が $h=H$ として

$$H^2-h_0^2=\frac{Q}{\pi k}\ln\frac{R}{r_0}+\frac{1}{H^2}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2H^2}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\left(\frac{1}{r_0^4}-\frac{1}{R^4}\right)\cdots(36)$$

之より湧水量 Q の値を計算する事が出來る。

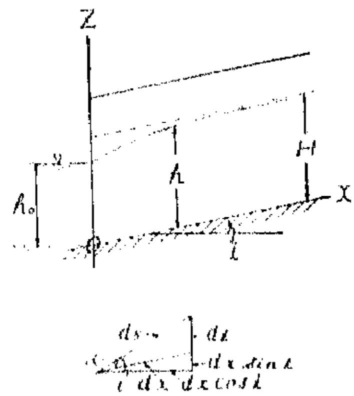
第 12 圖



(2) 2 次元の地下水流の問題

先づ第 13 圖の如く水に臨む地域内の地下水流を考へる。單位幅を通る流量を q, 不滲透層の勾配を i とすれば基本運動方程式は (4) 式の代りに

第 13 圖



$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\rho g\sin i-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho g}{k}v_x,\qquad \rho\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}v_z$$
$$\cdots\cdots\cdots(37)$$

玆に v_x 及び v_z は圖の樣に坐標軸を定めた時の坐標軸方向の分速度である。ポテンシャル函數を用ひて之を書き直せば

$$-\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=-\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\rho g}{k}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\rho g\left(\sin i\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{v_s}{k}-\frac{\partial}{\partial s}(x\sin i+z)\quad\cdots\cdots(38)$$

定流狀態の時は

$$\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{dp}{ds}+\frac{v_s}{k}+\frac{d}{ds}(x\sin i+z)=0\quad\cdots\cdots(39)$$

從つて自由水面に對する境界條件は

$$v_s=-k\frac{d}{ds}(x\sin i+z),\ \text{又は}\ v_s^2=-k(v_x\sin i+v_z)\quad\cdots\cdots(40)$$

$x\to\infty$ にては z に關係なく $v_x=-k\tan i=-\frac{q}{H}\quad\cdots\cdots(41)$

但し H は地下水が一樣水深にて流れる時の水深である。尙流線の x 軸よりの傾きを α にて表はせば

$$\frac{dx\cos i}{ds}=\cos(\alpha+i)\qquad\therefore\quad\frac{dx}{ds}=\frac{\cos(\alpha+i)}{\cos i}$$

$$\frac{dz+dx\sin i}{ds}=\sin(\alpha+i)\qquad\therefore\quad\frac{dz}{ds}=\sin(\alpha+i)-\cos(\alpha+i)\tan i$$

故に水面に於ける條件は自由流線の勾配を α_0 とすれば

$$[v_s]_{z=h}=-k\sin(\alpha_0+i)\quad\cdots\cdots(42)$$

次に連續方程式としては下の形を用ふる。

$$q=-\int_0^h v_x\cos i\,dz=-\int_0^h v_s\cos(\alpha+i)\,dz\quad\cdots\cdots(43)$$

前と同じくこの兩邊を x にて微分すれば

$$0=-[v_x\cos(\alpha+i)]_{z=h}\frac{dh}{dx}-\int_0^h\frac{d}{dx}\{v_x\cos(\alpha+i)\}dz$$

この最後の項に對して近似的に $v_x\cos(\alpha+i)=-q/h$ と置くのであるがその爲に起る誤差の比較的小さいものである事は前に述べたものと同じ理由によるのである。この假定を用ひて書き直ほせば

$$k\sin(\alpha_0+i)\cos(\alpha_0+i)\frac{dh}{dx}+h\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{h}\right)=0,\quad\therefore\quad k\sin(\alpha_0+i)\cos(\alpha_0+i)\frac{dh}{dx}-\frac{q}{h}\cdot\frac{dh}{dx}=0$$

此處には $dh/dx\neq0$ の場合を考へるのであるから

$$\sin(\alpha_0+i)\cos(\alpha_0+i)-\frac{q}{kh}=0\quad\cdots\cdots(44)$$

然るに一方に於て $\dfrac{dh}{dx}=\left[\dfrac{dz}{dx}\right]_{z=h}=\left[\dfrac{\sin(\alpha+i)-\cos(\alpha+i)\tan i}{\cos(\alpha+i)}\right]_{\alpha=\alpha_0}$

$$\therefore\quad\tan(\alpha_0+i)=\frac{dh}{dx}+\tan i\quad\cdots\cdots(45)$$

(44) と (45) 式より α_0 を消去すれば $\sin(\alpha_0+1)>0$, $\cos(\alpha_0+1)>0$ の時は

$$\left(\frac{dh}{dx}+\tan i\right)^2-\left(\frac{dh}{dx}+\tan i\right)\frac{kh}{q}+1=0\quad\cdots\cdots(46)$$

