論 説 報 告

第21卷第7號 昭和10年7月

應用力學

彈性變位と固體摩擦

會員 工學士 前 橋 俊 一*

Elastic Displacement and Solid Friction

By Toshikazu Maebashi, E. E., Member.

內 容 梗 概

彈性體の接觸部に生ずる彈性變位の計算に就ては，既に Heinrich Hertz 氏に依つて與へられたことは餘りにも有名であるが，著者は氏の假定と異つた見解から其の解法を試みた。而して單なる彈性變位の計算だけであれば，折角今迄行はれた氏の假定を非とする程の必要はないが，少くとも著者の見解を是とするならば，例へば軌條と車輪の接觸部に於けるが如き，多少面倒と考へられる形の接觸に就て，容易に其の彈性變位の近似解が得られるし，又從來單なる實驗法則に過ぎなかつた固體摩擦の法則も說明出來るのである。

目 次

第 1 章 緒 論

1. 緒 言

固體間の摩擦に就ては，“摩擦力は重量に正比例し，接觸面の廣狹に關係することなし。„と云ふ，Amc 氏の法則がある。但し其れが何故然るやと云ふことに就ては，今まで釋然たる說明が施されて居ない様であ 此點に關して些か彈性力學上より解說を試みやうとするのである。即ち，接觸面の彈性變位を與ふる原因は に其摩擦力に變化を與ふる原因であることを示し，摩擦運動ある所必ず磨耗あるべきことを明かにし，併 止摩擦係數と運動摩擦係數の關係を說くのである。

要するに摩擦に關する概念が極めて曖昧であることは，一面種々な磨耗現象などを說明するにも甚だ不便 故，此意味からも摩擦の正體を或る程度はつきりさせて置く必要があると思ふ。併せて著者の彈性變位の計算 を紹介することも，亦本論文發表の一目的である。

* 京濱電氣工業株式會社監査役，前橋工學研究所長

2. 摩擦力及び摩擦係數

2 物體が相接觸して，其の接觸點に於ける切線方向に相對的運動を起す場合，一般に其運動を阻止せんとする抵抗力が，接觸部位に現はれるものである。之を摩擦力と名付け，其の大きさは，接觸點に加はる垂直壓力に關するものと考へられてゐる。

兩物體が相接觸して，接觸面に沿ふて相對的運動を爲す場合の摩擦力を F' とし，其の時加へられたる垂直壓力を W とすれば，

$$F'/W=a' \quad \cdots\cdots(1)$$

に依つて與へられる a' を運動摩擦係數と定義する。

次に兩物體が相接觸したまゝ，未だ何等の相對的運動を起さぬ時，即ち靜止狀態にある場合の摩擦力の大きさを F とし，其の時加へられたる垂直壓力を W とすれば，F/W は常に一定の値 a より小さなものである。

$$F/W<a \quad \cdots\cdots(2)$$

此摩擦力 F は，靜止の狀態より運動の狀態に移らんとする時，最大の値を持つものであつて，特に其を最大靜止摩擦力と呼ぶ。今これを F_m で表はせば，

$$F_m/W=a \quad \cdots\cdots(3)$$

となり，此場合の a を靜止摩擦係數と定義する。

實驗に依れば，靜止摩擦係數 a は，運動摩擦係數 a' より大であるが，其の何故であるかは，今まではつきりとした說明が下されては居ない。

惟ふに抑も摩擦力，或は摩擦係數の問題は，舊くから論議されて居ることであるにも拘らず，其の實驗が案外困難であつて，何時でも定まつた實驗結果を得ることが出來ないため，理論の研究が妨げられて居た形であつた。それは要するに，固體の表面そのものゝ狀況を一定にすることが出來ないためと，試品の表面に吸着して居る異物，主として有機性の物質が除き難く，且つ，それを一定の狀況に保ち難いと云ふことが，大きな障礙を爲して居るのであつて，從つて現今尙ほ此問題に就ては，首肯するに足る理論に到達して居ないことは遺憾である。

先づ第2章に於て，摩擦に關して從來行はれたる學說を簡單に述べ，第3章以下に於て順次著者の主張を記述する。普通固體と云はれるものは，鐵でも木でも石でも何れも力學上での所謂剛體と云ふものではなく，其の彈性限度内に於て取扱はれる場合，凡て一種の彈性體と考へられるものであるから，接觸點に於ける彈性變位を計算して，其れが摩擦力と如何なる關係を持つべきものであるかを論ずる。

第2章 摩擦に關して從來行はれたる學說

1. Amontons 氏說

抑も，固體間の摩擦に就ては，1699年 Amontons 氏が，"摩擦力は重量に正比例し，接觸面の廣狹に關係することなし。" と云ふ法則を發見し，後 Coulomb 氏が之を解釋して，"若し摩擦力が分子的のものであれば，接觸面積の廣狹に依つて，甚だしく異るべき筈であるが，實際接觸面積の廣狹に關係のない所を見れば，固體の表面は，假令美しく磨かれてあつても，其の實それは細かい鋸齒狀を呈して居て，それが喰ひ合つて居るので，重量が增せば喰ひ合ひの度が深くなつて，摩擦抵抗が增加するのである。" と云つた。

此 Coulomb 氏の解釋は、永く一般に信ぜられて來たものであつて、1880年 C. B. Dudley 氏の如きは、軌條に起る磨耗を，此固體表面の精粗なる概念に根據を置いて，說明して居る。(1) 曰く，"物體の表面は，絕體に滑ら

(1) American Institution of Mining Engineers, 1880.

かに出來ても居なければ，又出來るものでもない。最も滑らかな表面と雖も，必ず起伏高低 (elevations and depressions) のあるものであつて，それは極めて微細な，又全く測定することの出來ないものであるが，兎に角高低が出來て居る。それが觸感されるならば，表面は粗なりと云ひ，それが極めて微細であるならば，滑らかであると唱へるのである。此考へ方が正しいものとすれば，車輪が軌條に載つて居る時は，相互の表面の高低が，喰ひ合つて居なければならない。若し双方の表面が，絶對に滑らかであれば，摩擦抵抗は無い故，機關車に於ける牽引力は出ない筈である。即ち粘着力は表面の微細なる歯棒小歯輪 (rack and pinion) の作用と考へられる。磨耗は此微細なる歯を捥ぎ去るに依つて起るものである。” と。

即ち，Dudley 氏は，Coulomb 氏の鋸歯狀說を是として，それに依つて，車輪と軌條との間の粘着力と摩耗の問題の解釋を試みたのであるが，斯樣な概念は今日でも尙ほ行はれて居る。例へば，機械學會誌所載の荒木宏及び齋藤省三兩氏の論文“鐵道軌條と外輪との相互磨耗に關する試驗”[1] に於ても，“2つの物質が接觸して磨耗を起すことは，其の接觸面に肉眼では平滑と見えて居ても，無數の顯微鏡的突起物がある。即ち歯車の歯の如くなつて居る。此歯が脫落することが磨耗であると考へるのである。此歯の如き突起物が回轉に依る接觸でも，滑りによる接觸でも，2つの面が或る壓力の下に接觸するならば，何れか一方又は兩方が折れて缺けることになる。是が磨耗である，云々。” と說明されてある。

然し Rayleigh 卿の研究に依れば，“良く磨いた固體の表面は，分子的に見ても想像した程，鋸歯狀を呈して居るものではなく，流體の自由表面と甚だしく差のあるものではない。” と云ふことが明かになり，其の後 Beilby氏の有名なる研磨の實驗も，結局 Rayleigh 卿の云ふ通りであることを示して居るのであるから，果して Coulomb 氏の說くが如く，固體の摩擦は表面の鋸歯狀性に依るものであるとは，斷ずることが出來ないのである。

2. Hardy 氏の實驗

1922 年，W. B Hardy 氏は，摩擦の本性を確かめるため，多くの實驗を行つて居る。[2] 摩擦係數を測定するには，平面上に球面體を載せ，それを滑らせるに要する重量を測定する普通の方法に依つた。普通に綺麗であると思はれて居る表面も，大抵の場合何等か有機脂肪類の薄膜を以て，覆はれて居るものであるから，試驗に用ふる平面と球面とは，之を充分に磨いて，其の表面を化學的の方法で清淨にし，實驗裝置は密閉せる容器内に收め，其の内には塵埃濕氣等の含まれて居ない清淨な乾燥した空氣を充たし，滑動を始める重量を極めて注意して測定したのである。試品は硝子，鋼鐵，蒼鉛の3種で，重クロム酸加里と硫酸の混合液を以て煮，特別に純粹にした酒精で洗ふとか，石鹸で洗ふとかして，最後に清水で良く洗つて，水が試品の表面を一樣に濡らす樣になつてから，充分に乾燥して，實驗に供したと云ふ風な深甚の注意が拂はれた。而して球面試品に加はる重量を，20~60 g 位の範圍に於て變化させ，種々なる曲率を用ひ，種々なる減摩劑を與へたる條件にて實驗したる結果，一定の減摩劑の條件に於ては，常に 1% 以下の誤差を以て，Amontons 氏の法則の正しいことを確め得たのであつた。

T. E. Stanton 氏は，“固體の接觸面に於ける分子及び質量作用 (molecular and molar actions) に關する吾人の智識は，尙ほ不充分であるから，表面作用の本質は明かでない。所謂固體摩擦の法則なるものは全く實驗的のものに過ぎないのである。”[3] と說いて居るが，實際何故然るやの理由も明かでなく，又摩擦係數の測定に就ても前述の通り表面の清汚，又は濕氣の有無等に依つて，甚だしく誤差の生じ易いものであつて，摩擦の法則は少くと

(1) 機械學會誌，昭和5年3月，第33卷，第155號
(2) W. B. Hardy and Ida Doubleday, Proc. Roy. Soc., A. 100 (1922), p. 550.
(3) T. E. Stanton 氏著 “Friction,” 1923, p. 137.

も現在の所，全く實驗的であると同時に，近似的のものであると云ふことになつて居るが，充分なる注意の下に行はれた Harby 氏の實驗結果に依つても明かなる通り，Amontons 氏の摩擦力の法則は可なり精確なるものとされて居る。

第 3 章 彈性體の接觸點に於ける彈性變位

1. 彈性變位

摩擦に關して從來行はれたる學說の概要は上說の通りであるが，以下些か著者の見解を述べて見度いと思ふ。それには先づ彈性體の接觸點に於ける彈性變位なるものに就て研究して見る必要があるから，それから始める。

彈性體の接觸點に於ける彈性變位の數理的解釋は，1895 年 Heinrich Hertz 氏に依つて試みられた。(1) 氏は接觸點に於ける壓力分布の狀況を楕圓形體であると假定して，近似的に彈性變位を計算したのであるが，著者は其と異つた見地から彈性變位を計算して見た。兩者を比較する意味から，先づ本章に於て Hertz 氏の理論を述べ，次に第 4 章に於て，それと比較して著者の見地を示すことにする。

2. 基本方程式

今 $z=0$ の平面を限界として，z 正の側に無限の擴がりを持つた均質の彈性體を考へ，其の剪斷彈性係數を μ，ポアソン比を σ とする。$z=0$ 平面上の一點 (x',y') に於て，其の平面に垂直に單位面積當り p なる負荷を加へた時，平面上の他の一點 (x,y) に於て生ずる z 方向の變位 dw は，Laplace's Equation の解として，

$$dw=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \quad\cdots\cdots(4)$$

で與へられる。之を負荷 $pdx'dy'$ の分布全體に渉つて積分したものが (x,y) に於ける實變位である。卽ち，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\int\int\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \quad\cdots\cdots(5)$$

之は Kelvin 卿に依つて導かれた彈性體面の變位に關する周知の方程式である。(2)

上式に依れば負荷分布 p が與へられるならば，彈性體面上の任意の點に於ける垂直變位 w は，計算出來る譯であるけれども，實際上彈性體面に加へられる負荷は，必ず或る形を持つた彈性體に依つて與へられるものであつて，其の兩彈性體の形狀及び彈性は假令既知であつても，それを以つて相手方の彈性體面を壓迫する時，接觸部に於ける負荷分布の狀態は，兩彈性體の原形とは全く異つたものとなり，嚴密なる意味に於いて吾人の知り得るものは負荷の總量だけであつて，それが如何に接觸部に分布されて居るかは，現在の智識を以てしては知る由もないのである。卽ち，本來ならば接觸部に於ける負荷分布は，相接觸したる後の兩彈性體の接觸部の形狀と，負荷の大さに依つて與へらるべきであるが，其の數理的關係は簡單でない故，與へられたる負荷に依つて生ずる變位を計算するに，相接觸する彈性體の形を觀察し，壓迫に於ける尤もらしき負荷分布を推定し，其の推定に依る負荷分布が壓迫の平衡狀態に於て，接觸部に現はれ存在するものと假定して，接觸面に起る彈性變位を計算する方法が普通行はれるのである。

玆に注意すべきことは上の基礎方程式が，下方及び周圍に無限の擴がりを持つた彈性體の平面上に生ずる彈性變位に對するものであることである。然し實際上其の平面の擴がりが無限でなく，或る限られた大さのものであつて

(1) "Gesammelte Werke von Heinrich Hertz," Bd. I, 1895.

(2) Sir W. Thomson 氏："Mathematical & Physical Papers," Vol. I, p. 97.

或は A. E. Love 氏著 "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 1927, p. 193.

も，又平面でなく或る曲面をなして居ても，其處に生ずる最大垂直變位が接觸面積の半徑に較べて小さく，且つ接觸面積の半徑が接觸せしめんとする部位に於ける兩彈性體の曲率半徑に較べて小さい場合，可なり精密に適用されるものと考へられるのである。[1]

3. Hertz 氏の理論

Hertz 氏に依つて試みられた負荷分布の推定は，大略次の通りである。[2]

接觸すべき部分の附近の形は，夫々極めて近似的に次の式で表はすことが出來る。

$$z_1=A_1x^2+B_1y^2+2H_1xy \quad\cdots\cdots(6)$$

$$z_2=A_2x^2+B_2y^2+2H_2xy \quad\cdots\cdots(7)$$

玆に z_1 及び z_2 の座標軸は，接觸點に於て垂直に各彈性體の內方に向つて定められたものとする。未だ壓迫の加へられぬ場合を想像し，兩彈性體は x, y の原點に於て相接して居るものとし，原點を通じて共通の切面を作り，其の切面に垂直なる兩彈性體面間の距離を求むれば，(6) 及び (7) 式より；

$$z=z_1+z_2=(A_1+A_2)x^2+(B_1+B_2)y^2+2(H_1+H_2)xy \quad\cdots\cdots(8)$$

之は云ふまでもなく，兩彈性體面の接觸原點に於ける relative indicatrix である。z の値は軸 (x, y) の取り方の如何に拘らず，正でなくてはならない。今 $H_1+H_2=0$ となる樣に，x, y の方向を定めることにする。此場合も勿論，A_1+A_2 及び B_1+B_2 は何れも正である。之等の和を夫々 A 及び B とすれば上式は，

$$z=Ax^2+By^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

次の兩彈性體に壓迫を加へる時は，接觸部に於て夫々變位を生ずる。甲彈性體面上の一點 (x_1, y_1, z_1) と乙彈性體面上の一點 (x_2, y_2, z_2) とが相接觸するものと考へ，甲彈性體に於ける其の變位を軸 (x, y, z_1) に就て u_1, v_1, w_1 とし，乙彈性體に於ける其の點の變位を軸 (x, y, z_2) に就て $u_2, v_2\ w_2$ とすれば，次の關係が成立つ。