この一般解を求めるには $\dfrac{dh}{dx}+\tan i$ は 1 に比して小さい數と見做して差支へないから第 1 近似値として

$$\frac{dh}{dx}+\tan i=\frac{q}{kh}\qquad\text{又は}\qquad\frac{dh}{dx}=\frac{q}{k}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{H}\right)$$

この dh/dx は $h\to H$ にて $dh/dx\to0$ なる境界條件を滿足してゐる。更に之を (46) 式の第 1 項に代入すれば第 2 近似値は

$$\frac{dh}{dx}+\tan i=\frac{q}{kh}\left\{1+\left(\frac{q}{kh}\right)^2\right\},\quad\text{又は}\quad\frac{dh}{dx}=\frac{q}{k}\left\{\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\frac{1}{h}\left(\frac{q}{kh}\right)^2\right\}$$

この dh/dx は却つて上述の條件を滿足してゐないから更に補正項として右邊に $-\dfrac{q}{kH}\left(\dfrac{q}{kH}\right)^2$ を加へる必要がある。

$$\therefore\quad\frac{dh}{dx}=\frac{q}{k}\left\{\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\left(\frac{q}{k}\right)^2\left(\frac{1}{h^3}-\frac{1}{H^3}\right)\right\}$$

同樣にして第 3 近似値は

$$\frac{dh}{dx}=\frac{q}{k}\left\{\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\left(\frac{q}{k}\right)^2\left(\frac{1}{h^3}-\frac{1}{H^3}\right)+2\left(\frac{q}{k}\right)^4\left(\frac{1}{h^5}-\frac{1}{H^5}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(47)$$

(47) 式を積分するには之を書き直して

$$\frac{k}{q}\frac{hH}{H-h}\frac{dh}{dx}\left[1-\left(\frac{q}{k}\right)^2\frac{(h^2+hH+H^2)}{h^2H^2}-2\left(\frac{q}{k}\right)^4\frac{(h^4+h^3H+2h^2H^2+hH^3+H^4)}{h^4H^4}\right]=1$$

$$\therefore\quad\int\frac{h}{H-h}dh-\left(\frac{q}{k}\right)^2\int\frac{h^2+hH+H^2}{hH^2(H-h)}dh-2\left(\frac{q}{k}\right)^4\int\frac{h^4+h^3H+2h^2H^2+hH^3+H^4}{h^3H^4(H-h)}dh=\frac{q}{kH}\int dx$$

然るに $$\int\frac{h^2+hH+H^2}{hH^2(H-h)}dh=\frac{1}{H^2}\left\{\int\frac{H}{h}dh+\int\frac{2H+h}{H-h}dh\right\}=\frac{1}{H}\ln\frac{h}{(H-h)^3}-\frac{h}{H^2}+C_1$$

$$\int\frac{h^4+h^3H+2h^2H^2+hH^3+H^4}{h^3H^4(H-h)}dh=\frac{1}{H^3}\int\left(\frac{4}{h}+\frac{2H}{h^2}+\frac{H^2}{h^3}\right)dh+\frac{1}{H^4}\int\frac{5H+h}{H-h}dh$$

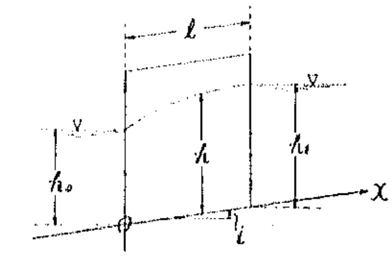
$$=\frac{1}{H^3}\ln\frac{h^4}{(H-h)^6}-\frac{2}{hH^2}-\frac{1}{2h^2H}-\frac{h}{H^4}+C_2$$

此處にて $x=0$ に於て $h=h_0$, $q/kH=\tan i\fallingdotseq i$ と置き，更に小さき項を無視すれば

$$H\ln\frac{H-h_0}{H-h}-(h-h_0)-i^2\left\{H\ln\frac{h(H-h_0)^3}{h_0(H-h)^3}-(h-h_0)\right\}=ix \quad \cdots\cdots(48)$$