$$x_1+u_1=x_2+u_2 \quad\cdots\cdots(10)$$

$$y_1+v_1=y_2+v_2 \quad\cdots\cdots(11)$$

$$z_1+w_1=w_0-(z_2+w_2) \quad\cdots\cdots(12)$$

玆に w_0 は原點に於ける w_1+w_2 の値である。(12) 式を書き直し (6) 及び (7) 式に依つて示された z_1 及び z_2 の値を，代入すれば，

$$\begin{aligned} w_1+w_2&=w_0-z_1-z_2=w_0-(A_1x_1^2+B_1y_1^2+2H_1x_1y_1+A_2x_2^2+B_2y_2^2+2H_2x_2y_2)\\ &=w_0-Ax_1^2-By_1^2-[A_2(x_1+x_2)(u_1-u_2)+B_2(y_1+y_2)(v_1-v_2)\\ &\quad+2H_2\{x_1(v_1-v_2)+y_1(u_1-u_2)+(u_1-u_2)(v_1-v_2)\}] \quad\cdots\cdots(13) \end{aligned}$$

若し兩彈性體が略同質のものと假定すれば，$x_1 \doteqdot x_2$, $y_1 \doteqdot y_2$ の時，$u_1 \doteqdot u_2$, $v_1 \doteqdot v_2$ と考へてよいから，上式は近似的に，

$$w_1+w_2=w_0-Ax^2-By^2 \quad\cdots\cdots(14)$$

の形になる。之は接觸を生じた範圍內のものであつて，其の範圍外では互に離れて居るのであるから，

$$w_1+w_2>w_0-Ax^2-By^2 \quad\cdots\cdots(15)$$

の關係がなければならない。

扨て甲乙兩彈性體に對して，剪斷彈性係數及びポアソン比を夫々 μ_1, μ_2 及び σ_1, σ_2 とし，接觸面に於ける壓力

(1) John Prescott 氏著 "Applied Elasticity," 1924, p. 630,

(2) "Gesammelte Werke von Heinrich Hertz," Bd. I, 1895 p. 155.

分布を單位面積當り p とすれば，夫々の垂直變位 w_1 及び w_2 は (5) 式に依つて，

$$w_1=\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}\iint\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \quad\cdots\cdots(16)$$

$$w_2=\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\iint\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \quad\cdots\cdots(17)$$

故に，上の2式の和を取つて書き直せば，

$$\iint\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}=\frac{w_1+w_2}{\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}} \quad\cdots\cdots(18)$$

從つて，(14) 式に依つて上式の右邊は，$=\dfrac{w_0-Ax^2-By^2}{\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}}$ ……(19)

之に依つて $\iint\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$ は x, y の2次函數であることが窺はれる。斯樣な考へ方から，Hertz 氏は，"接觸部に於ける負荷分布の狀態は楕圓形體を爲すものである。" と推定し，其の解を求めて行つたのである。

先に述べたる通り，何れ何等かの假定を設けなければならぬとすれば，斯樣な考へ方で兩彈性體間の變位を解いて行くことは強ち不都合ではない。卽ち Hertz 氏に依れば，楕圓體の方程式を，

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1 \quad\cdots\cdots(20)$$

とすれば，楕圓體の體積は $\frac{4}{3}\pi abc$ であるから，全負荷 W は楕圓體の密度を ρ とすれば

$$W=\frac{4}{3}\pi ab(c\rho) \quad\cdots\cdots(21)$$

である。之は楕圓形接觸面内に c は無限に小さく，ρ は無限に大きく，結局 $c\rho$ が有限である樣な負荷分布があると思へばよい。

(x', y') に於ける單位面積當りの負荷 p は，

$$p=2(c\rho)\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}}=\frac{3W}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} \quad\cdots\cdots(22)$$

卽ち接觸せる範圍内に於ては，

$$\iint\frac{pdx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}=\frac{3}{4}W\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\psi}-\frac{y^2}{b^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{1/2}} \quad\cdots\cdots(23)$$

然るに之は (19) 式より，$=\dfrac{w_0-Ax^2-By^2}{\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}}$ ……(24)

であるから，之が x, y の凡ゆる値を滿足する條件を求めて，

$$w_0=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{1/2}} \quad\cdots\cdots(25)$$

$$A=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)^3(b^2+\psi)\psi\}^{1/2}} \quad\cdots\cdots(26)$$

$$B=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)^3\psi\}^{1/2}} \quad\cdots\cdots(27)$$

の 3 式が得られる。最後の 2 式から a 及び b が決定せられ，それ等の値を (25) 式に挿入して w_0 の値を知り，從つて (14) 式に依つて變位 w_1+w_2 が得られると云ふのである。

此 Hertz 氏の解法を球面と平面又は球面相互の場合に適用して計算すれば次の様になる。

之等の場合は接觸面の形は明かに原點に付て對稱であつて，$a=b$ であるから (25),(26) 及び (27) 式は夫々次に示す通りの形になる。

$$w_0=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{d\psi}{(a^2+\psi)\psi^{1/2}}\quad\cdots\cdots(28)$$

$$A=B=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{d\psi}{(a^2+\psi)^2\psi^{1/2}}\quad\cdots\cdots(29)$$

今 $\psi=(a\varphi)^2$ と置けば，(28) 式は，

$$w_0=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{2d\varphi}{a(1+\varphi^2)}=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\left|\frac{2}{a}\arctan\varphi\right|_0^\infty$$

$$=\frac{3}{4}\pi\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\frac{W}{a}\quad\cdots\cdots(30)$$

又 (29) 式は

$$A=B=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\int_0^\infty\frac{2d\varphi}{a^3(1+\varphi^2)^2}$$

$$=\frac{3}{4}W\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\left|\frac{2}{a^3}\left\{\frac{1}{2}\arctan\varphi+\frac{\varphi}{2(1+\varphi^2)}\right\}\right|_0^\infty$$

$$=\frac{3}{8}\pi\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\frac{W}{a^3}\quad\cdots\cdots(31)$$

然るに，兩彈性體の接觸部に於ける半徑を夫々 R_1 及び R_2 とすれば，それ等の半徑に比して接觸面積が甚だ小さい故，

$$2(A+B)\doteqdot 1/R_1+1/R_2\quad\cdots\cdots(32)$$

と考へることが出來るから，

$$\frac{3}{2}\pi\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu^2}\right)\frac{W}{a^3}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\quad\cdots\cdots(33)$$

卽ち Hertz 氏の假定が正しいものとすれば，球面と平面又は球面相互の接觸に於て生ずる接觸面の半徑は，加へられたる壓力の 3 乘根に正比例すると云ふことになるのであるが，實際氏は其の理論を確めるため種々なる實驗を行つた結果，極めて精密に其の通りであつたと述べて居る。

Hertz 氏の彈性體接觸部に起る彈性變位の計算に關する上述の假定は，一般の等しく是認する所であつて，其の解法の巧妙なる實に讃嘆に値するものである。

然し之だけでは，彈性變位が摩擦力と如何なる關係を持つものであるかは解らない。そこで著者は，次に Hertz 氏とは全く異つた考へ方で，彈性體の接觸點に於ける彈性變位を計算して見ることゝする。

第4章 摩擦の理論

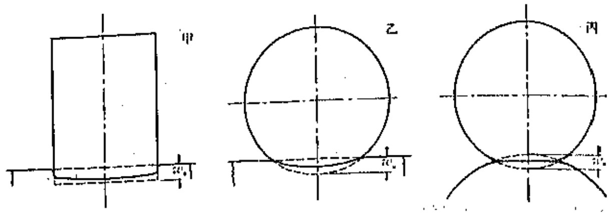
1. 彈性變位に關する著者の見解

次に彈性體の接觸點に於ける彈性變位の計算に對する，著者の見解を述べることにする。

今 2 つの彈性體を互に接觸せしめ壓力を加ふる時は，其の接觸點に於ては當然或る歪が起る。其の歪の起る狀態は，接觸部分の形に依つて相違があるけれども，比較的簡單な形のものに就て見れば，それは第 1 圖に示すが如きものであつて，(甲) は平面上に圓壔體を其の軸を垂直にして，其の端面を以て直立せしめたものを側方から見たるもの，(乙) は平面上に球面體を接觸せしめたるもの，(或は平面上に圓壔體を其の軸を平面に平行せしめる

様に載せ，それを軸方向から見たるものと解するもよい），（丙）は球面體相互の接觸，（或は軸を平行とせる圓筒體相互の接觸も之と同様の姿である）を示す。

第 1 圖



圖中破線は歪の起らぬ以前の，所謂原の形を示すものであるが，それが壓力を加へられゝば歪が起つて實線に示す様になつたと考へる。破線に包圍されたる部分は原形から思へば，兩彈性體が恰も立體交叉を爲すかの如く考へられる部分であつて，兩彈性體が壓迫されて圖に示すが如き位置にあると云ふことは，畢竟破線に包圍されたる空間を兩彈性體が同時に占據することが出來ぬため，其の接觸面に競合の壓力を生じ，それに依つて，夫々歪が起されて居るものと考へてよい。其の競合の壓力こそは，外から兩彈性體に加へられた壓迫力に相當するものであることは云ふまでもない。故に破線に包圍されたる部分に，兩彈性體の何れにもせよ，當初より其の實體を缺いで居たならば，明かに圖に示すが如き近接したる位置に於ても，兩彈性體は前述の如く同一空間に就て競合ふ如きことはなく，從つて其處には何等の壓力も發生することはないのである。要するに破線に包圍されたる部分に實體を挿入することが，兩彈性體間に壓力の發生する根源であると考へることが出來る。即ち玆に假定を設けて，“兩彈性體が接觸壓迫せられた時，其の原形から考へて，恰も立體交叉を爲すが如く考へられる部分に相當する形の壓力分布が存在する„ものとする。これが著者の考へ方である。

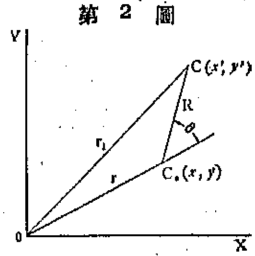
2. 彈性變位の計算

彈性體面上の1點 (x', y') に於ける壓力を單位面積に付き p とすれば，其の點より R の距離にある面上の，他の1點 (x, y) に於ける垂直變位 dw は (4) 式に依つて，

$$dw=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\frac{p\,dx'dy'}{R} \qquad \cdots\cdots (34)$$

で表はされる。R は勿論 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ を意味するものである。第 2 圖を參照して極座標 R, θ を以て表はせば，上式は

第 2 圖



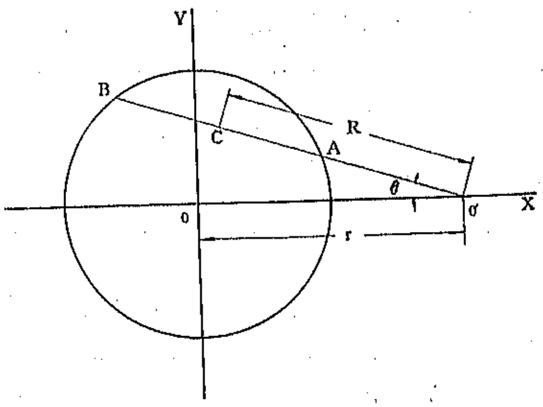
$$dw=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\,p\,dR\,d\theta \qquad \cdots\cdots (35)$$

となる。先づ簡單なるものから始めて，

(1) 彈性體の平面上に，O を中心とする半徑 a なる圓壔體が，軸を垂直にして其の端面で置かれた場合

負荷の範圍は明かに半徑 a なる圓形であつて，圓外の 1 點 O′ に於ける變位 w は，次の如くにして計算される。

第 3 圖



第 3 圖は負荷の平面圖であつて，座標原點 O を負荷の中心に取つてある。負荷の形は中心 O に就て對稱であるから，O′ を X 線上に取り，OO′ の距離を r とし，O′ 點から負荷の外圍を示す圓に交る樣の直線 O′AB を引き，圓周との交點を A 及び B と

する。$\angle OO'A$ を θ とし，AB 線上圓内に於ける任意の1點 C と O′ との距離を R とすれば，C 點に加はる壓力に依つて生ずる O′ 點に於ける變位 dw は，(35) 式に示す通りの形のものである。

玆に p は C 點に於ける單位面積當りの壓力を意味するものであるが，前述の所謂空間交叉の姿から想像して，此 p の値は接觸面全面を通じて一定であると假定する。上の微變位を壓力の存在する圓内全體に渉つて積分したものが O′ 點に於ける求むる變位である。即ち

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\iint dR\,d\theta \quad\cdots\cdots(36)$$

先づ R に就て積分する。積分の範圍は圓内 AB 間であつて，$\overline{O'A}=R_1$，$\overline{O'B}=R_2$ とすれば，(36) 式は，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int(R_2-R_1)d\theta \quad\cdots\cdots(37)$$

となる。然るに A の座標を x_1, y_1 とし，B の座標を x_2, y_2 とすれば，$x_1^2+y_1^2=a^2$，$x_2^2+y_2^2=a^2$，$R_1\cos\theta=r-x_1$，$R_2\cos\theta=r-x_2$，$R_1\sin\theta=y_1$，$R_2\sin\theta=y_2$ の關係がある。是等から x_1, x_2, y_1, y_2 を消去して R_2-R_1 の値を求むれば，

$$R_2-R_1=2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta} \quad\cdots\cdots(38)$$

之を (37) 式に代入すれば，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int 2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad\cdots\cdots(39)$$

となる。次に θ の積分範圍を 0 から $\arcsin\frac{a}{r}$ とすれば，

$$w=4\times\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int_0^{\arcsin\frac{a}{r}}\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad\cdots\cdots(40)$$

玆に於て $a\sin\phi=r\sin\theta$ と置けば，上式は，

$$w=4\times\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\frac{a^2}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\phi}}d\phi \quad\cdots\cdots(41)$$

之を 2 項定理を以て展開して積分すれば，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi p\frac{a^2}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{a^4}{r^4}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1.3\cdots\cdots 2n-1}{2.4\cdots\cdots 2n}\right)^2\frac{a^{2n}}{r^{2n}}+\cdots\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(42)$$

之が求むる所の圓外の1點 O′ に於ける變位である。今

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\phi}\,d\phi \quad\cdots\cdots(43)$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\phi}} \quad\cdots\cdots(44)$$

と置けば，(41) 式は次の如くも書き直される。

$$w=4\times\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\frac{a^2}{r}\left\{K-\frac{r^2}{a^2}(K-E)\right\} \quad\cdots\cdots(45)$$

次に圓壔體に加はる全負荷を W とすれば

$$W=\pi a^2 p \quad\cdots\cdots(46)$$

であるから p は既知で，又 E 及び K の値は elliptic integral の表[1]から得られる故，(45) 式に依つて變位 w が判る。若し r が a に較べて充分大であるならば，(42) 式に於て { } 内の $\dfrac{a^2}{r^2}$ 以上の高次項を無視して，