之は地下水面の形を表はす式であつてこの中には井の問題に於て遇つた樣な矛盾を含んでゐない。然し不滲透層の勾配が零なる時にこの式の中の i を零としても水面の形を表はす式とはならない。即ち底の水平なる時は全然別に扱ふ必要があるのであつてその結果は $i=0$ なる時は H が有限ならば水面は安定を保ち得ない事になるのである。

第 14 圖



第 14 圖の樣に滲透層の長さ l が有限なる時は $x=l$ にて $h=h_1$ なる條件を用ふれば

$$H\ln\frac{H-h_0}{H-h_1}-(h_1-h_0)-i^2\left\{H\ln\frac{h_1(H-h_0)^3}{h_0(H-h_1)^3}-(h_1-h_0)\right\}=il \quad \cdots\cdots(49)$$

之は l なる長さの滲透層を通過する流量 q を與へる式である。(48) 及び (49) 式は何れも從來求められてゐる公式に i^2 の積となれる補正項の加はつたものであるから，この時の補正項は極めて小さく之を無視しても差支へないのが普通である。

第 3 章 不定流狀態にある地下水

1. 自由水面なき場合

水平不滲透層上にある含水層内の地下水の不定流に關する基本運動方程式は

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{1}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)+\frac{v_s}{k}=0 \quad \cdots\cdots(50)$$

一例として二つの水平不滲透層の間にある含水層に達する掘拔井の周圍の地下水流を考へれば，第 2 章に於けると同じく壓力線の高さを h にて表はす事により

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial s}+\frac{v_s}{k}=0$$

軸對稱の場合は s は放射軸 r の方向と一致するからこの方向の速度を v とすれば

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{v}{k}=0 \quad \cdots\cdots(51)$$

連續方程式は前と同じく井の湧出量を Q, 含水層の厚さを a とすれば

$$Q=-2\pi rav$$

Q が時間と共に變化し而もその量が與へられてゐない時は連續方程式は次の形になる。

$$\frac{dt}{2}\left|2\pi rav+2\pi ra\left(v+\frac{\partial v}{\partial t}dt\right)\right|=\frac{dt}{2}\left|2\pi(r+dr)a\left(v+\frac{\partial v}{\partial r}dr\right)+2\pi(v+dr)a\left\{v+\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial r}dr\right\}\right|$$

$$\therefore\quad \frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}=0 \quad 又は \quad vr=F(t) \quad \cdots\cdots(52)$$

即ち，$vr=-Q(t)/2\pi a$ であるが，この $Q(t)$ を與へるならばそれは一つの境界條件を與へた事になる。その時は

$$v=-\frac{Q(t)}{2\pi ra},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{Q'(t)}{2\pi ra}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial h}{\partial r}=\frac{1}{2\pi ra}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]$$

$$\therefore\quad h=\frac{\ln r}{2\pi}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]+C(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{l}$$

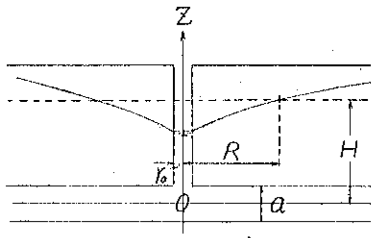
$C(t)$ は t の任意の函數であつて若し第2の條件として $r=r_0$ に於ける壓力水頭 $h_0(t)$ の形が與へられてゐるとすれば

$$h(r,t)-h_0(t)=\frac{\ln r}{2\pi}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]-\frac{\ln r_0}{2\pi}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}\left[\frac{Q\cdot t)}{k}+\frac{Q'(t)}{h}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{l}$$

然し實際には $h_0(t)$ を豫め知る事は不可能であるから，條件としては第 15 圖の樣に $t=0$ にては壓力水頭は全部一樣に H なりしものとし，井より $Q(t)$ の水を汲み上げたる爲にその周圍の水面が次第に低下したる場合を考へる。この時は

第 15 圖



$$Q(0)=0,\ Q'(0)=0,\quad C(0)=H \quad\cdots\cdots(55)$$

でなければならない。斯くの如く $Q(t)$ に或る條件を附する必要があるのは總ての量を $t=0$ に於ても連續函數として取扱ふ爲に起る缺點であつて，之はこの解法の適用範圍を若干狹くするものである。又 (53) 式の與へる壓力線の高さは $r\to\infty$ となれば無限大となるのであるから r が或る大さ處では (53) 式は成立しない。この極限を R とすれば之は $h=H$ の處であつて t の函數となる。卽ち r 對して

$$H-h(r,t)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R(t)}{r}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{l}$$