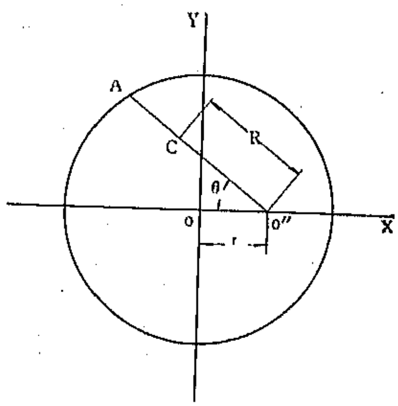
$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi p\frac{a^2}{r}=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{W}{r} \quad\cdots\cdots(47)$$

即ち，此場合負荷は點負荷同然の意味になる。

次に圓内の1點 O″ に於ける變位 w も亦，同樣にして計算することが出來るのである。

第 4 圖に於て OO″ の距離を r とし，O″ 點から任意の直線 O″A を引き負荷の外周を示す圓との交點を A とする。∠OO″A を θ とし，O″A 線上 O″, A 間の任意の1點 C と O″ との距離を R とすれば，C 點に加はる壓力に依つて生ずる O″ 點に於ける變位 dw は，(35) 式に依つて與へられるを以て，それを圓内全面に渉つて積分すればよいのである。即ち，

第 4 圖



$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\iint p\,dR\,d\theta \quad\cdots\cdots(48)$$

然るに壓力 p は圓内到る所一定であると云ふ假定に依つて積分符の外に出し，先づ R に就て O″ から A まで積分すれば，(48) 式は，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int R\,d\theta \quad\cdots\cdots(49)$$

となる。玆に R は O″A の距離であつて，A の座標を x, y とすれば $x^2+y^2=a^2$，$R\sin\theta=y$，$R\cos\theta=r-x$ の關係があるから，之等から x, y を消去して R の式が得られる。

$$R=r\cos\theta+\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta} \quad\cdots\cdots(50)$$

之を (49) 式に挿入し，θ に就ての積分の範圍を 0 から 2π とすれば，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int_0^{2\pi}(r\cos\theta+\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta})d\theta \quad\cdots\cdots(51)$$

$$=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}p\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}pa\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}\sin^2\theta}\,d\theta \quad\cdots\cdots(52)$$

今
$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}\sin^2\theta}\,d\theta \quad\cdots\cdots(53)$$

と置けば，(52) 式は，$w=4\times\dfrac{1-\sigma}{2\pi\mu}paE$ $\cdots\cdots(54)$

或は 2 項定理で展開して積分した形で表はせば，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi pa\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{a^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{a^4}-\cdots\cdots\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3.\cdots\cdot 2n-1}{2.4.\cdots\cdot 2n}\right)^2\frac{r^{2n}}{a^{2n}}-\cdots\cdots\right\} \quad\cdots\cdots(55)$$

之が圓内の任意の點 O″ に於ける變位である。$r=0$ 即ち圓心に於ては，

$$w_{r=0}=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi pa=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{2W}{a} \quad\cdots\cdots(56)$$

[1] 例へば Alexander Russell 氏著 "A Treatise on the Theory of Alternating Currents", 1914, Vol. 1. p. 117 等にもある。

$r=a$ 卽ち周邊に於ては (55) 式の $\{\ \}$ 內は $\frac{2}{\pi}$ であるから，

$$\underset{r=a}{w} = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 4pa = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{4W}{\pi a} \quad\cdots\cdots(57)$$

其の他加壓圈內の任意の點に於ける變位は，容易に elliptic integral の表に依つて算出される事は云ふ迄もない。

上記の結果を利用して，次の場合の中心點に起る變位も容易に得られる。

(2) 彈性體の平面上原點 O に接して半徑 R の球面體が置かれた場合　半徑 r_1 の圓形になつた平等壓 p に依つて生ずる中心點に於ける變位 w' は，(56) 式より

$$w' = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi p r_1 \quad\cdots\cdots(58)$$

同じく，半徑 r_2 の圓形になつた平等壓 p に依つて生ずる中心點に於ける變位 w'' は

$$w'' = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi p r_2 \quad\cdots\cdots(59)$$

從つて外半徑 r_1 にして，內半徑 r_2 なる環狀の負荷に依つて生ずる中心點に於ける變位は，

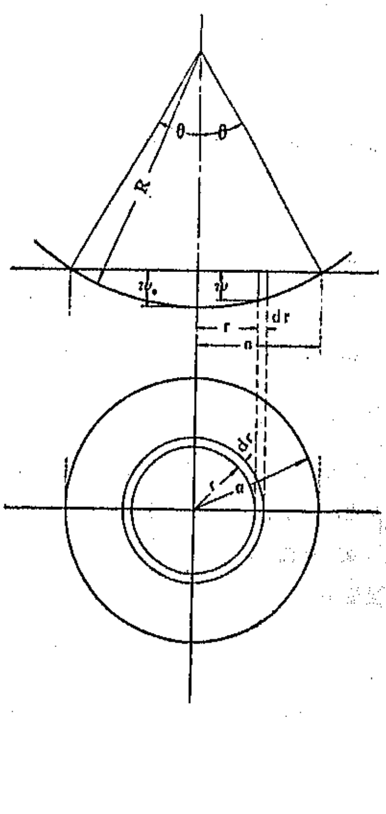
$$w'-w'' = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi p(r_1-r_2) \quad\cdots\cdots(60)$$

で示される。此式で r_1 と r_2 との差を無限に小さく取れば，斯る環狀壓に依つて生ずる中心點に於ける微變位が得られる。それは，$dw = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi p\,dr \quad\cdots\cdots(61)$

依つて球面體の接觸に依つて生ずる中心點の變位は，之を積分したものであるから，

$$w = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi\int_0^a p\,dr \quad\cdots\cdots(62)$$

第　5　圖



壓力 p の分布の狀況は，球面と平面とが空間交叉をすると想像される部分の形の通りであると假定する。第 5 圖に於て示されたる如く，兩體の立體交叉があつたものと考へ，其の平面上の半徑を a とし，壓力は此半徑 a の範圍內に於て加はつて居るものとする。卽ち壓力 p は，

$$p = k\left(\sqrt{R^2-r^2}-\sqrt{R^2-a^2}\right) \quad\cdots\cdots(63)$$

玆に k は常數である。

依つて變位 w は，(62) 式より，

$$w = \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times 2\pi k\int_0^a\left(\sqrt{R^2-r^2}-\sqrt{R^2-a^2}\right)dr \quad\cdots\cdots(64)$$

$$= \frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi k\left(R^2\arcsin\frac{a}{R}-a\sqrt{R^2-a^2}\right) \quad\cdots\cdots(65)$$

となる。然るに全負荷 W は，

$$W = \int_0^a 2\pi r p\,dr \quad\cdots\cdots(66)$$

$$= 2\pi k\int_0^a\left(\sqrt{R^2-r^2}-\sqrt{R^2-a^2}\right)r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{3}k\left\{2R^3-(2R^2+a^2)\sqrt{R^2-a^2}\right\} \quad\cdots\cdots(67)$$

であるから，(65) 及び (67) 式より k を消去すれば，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{3\left(R^2\arcsin\dfrac{a}{R}-a\sqrt{R^2-a^2}\right)W}{2R^3-(2R^2+a^2)\sqrt{R^2-a^2}}\quad\cdots\cdots(68)$$

今 $a=R\sin\theta$ と置けば，上式は，$w=3\times\dfrac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\dfrac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2-(2+\sin^2\theta)\cos\theta}\times\dfrac{W}{R}$ $\cdots\cdots(69)$

上式中 θ を含む項に就て計算を進める。

$$\theta-\sin\theta\cos\theta=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$=\theta-\frac{1}{2}\left\{2\theta-\frac{(2\theta)^3}{\lfloor 3}+\frac{(2\theta)^5}{\lfloor 5}-\cdots\right\}=\frac{(2\theta)^3}{2\lfloor 3}-\frac{(2\theta)^5}{2\lfloor 5}+\cdots\quad\cdots\cdots(70)$$