斯くの如く $r=r_0$ に於ける h の値か又はこの $R(t)$ の形の何れか一つが與へられゝば他の方が定まる。而關係を定める條件は掘拔井に於ては井内の水位が何等かの方法によつて一定に保たれるものとし，$r=r_0$ $h=h_0$ とするのが比較的よいと思ふ。

$$H-h_0=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R(t)}{r_0}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]$$

故に $R(t)$ の擴がる速度は

$$\frac{dR}{dt}=\frac{-2\pi r_0}{\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]^2}\left[\frac{dh_0}{dt}\left\{\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right\}+(H-h_0)\left\{\frac{Q'(t)}{k}+\frac{Q''(t)}{g}\right\}\right]$$

2. 自由水面のある場合

(1) 井 の 問 題

基本運動方程式は不滲透層が水平なる時は

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{v_s}{k}+\frac{\partial z}{\partial s}=0$$

この場合の自由水面の條件は

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{v_s}{k}+\frac{\partial h}{\partial s}=0,\quad 又は\quad \frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial v_s^2}{\partial t}+\frac{v_s^2}{k}+v_z=0 \quad\cdots\cdots(57)$$

次に連續方程式は井が不滲透層に達し湧出量 Q は一定ならざる時は滲透層の空隙率を λ として

$$2\pi r\int_0^h v_r dz-2\pi r(r+dr)\int_0^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}\left(v_r+\frac{\partial v_r}{\partial r}dr\right)dz=\lambda\cdot 2\pi r\frac{\partial h}{\partial t}dr$$

$$\therefore\quad -2\pi\int_0^h\left(v_r dr+r\frac{\partial v_r}{\partial r}dr\right)dz-2\pi r\int_h^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}v_r dz=\lambda\cdot 2\pi r\frac{\partial h}{\partial t}dr$$

$$\therefore\quad \lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\int_0^h\left(\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)dz+\frac{1}{dr}\int_h^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}v_r dz=0$$

之は近似的に次の樣に書く事が出來る。

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{r}\int_0^h v_r dz+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots(58)$$

之は井の問題に於ける連續方程式であつて一つの境界條件として井の湧出量 $Q(t)$ を與へれば $r=r_0$ にて

$$\left[-2\pi r\int_0^h v_r dz\right]_{r=r_0}=Q(t),\qquad \therefore\quad \left[\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}\right]_{r=r_0}=\frac{Q(t)}{2\pi r_0^2} \cdots\cdots(59)$$

運動方程式と (58) 及び (59) 式等より地下水流の狀態を求めるのであるが定流の場合と異り之等の基本式より直接計算する事は甚だ困難である。然し定流の場合に述べた樣に一般に行はれてゐる假定

$v_s \fallingdotseq v_r = v\ r, t)$

を用ひても dh/dr があまり大きくない時はその誤差は小さいものである。故に此處にも dh/dr の比較的小さい場合のみを取り扱ふものとして上の假定を用ふる。その時の基本式は

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{v}{k}=0 \cdots\cdots(60)$$

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{h}{r}v+h\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots(61)$$

自由水面にて $\quad \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{v}{k}+\dfrac{\partial h}{\partial r}=0$

$r=r_0$ にて $\quad \left[\lambda\dfrac{\partial h}{\partial t}+h\dfrac{\partial v}{\partial r}+v\dfrac{\partial h}{\partial r}\right]_{r=r_0}=\dfrac{Q(t)}{2\pi r_0}$

第 1 に簡單なる例題として自由水面の形を一定に保つ爲に必要な井の湧出量 $Q(t)$ の形を求める。この時は $\partial h/\partial t=0$ であり，v 及び h は z に無關係と假定してゐるから

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{k}=-\frac{\partial h}{\partial r} \cdots\cdots(62)$$

$$h\left(\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-v\frac{\partial h}{\partial r} \cdots\cdots(63)$$

h は r のみの函數であるから (62) 式の右邊も又 t に無關係とならねばならない。故にこの兩邊を t にて微分し之に

$v=F_1(r)+F_2(r,t)$

を代入すれば $\quad \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\partial F_2}{\partial t}$

故に F_2 は e^{at} の形の時間因數を有する。而て

$$a=-g/k$$

であるから v は次の形にて表はす事が出來る。

$$v=F_1(r)+F_2(r)e^{at}=F_1(r)+F_2(r)e^{-g/k}$$

之を (62) 式に代入すれば h は r のみの函數であるから

$$\frac{F_1}{k}=-\frac{dh}{dr} \qquad \therefore\quad F_1=-k\frac{dh}{dr}$$

$$\therefore\quad v=-k\frac{dh}{dr}+F_2(r)e^{at}, \qquad \therefore\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-k\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{dF_2}{dr}e^{at}$$