又

$$2-(2+\sin^2\theta)\cos\theta=2(1-\cos\theta)-\frac{1}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

$$=2\left\{1-1+\frac{\theta^2}{\lfloor 2}-\frac{\theta^4}{\lfloor 4}+\cdots\right\}-\frac{1}{4}\left\{1-\frac{\theta^2}{\lfloor 2}+\frac{\theta^4}{\lfloor 4}-\cdots\right.$$

$$\left.-1+\frac{(3\theta)^2}{\lfloor 2}-\frac{(3\theta)^4}{\lfloor 4}+\cdots\right\}=18\times\frac{\theta^4}{\lfloor 4}-\cdots\quad\cdots\cdots(71)$$

依つて

$$\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2-(2+\sin^2\theta)\cos\theta}=\frac{\dfrac{(2\theta)^3}{2\lfloor 3}-\dfrac{(2\theta)^5}{2\lfloor 5}+\cdots}{18\times\dfrac{\theta^4}{\lfloor 4}-\cdots}\fallingdotseq\frac{8}{9\theta}\quad\cdots\cdots(72)$$

此値を (69) 式に代入すれば，$w=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\dfrac{W}{\theta R}$ $\cdots\cdots(73)$

θ は充分小なる故，$\theta R\fallingdotseq a$ と置けば，上式は，$w=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\dfrac{W}{a}$ $\cdots\cdots(74)$

之は壓力分布 p に依つて一方の彈性體に起る變位であるから，双方に起るものゝ和 w_0 は各彈性體の剪斷彈性係數及びポアソン比を夫々 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ とすれば上式より，

$$w_0=\frac{8}{3}\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\frac{W}{a}\quad\cdots\cdots(75)$$

然るに此 w_0 は兩彈性體接觸の中心點に於ける變位の和，換言すれば，兩體が恰も空間交叉を爲せりと想像される部分の最大高さであるから，第 5 圖を參照して，それと球面の半徑 R 及び接觸部の平面に取つた半徑 a との關係は次の通りである。$w_0=R-\sqrt{R^2-a^2}\fallingdotseq\dfrac{a^2}{2R}$ $\cdots\cdots(76)$

卽ち此 w_0 の値を (75) 式に適用すれば，$\dfrac{16}{3}\left(\dfrac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\dfrac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\dfrac{W}{a^3}=\dfrac{1}{R}$ $\cdots\cdots(77)$

上記 (75) 式は Hertz 氏の解 (30) 式に相當するものであり，同じく (77) 式は同氏の解 (33) 式に於て $R_2=\infty$ と置いた場合に該當するものである。

(3) 半徑 R_1 及び R_2 の球面體が相接觸する場合 此場合も前例に準じて容易に計算することが出來る。卽ち變位 w は (65) 式に依つて，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi k\left\{\left(R_1^2\arcsin\frac{a}{R_1}-a\sqrt{R_1^2-a^2}\right)+\left(R_2^2\arcsin\frac{a}{R_2}-a\sqrt{R_2^2-a^2}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(78)$$

今 $a=R_1\sin\theta_1=R_2\sin\theta_2$ と置けば上式は，

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi k\{R_1^2(\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta_1)+R_2^2(\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_2)\}\cdots\cdots(79)$$

括弧内を展開して，
$$=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\pi k\left[R_1^2\left\{\frac{(2\theta_1)^3}{2\,\underline{|3}}-\frac{(2\theta_1)^5}{2\,\underline{|5}}+\cdots\cdots\right\}+R_2^2\left\{\frac{(2\theta_2)^3}{2\,\underline{|3}}-\frac{(2\theta_2)^5}{2\,\underline{|5}}+\cdots\cdots\right\}\right]\cdots\cdots(80)$$

他方 (67) 式に依つて，

$$W=\frac{\pi}{3}k\left[\{2R_1^3-(2R_1^2+a^2)\sqrt{R_1^2-a^2}\}+\{2R_2^3-(2R_2^2+a^2)\sqrt{R_2^2-a^2}\}\right]\cdots\cdots(81)$$

$$=\frac{\pi}{3}k\left[R_1^3\{2-(2+\sin^2\theta_1)\cos\theta_1\}+R_2^3\{2-(2+\sin^2\theta_2)\cos\theta_2\}\right]\cdots\cdots(82)$$

括弧内を展開して，
$$=\frac{\pi}{3}k\left[R_1^3\left\{18\times\frac{\theta_1^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\right\}+R_2^3\left\{18\times\frac{\theta_2^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\right\}\right]\cdots\cdots(83)$$

(80) 及び (83) 式より，
$$w\doteqdot\frac{8}{3}\times\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{R_1^2\theta_1^3+R_2^2\theta_2^3}{R_1^3\theta_1^4+R_2^3\theta_2^4}W\cdots\cdots(84)$$

近似的に $\theta_1R_1=\theta_2R_2=a$ と置けば，上式は
$$=\frac{8}{3}\times\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\times\frac{W}{a}\cdots\cdots(85)$$

之は壓力分布に依つて一方の彈性體に起る變位であるから，双方に起る變位の和 w_0 は (75) 式に準じて，

$$w_0\doteqdot\frac{8}{3}\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\frac{W}{a}\cdots\cdots(86)$$

然るに，
$$w_0=(R_1-\sqrt{R_1^2-a^2})+(R_2-\sqrt{R_2^2-a^2})\doteqdot\frac{a^2}{2R_1}+\frac{a^2}{2R_2}\cdots\cdots(87)$$

であるから，此の w_0 の値を (86) 式に挿入すれば，

$$\frac{16}{3}\left(\frac{1-\sigma_1}{2\pi\mu_1}+\frac{1-\sigma_2}{2\pi\mu_2}\right)\frac{W}{a^3}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\cdots\cdots(88)$$

此最後の式は，前章に述べた Hertz 氏の解 (33) 式に相當するものであつて，唯氏の解と比較して異る所は，其の常數に於て若干の差があるだけで，其の他式の形に於ては何等變る所はない。

其の常數と雖も，Hertz 氏の解に於て，$3\pi/2$ とあるべき所が，著者の解に於て $16/3$ となつて居るだけで，ポアソン比の取り方に依つても，其の位の係數の差異は起り得るものである。

例へば，Poisson 氏は其の理論から割り出して，其の比は 1/4 でなければならぬと[1]云つて居るに對して，G. Wertheim 氏は硝子と眞鍮に依つて實驗した結果，Poisson 氏の 1/4 なる主張を否定して，其の比は寧ろ 1/3 であると云つて居る。[2] Timoshenko 氏の如きは，其の著 "Strength of Materials" に於て，[3] "ポアソン比は Poisson 氏の計算したる値 1/4 と，一般に甚だしき相違はないもので，例へば鋼の如きに於ては，それを 0.3 と取ることが出來る。特種な場合でも 0.5 以下であつて，護謨又はパラフインの如きは 0.5 に近き値を持つものである。一般コンクリートの如きは 1/8～1/12 で，コルクに至つては，殆ど 0 に等しい。" と云ふ。John Prescott 氏なども，其の著 "Applied Elasticity" に於ては，鋼に對して 0.3 と云ふ値を用ひて居るが，[4] 要するに實驗的の數字であつて，尚も近似的のものに過ぎない。

即ち，斯る程度の精密さの數字と，掛け合さつて居る常數であるのみならず，接觸面の半徑 a に及ぼす差は僅

(1) "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques", 1829.

(2) "Annales de Chimie", 1848.

(3) Timoshenko 氏著 "Strength of Materials" Vol. I. 1930, p. 56.

(4) J. Prescott 氏著 "Applied Elasticity", 1924, p. 632.