之等を (63) 式に代入すれば

$$\left[\frac{h}{r}F_2+h\frac{dF_2}{dr}+F_2\frac{dh}{dr}\right]e^{at}=k\left(\frac{dh}{dr}\right)^2+\frac{kh}{r}\cdot\frac{dh}{dr}+kh\frac{d^2h}{dr^2}$$

この式は t の如何に拘らず成立しなければならないのであるから

$$\frac{dF_2}{dr}+\frac{F_2}{h}\left(\frac{h}{r}+\frac{dh}{dr}\right)=0 \quad\cdots\cdots(64)$$

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{h}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2+\frac{1}{r}\cdot\frac{dh}{dr}=0 \quad\cdots\cdots(65)$$

この兩式が同時に成立する必要がある。(65) 式を解くには

$$\frac{\frac{d^2h}{dr^2}}{\frac{dh}{dr}}+\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}=0, \qquad \therefore\quad \frac{d}{dr}\left[\ln\left(\frac{dh}{dr}\right)\right]+\frac{d}{dr}(\ln h)+\frac{1}{r}=0$$

$$\therefore\quad \ln\left(\frac{dh}{dr}\right)+\ln h+\ln r=c_1'=\text{const.}$$

$$\therefore\quad \frac{dh}{dr}=\frac{c_1}{hr} \quad 又は \quad \frac{h^2}{2}=c_1\ln r+c_2 \quad\cdots\cdots(66)$$

二つの境界條件として $r=r_0$ にて $h=h_0$, $r=r_1$ にて $h=h_1$ を與へれば

$$\frac{h_0^2}{2}=c_1\ln r_0+c_2, \qquad \frac{h_1^2}{2}=c_1\ln r_1+c_2$$

$$\therefore\quad c_1=\frac{h_0^2-h_1^2}{2\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)}, \quad c_2=\frac{h_1^2\ln r_0-h_0^2\ln r_1}{2\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)}$$

此處に得たる h を (64) 式に代入すれば

$$\frac{dF_2}{dr}+F_2\left\{\frac{1}{r}+\frac{c_1}{2r(c_1\ln r+c_2)}\right\}=0, \quad \therefore\quad \ln F_2+\ln r+\int\frac{c_1dr}{2r(c_1\ln r+c_2)}=c_3'$$

$$\therefore\quad F_2r\sqrt{c_1\ln r+c_2}=c_3, \quad \therefore\quad F_2=\frac{\sqrt{2}\,c_3}{hr}$$

$$\therefore\quad v=-\frac{kc_1}{hr}+\frac{\sqrt{2}\,c_3}{hr}e^{at}, \quad 又は \quad v=\frac{-kc_1+\sqrt{2}\,c_3e^{at}}{r\sqrt{2(c_1\ln r+c_2)}} \quad\cdots\cdots(67)$$

常數 c_3 を決定するには $r=r_0$ にて $v=v_0$ と書けば

$$v_0=\frac{-kc_1+\sqrt{2}\,c_3e^{at}}{r_0\sqrt{2(c_1\ln r_0+c_2)}}$$

この時の井の湧出量は　$Q(t)=-2\pi r_0h_0v_0=2\pi(kc_1-\sqrt{2}\,c_3e^{at})$

c_3 は $t=0$ に於ける Q の量より決定される。卽ち

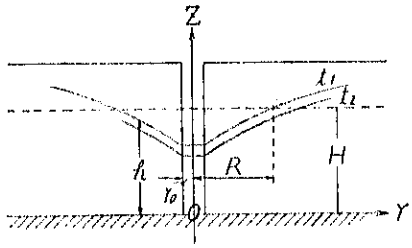
$$\sqrt{2}\,c_3 = kc_1 - \frac{Q(0)}{2\pi}$$

$$\therefore\quad Q(t) = 2\pi kc_1(1-e^{at}) + Q(0)e^{at} = \pi k(1-e^{at})\frac{h_0^2-h_1^2}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} + Q(0)e^{at} \quad\cdots\cdots(68)$$

之は h_0 と $Q(t)$ の關係を表はす式であつて r_1, h_1 の代りに或は R, H を用ひてもよい。この時 R は所謂影響圏 (influence circle) の半徑に當るものとなる。