かに，
$$\frac{(16/3)^{1/3}-(3\pi/2)^{1/3}}{(16/3)^{1/3}}=\frac{1.7468-1.6763}{1.7468}=4.06\% \quad\cdots\cdots(89)$$
に過ぎない。其の上，實際接觸面積の半徑を測定するには，ブリネル硬度計などで行つて居る樣に，接觸部に恒久的歪を發生せしめて測定したのでは，所謂“彈性限度內に於ける„と云ふ條件が破壞されるのであるから，是非共恒久的歪を起さない狀態で接觸面積を測定する必要があつて，それには尠なからぬ困難を伴ふもので，其の半徑の觀測に於て 4% の誤差は普通のことである。此意味から云へば Hertz 氏の解である (33) 式も，著者の假定から導き出した (88) 式も，少くとも全く同じ程度の精密さを持つたものと考へて差支へない。

而して Hertz 氏は，先にも述べた通り，“接觸部の壓力分布を楕圓形態である„と假定する氏の理論が正當である理由として，種々なる實驗の末，“壓迫を受けた接觸面の一次寸法は，兩體間に加へられたる壓力の 3 乘根に正比例することの誤りでないことが極めて正確に證明された。„[1] と云つて居る。然し Hertz 氏の實驗結果が，氏の假定の妥當性を裏書し得るものならば，少くともそれと同じ程度に於て，著者の假定の妥當性をも證明するものでなければならない。何となれば，著者の假定を以てしても，上に示すが如く，Hertz 氏の式と全く同じく，“接觸面の半徑 a は，負荷 W の 3 乘根に正比例すると云ふことになつて居る„からである。

玆に於て，著者の假定を再び想起する必要がある。それは接觸部に於て，恰も兩彈性體が立體交叉をなすと想像される部分の形に，相當した壓力分布があるものとするのであつて，第 1 圖に就て云へば破線を以て包圍された る實體を，壓力分布の姿と考へるのである。卽ち接觸部に於て壓迫に依つて，外見上消滅したとも考へられる體積，換言すれば接觸部に起る彈性歪の體積に正比例した負荷が働くものとしたのである。而して此假定に依つて計算した彈性變位の式は，少くとも Hertz 氏の實驗結果を滿足することは明かである計りでなく，若し此假定にして肯定されるならば，固體摩擦の眞相も了解されて來るのである。

3. 彈性體間の Archimedean Principle

2 つの彈性體が接觸する場合，其の接觸部に彈性變位が生じて，兩體が相接近して來る狀態は，恰も兩體間に立體交叉が起るかの樣に見えるものであつて，其の模樣は沈下と云ふ言葉でも表はし得るものである。木片を水中に泛べれば其の一部は水面上にあつて一部は水面下に沈下する。上述の彈性體の沈下と云ふは，此木片の一部が水面下に沈下すると大體同じ姿を想像すればよい。唯木片が水面下に沈下する時，排斥されるのは一方的に水だけであるが，彈性體の接觸する場合には沈下が双方に起る點が，水の場合と異つて居る。固體が液體に泛ぶ場合に就ては有名なる Archimedean Principle がある。彈性體が彈性體と接觸する場合にも亦，それに準じた法則が考へられる。液體がそれに泛ぶ固體に對して呈する浮力が固體の重量と平衡するが如く，彈性體の接觸に於ては接觸部の彈性歪に依つて起る彈性反力が，接觸に對して加へられたる力と平衡する。卽ち前者に於ては液中に沈下したる部分の固體の體積に比例して浮力が働くが如く，後者に於ては接觸部に生ずる彈性歪の體積に比例した彈性反力が働くものである。此彈性歪の體積は取りも直さず接觸せる彈性體の間に生ずる沈下の體積である。卽ち曰く“彈性體の接觸部に於ける彈性反力が，接觸に對して加へられたる力と相等しくなるまで接觸部に沈下が起る„と，著者は便宜上，之を彈性體間に於ける Archimedean Principle と呼んで居る。

著者の主張する原理を，此沈下と云ふ言葉で云ひ表はせば，“彈性體の接觸部に起る沈下體積は加へられたる負荷に正比例する。„と云ふことにもなる。之は甚だ重要なる概念であつて，實際此原理の示す通り，彈性體の接觸に於て加へられたる負荷 W に正比例する積體の沈下 V が起るもの (卽ち $W\infty V$) とすれば，接觸部に働く最大

(1) Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, 1882, Bd. I. p. 174.

靜止摩擦力 F は負荷 W に正比例するものであること (卽ち $F \propto W$) が實驗的に解つて居るから，從つて最大靜止摩擦力 F は沈下體積 V に正比例する (卽ち $F \propto V$) と云ふことになつて，結局最大靜止摩擦力は接觸面積の廣狹に關係なしと云ふことも了解されて來るのである。

4. 最大靜止摩擦力と沈下體積

此上は最大靜止摩擦力 F が沈下體積 V に正比例して，然るべきことが説明されゝば，負荷 W，沈下體積 V，最大靜止摩擦力 F の 3 者の關係が一層と鮮明になつて來る筈である。

惟ふに Amontons 氏の摩擦の法則に依れば，固體間の摩擦力は接觸面積の廣狹に關係なしとあるも，それは固體の接觸面が文字通り鑢の面とか，鋸の齒とか，齒棒の齒とか云ふ樣な甚だしい凹凸のある場合も尙然りと云ふ意味ではない。摩擦の實驗は決して齒棒の如き齒を嚙み合せて行ふものではなく，普通多少の精粗はあつても，常識的に平らであると考へられる表面に就て之を行ふものである。否な，更に嚴密なる實驗に到つては，充分注意して研磨した表面に就て之を行つて居ることに注意しなければならない。

一歩讓つて Coulomb 氏や Dudley 氏の說く如く，接觸面に於て鋸の齒や齒棒齒輪に類した嚙合せがあるものとすれば，それに依つて生ずる摩擦力は，決して接觸面積の廣狹に關係しない譯には行かないのである。何となれば，斯様の場合に起る抵抗力は，所謂鋸の齒，若くは齒棒齒輪の齒の斷面に働く剪斷力に相當すべきものであるから，摩擦力はそれ等の齒の斷面積に正比例する，卽ち換言すれば，接觸面積に正比例しなければならぬからである。假りに表面の精粗が上述の如き凹凸を意味するものであるとして，それに依つて生ずる抵抗力を f とすれば，それは接觸面積 A に正比例するものと考へるのが穩當である。卽ち，c を常數とすれば

$$f = cA \quad \cdots\cdots (90)$$

之は面の精粗に依つて變化のある摩擦力と考へればよいのであつて，Hardy 氏の實驗の樣に試品の表面を充分注意して研磨した場合は $c=0$ となつて，　$f=0 \quad \cdots\cdots (91)$

と云ふことになる。

然るに一方 Rayleigh 卿や Beilby 氏の觀測に依るも，良く磨かれた固體の表面は決して Coulomb 氏の云ふ如く鋸齒の樣な凹凸はなく，寧ろ液體の自由表面と甚だしく差のないものであると云つて居り，又 Hardy 氏の實驗結果に依るも，Amontons 氏の接觸面積の廣狹に關係なしと云ふ法則の正しいことが，實驗誤差の範圍内に於て，證明されて居る所を見れば，良く研磨された固體の表面には，其の斷面に剪斷力の働く程の凹凸は，先づないものと見るのが正當である。卽ち，此場合 $c=0$ であり，從て $f=0$ であつて差支へない。

次に摩擦力測定の實驗を行ふ狀況に就て考へて見る必要がある。摩擦の法則を確かめる實驗と稱するものは，常に非常なる大壓力を加へて行ふものではない。Hardy 氏の實驗に於ける如きは，僅かに 20〜60 g の重錘が加へられたに過ぎないものであつて，斯樣な低壓力の場合に於ては，金屬は勿論硝子でも，石材でも，木材でも，凡て一種の彈性體として考へられ，而もそれ等の彈性限度内に於て，壓力が加へられてあると見てよいのであつて，卽ち，固體の接觸部には加へられたる壓力に正比例する體積の沈下が起るものであつて，其の沈下の有樣は第 1 圖に示した樣なものと想像してよい。但し實際の沈下の程度は決して圖に示すが如く極端なるものではなく，文字通り非常に微小なるものであることは之を念頭に置く必要がある。