次に一定の湧出量 Q を汲み上げる時の地下水面の變化に就ては次の樣に考へる。連續方程式は

第 16 圖



$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{h}{r}v + h\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial h}{\partial r} = 0$$

之に rdr を乘じて r_0 より ∞ まで積分すれば

$$\lambda\int_{r_0}^{\infty} r\frac{\partial h}{\partial t}\,dr + \int_{r_0}^{\infty}\frac{\partial(hrv)}{\partial r}\,dr = 0$$

旣に述べた樣に水平層上の井の問題に於ては地下水面の高さ h は $r\to\infty$ にて $h\to\infty$ であるから途中にて靜水面 $h=H$ と交る事となる。この交點を $r=R$ とすれば旣に述べたる關係は $r<R$ に於てのみ成立するのであつて $r>R$ に對しては別に解かねばならない。故に連續方程式は

$$\lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}\,dr + \int_{r_0}^{R(t)}\frac{\partial(hrv)}{\partial r}\,dr = 0 \quad\cdots\cdots(69)$$

運動方程式は $\quad \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{v}{k} = -\dfrac{\partial h}{\partial r} \quad$ 但し $\; r<R$

連續方程式 (69) を書き直はせば $r=r_0$ にて $Q=-2\pi r_0 h_0 v_0$ であるから

$$\lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}\,dr + [hrv]_{r=R(t)} + \frac{Q}{2\pi} = 0 \quad\cdots\cdots(70)$$

この第 1 項は $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ がほぼ一樣と假定すれば $\left|\lambda\dfrac{r^2}{2}\dfrac{dh_0}{dt}\right|_{r_0}^{R(t)}$ となるが第 2 項は $r>R$ の部分の値より定めねばならない。この部分にては $\dfrac{\partial h}{\partial r}=0$ であるが $v\dfrac{\partial v}{\partial r}$ を考へれば

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{v}{k} = 0$$

であつてその連續方程式は

$$\frac{\partial(Hrv)}{\partial r} = 0 \qquad 卽ち, \qquad \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v^2}{r} + \frac{g}{k}v = 0, \qquad 又は \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{r}\right) - \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{g}{k}\left(\frac{v}{r}\right) = 0$$

從つて之を積分すれば

$$\frac{k}{g}\ln\left(\frac{v-\frac{g}{k}r}{v}\right) = t + C_1(r) \qquad \therefore\quad v = \frac{g}{k}r\Big/\left[1 - C(r)e^{\frac{g}{k}t}\right]$$

更に之を上の連續方程式に代入すれば

$$2-Ce^{\frac{g}{k}t}+r\frac{dC}{dr}e^{-\frac{g}{k}t}=0$$

之が t の如何に拘らず成立する事は不可能であるから $r>R$ にては運動方程式と連續方程式が兩立しない。故に R が擴がり地下水面に勾配を生じて始めて流れが生ずるのであつて (70) 式中の $[hrv]_{r=R}$ は零と見做すべきである。

$$\therefore\quad \lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}dr+\frac{Q}{2\pi}=0$$

この兩邊を t にて微分すれば

$$\left[r\frac{\partial h}{\partial t}\right]_{r=R}\frac{dR}{dt}+\int_0^R r\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}dr=0 \quad\cdots\cdots(71)$$

之は dR/dt を與へる式であるが實際には $\partial h/\partial t$ 及び $\partial^2 h/\partial t^2$ を求める事が困難であるから時間的變化が小さい時は水面形を近似的に

$$\frac{Q}{\pi k}\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)=H^2-h_0^2,\qquad \therefore\quad R=r_0\exp\left\{\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}$$

を以はて表し之を次の近似式に代入する。

$$\lambda\left[\frac{r^2}{2}\cdot\frac{dh_0}{dt}\right]_{r_0}^{R(t)}+\frac{Q}{2\pi}=0,\qquad \therefore\quad \lambda\left\{r_0^2-R^2(t)\right\}\frac{dh_0}{dt}=\frac{Q}{\pi}$$

$$\therefore\quad \frac{dh_0}{dt}=\frac{Q}{\lambda\pi}\frac{1}{r_0^2\left[1-\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}\right]} \quad\cdots\cdots(72)$$

(72) 式は井の水面の低下する速度を表はす式であつて更に之を解けば

$$h_0+\frac{Q}{4\pi k h_0}\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t+C$$

最初の條件を $t=0$ にて $h_0=H$ とすれば

$$\frac{Q}{4\pi k}\left[\frac{1}{h_0}\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}-\frac{1}{H}\right]-(H-h_0)=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t \quad\cdots\cdots(73)$$

之を $R(t)=r_0\exp\left\{\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}$ に代入すれば各瞬間に於ける R の値を求める事が出來る。

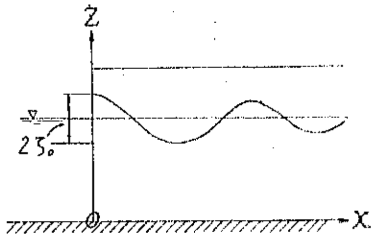
(2) 地下水面の振動

簡單の爲に先づ第17圖の如き2次元にて不滲透層は水平なる場合を考へる。$x<0$ の部分には水域がありその水面が

$$h_0=H+\zeta_0\sin\sigma t \quad\cdots\cdots(74)$$

の振動をなすものとする。この時の地下水面の形は x 方向に進む波形となる事は明かである。水面の昇降する週期が非常に遲いものとすれば地下水面の振動は波長の比較的大きい波となる。故に前と同じく一鉛直斷面内にて流速は一樣と假定すれば運動方程式は

第 17 圖



$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{k}+\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

水面水分子の靜水面よりの上昇を ζ とし各水分子の靜水時よりの平均水平變位を ξ とすれば $h=H+\zeta$, $v=\frac{\partial\xi}{\partial t}$ で

あるから　　$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$ ……………………(75)

連續方程式は長波の連續方程式を用ひれば空隙率 λ を用ひて

$$\lambda\zeta=-\frac{\partial}{\partial x}(\xi H) \quad\cdots\cdots(76)$$

この兩式より ξ 之を消去すれば　$\frac{H}{\lambda}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0$

境界條件より ζ は單弦運動 (simple harmonic motion) をなす事は明かであるから時間因數を $e^{i\sigma t}$ とし $\zeta(x,t)=\zeta_1(x)e^{i\sigma t}$ と置けば

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}+\frac{\lambda\sigma^2}{gH}\left(1-\frac{ig}{\sigma k}\right)\zeta_1=0$$

之は長波の基本式[1] であつて此處にて

$$\frac{\lambda\sigma^2}{g}\left(1-\frac{ig}{\sigma k}\right)=m^2=(m_1-im_2)^2,\qquad m_1,\ m_2\text{ は實數}$$

と置けば基本式は　　$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}+\frac{m^2}{H}\zeta_1=0$ ……………………(77)

(77) 式の一般解の中にて $+x$ の方向に進行する波は A を複素常數として

$$\zeta=A\exp\left\{-\frac{m_2}{\sqrt{H}}x-i\left(\frac{m_1}{\sqrt{H}}x-\sigma t\right)\right\},\qquad A=A_1+iA_2$$

之に (74) 式の境界條件を代入すれば

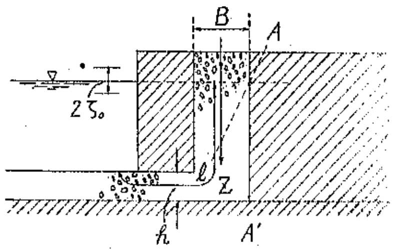
$$\zeta_0\sin\sigma t=[A_1\cos\sigma t-A_2\sin\sigma t+i(A_1\sin\sigma t+A_2\cos\sigma t)]$$

右邊は實部のみを取るのであるから之が t の如何に拘らず成立する爲には

$$\left.\begin{aligned}&A_1=0,\qquad A_2=-\zeta_0\\ \therefore\quad&\zeta=\zeta_0\exp\left(-\frac{m_2}{\sqrt{H}}x\right)\sin\left(\sigma t-\frac{m_1}{\sqrt{H}}x\right)\\ \text{但し}\quad&m_1=\sqrt{\frac{\lambda\sigma^2}{2g}+\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2\sigma^2}{g^2}+\frac{1}{k^2}}},\quad m_2=\sqrt{-\frac{\lambda\sigma^2}{2g}+\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2\sigma^2}{g^2}+\frac{1}{k^2}}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(78)[2]$$

從つて波の減衰率は $\exp\left(\frac{m_2}{\sqrt{H}}x\right)$ である。

第　18　圖



次に第 18 圖の樣な岸壁の裏込の中に於ける地下水面の振動を考へる。簡單の爲に裏込の幅 B を一定と假定したが一般の場合にも振幅があまり大きくない限り靜水面附近の幅を以て B と假定すれば結果には大差はない。圖の樣に流線の平均の長さを l, 壁體の下の透水層を厚さ h, 此處を通る流速を v とし，地下水面の位置は靜水面より下に $+z$ とする。この時海面は

$\zeta=\zeta_0\sin\sigma t$　(ζ は靜水面より下に (+) を取る)

にて振動するものとすれば地下水の運動方程式は

1) 土木學會誌第 19 卷第 9 號 “長波の變形に就て” p. 742

2) 九州帝國大學工學彙報 第 9 卷 第 1 號，安藏博士 “ 井水の水位に及ぼす潮汐の影響に就て ” の中に同じ結果が得られてゐた。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{z-\zeta}{l}-\frac{v}{k}\\ &\text{連續方程式は}\quad hv=-\lambda B\frac{dz}{dt}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(79)$$

(79) 式より v を消去すれば　$-\frac{1}{gh}B\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{z-\zeta}{\lambda l}+\frac{B}{kh}\cdot\frac{dz}{dt}$

故に $\frac{g}{k}=2m$, $\frac{gh}{\lambda Bl}=n^2$ と置けば

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2m\frac{dz}{dt}+n^2(z-\zeta)=0\cdots\cdots(80)$$

此處にて $z=C_1\cos\sigma t+C_2\sin\sigma t$ と置いて (80) 式に代入すれば

$$(-\sigma^2C_1+2m\sigma C_2+n^2C_1)\cos\sigma t+(-\sigma^2C_2-2m\sigma C_1+n^2C_2-n^2\zeta_0)\sin\sigma t=0$$

之が t の如何に拘らず成立する爲には

$$-\sigma^2C_1+2m\sigma C_2+n^2C_1=0,\qquad -\sigma^2C_2-2m\sigma C_1+n^2C_2-n^2\zeta_0=0$$

$$\therefore\quad C_1=-\frac{2mn^2\sigma\zeta_0}{4m^2\sigma^2+(\sigma^2-n^2)^2},\qquad C_2=-\frac{(\sigma^2-n^2)n^2\zeta_0}{4m^2\sigma^2+(\sigma^2-n^2)^2}$$

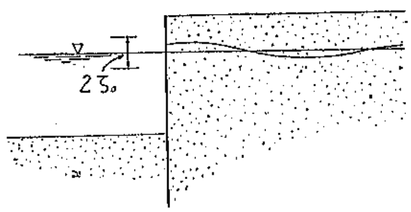
依つて裏込内の水面の運動は決定せられた。その振幅を $2\zeta_1$, 最高水位の時間の遅れを ε とすれば

$$z=\zeta_1\sin\sigma(t-\varepsilon)$$

であるから之を上に得たる解と比較すれば

$$\zeta_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=n^2\zeta_0=\frac{gh}{\lambda Bl}\zeta_0,\qquad \varepsilon=\frac{1}{\sigma}\tan^{-1}\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)=\frac{1}{\sigma}\tan^{-1}\left\{\frac{2m\sigma}{n^2-\sigma^2}\right\}$$

第　19　圖



矢板の後方の様に滲透層が廣く延びてゐる時は之と同じ方法によつて解く事は出來ないのであつて，上の二つの場合の組み合せの様な狀態になるものと考へられるがその解は簡單には求められない。

結　　言

最後に再び本文の概要を述べれば，自由水面なき地下水流に對してはポテンシァル流として出來得る限り精密なる解を得るに努め，自由水面のある地下水流に對しては從來用ひられた等ポテンシァル面を鉛直面とする假定を除いて理論の誤差を減少せしめんと試みた。

之より得たる結果の一つとして屢〻述べた樣に水平不滲透層上にある無限に廣い含水層中に井を穿ち，之より一定の水量を汲み上げる時は水流は定流狀態に達し得ない事を說いた。之は旣に類似の考へも發表されて居り又實際問題としてはかゝる狀態にある井を作る事が旣に不可能なのであるから定流不定流の問題は直接に大なる影響を有するものではないが，地下水流の根本的性質を知る爲には檢討しておく必要がある。著者は斯かる立場より上述の如き井の理論を導いたのであるから從來の定流と假定する理論を否定し樣とするのではなく，之に對する修正を試みんとしてゐるのである。

自由水面のある地下水流の理論に關して著者の用ひた方法即ち連續方程式を r 又は x にて微分して未知項を地下水面に於ける値と補正項の和の形とし，前者には運動方程式より求めたる値を代入し後者には近似値を代入する方法の精度を知るには，何等かの方法によつてこの補正項の形を檢討しなければならない。