斯樣な沈下狀態になつて居る時，例へば下方の乙を固定した儘，上方の甲を乙の面に沿ふて切線方向に水平に引くものとする。接觸點に於ける沈下は云ふまでもなく彈性變位であるから，上の物體が下の物體の窪みに入つて居る意味ではないので，甲が乙の面上を水平に引かれる場合，決して斜に上に上るとは考へてはならない。必ず甲

と乙との相對的位置を變化することなく，水平に引かれるのであるから，同一空間が 2 物體に依つて同時に占據せられざる原則に從つて，沈下した部分の材料は各歪ませられた丈け，其の結合が破壞されなければ，位置の水平移動は行はれないと考へられるのである。即ち甲を乙の面に沿ふて水平に移動せしめんとする時に生ずる抵抗力は，接觸部に於ける甲乙各の沈下體積に相當する分量の，材料の結合を破碎し分離するに要する力であると考へてよい。加へられたる壓力が，摩擦力測定の實驗に於て行はれる如く比較的弱いものであれば，其の結合を破碎し分離するに要する力は愈々正確に沈下體積に正比例して來る。

此抵抗力が最大靜止摩擦力であつて，それは沈下體積に正比例する，換言すれば加へられたる壓力に正比例し，接觸面積の廣狹に關係なしと云ふことになる。

此處に誤解を避けるため斷つて置かなければならないことは，接觸部に於ける彈性歪の體積，即ち所謂沈下體積なるもの丶姿に就てゞある。是は往々誤つて考へられ易いことであるが，例へば軟かい護謨の様な物體の表面を，或る固い物體で，弱く勿論彈性限度内で壓した時の如く，其の接觸部が假令非常に深く歪みを生じたとしても，決して其の歪の姿その儘を以て上記の所謂沈下體積を意味するものと思つてはならない。何となれば所謂沈下體積なるものは，それを誘導して來た彈性理論の根本に返つて之を觀れば，容易に了解されることではあるが，彈性體の接觸面に壓力が加へられゝば，それに依つて彈性歪が生じ，其の歪に依る彈性反力が加へられたる壓力に平衡するに至るまで歪んで廻ると云ふ，表面力に關する彈性歪の體積を意味するものであるから，物體の支持點の位置如何に依つて變化されるが如き性質のものではない。然るに實際物體に壓迫を加へる場合支持點が無い譯ではないので，自然上述の如き彈性歪の外に支持點の位置如何に依つて變化のある所の壓縮若くは彎曲の歪が，それに伴つて同時に發生するものであるから，必ず是等は區別して考へなければならない。即ち上に述べた軟かい護謨の様な物體の表面を，或る固い物體で壓した時起る歪の内には，支持點に關係のない彈性歪と，支持點の位置に依つて差異のある歪とが，同時に起つて居るものと考へられるのである。摩擦抵抗に關係のある所謂沈下體積なるものは云ふまでもなく，支持點の位置如何に關係のない前者を意味するものであつて，支持點の位置に依つて變化のある歪を含む見掛け上の歪みの體積を夫と思ひ違ひしてはならない。之は必ずしも護謨の場合には限らないのであつて，解り易いため護謨の例を擧げたけれども，如何なる物體の接觸に就ても同様の考へ方が必要である。最も極端なる例で說明すれば，無限の彼方に於て支持さたたる彈性體に就ては，其の表面に有限の負荷を加ふるも尙ほ無限の歪が發生するものであつて，之は結局支持點の位置に依つて變化のある歪を意味するものである。而も此場合，與へられたる有限の負荷に依つて起る所の，接觸部の彈性歪の體積，即ち所謂沈下體積は有限であることは云ふまでもない。此概念は (5) 式に依つて彈性歪を計算する時に忘れてはならない條件でもある。

5. 靜止摩擦係數と運動摩擦係數

次に上述せる沈下なる概念の妥當であることを示すため，運動開始後の摩擦力が靜止の時のそれより，必ず小なる所以を說かうと思ふ。

今水中に浮べられたる物體に，上下運動の勢力が與へられゝば上下振動を發生すると同様に，彈性體に載せられたる彈性體は，運動の勢力さへ供給されるならば，自由上下振動を發生するものである。上下に接觸する 2 つの彈性體の下方のものを固定したものと考へ，上方の運動する方の質量を M とし $\varphi(x)$ を靜止の中正位置より x だけ偏倚した場合の復原力とすれば，d'Alembert 氏の定理に依つて，

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+\varphi(x)=0 \qquad \text{[illegible]}$$

なる運動方程式が成立つ。

上式は一般に僞調和振動 (pseudoharmonic vibration) の存在を意味するものであつて，$\varphi(x)$ が特別の形でない限り，其の解は得られない。若し偶然に依つて接觸面積に變化の起らぬ形の彈性體の接觸であれば，復原力は x の一次式で表はされる故，上式は，

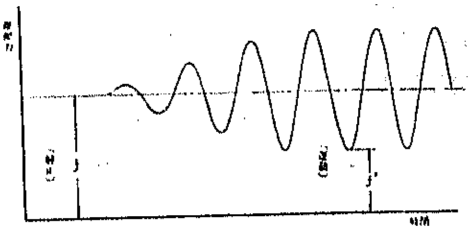
$$M\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \quad \cdots\cdots(93)$$

の形となつて單弦振動の解が得られる。玆に k は常數である。

斯の如くして一般に運動の勢力が供給される限り，彈性體に載せられたる彈性體には，一種の自由振動を發生するものであつて，上方の彈性體が接觸面に沿ふて移動を開始し，上下振動を發生すれば，接觸部に於ける沈下體積は靜止の場合の沈下體積を中心として，振動に應じて増減變化をすることになる。然るに先にも述べた通り，最大摩擦力は沈下體積に正比例するものであるから，上下振動を發生するや，其の値は既に一定ではなくなり，上下振動に應じて時々刻々變動し，最大靜止摩擦力を中心として上下に増減變化するのである。

第 6 圖に於て左方は靜止せる時の最大摩擦力，即ち最大靜止摩擦力を示し，右方は上下振動をなし居る時の最大摩擦力の變動せる有様を示す。

第　6　圖



靜止の時接觸面に沿ふて物體の移動を行ひ得る最小の力を f' とすれば，それは最大靜止摩擦力である。振動を起せる物體を同じく移動せしめ得る最小の力を f'' とすれば，それは變動せる最大摩擦力の最小値であるべきである。此 f'' は云ふまでもなく運動開始後の摩擦力である。然るに振動時の最大摩擦力は前述の通り最大靜止摩擦力 f' の値を中心として上下に變動するものであるから，**第 6 圖**を參照して常に，

$$f'>f'' \quad \cdots\cdots(94)$$

の關係がなくてはならない。之が物體の運動開始後摩擦力の低下する所以である。又一般に振動を與ふることに依つて摩擦力の減少する理由もこゝにある。

物體は靜止の時は f' の摩擦抵抗を有するものが，振動の發生するに因つて其の摩擦抵抗は**第 6 圖**の如く變動し，摩擦抵抗が大なる瞬時停止し，小なる瞬時滑動し，斯くて滑動と停止が交番に行はれて，最小摩擦抵抗 f'' に打ち勝つだけの力で物體は移動させられるのである。

然し上述のことは普通行はれる摩擦の實驗の如き狀況の場合であつて，今若し甚だ大なる力を物體に加へ，之を强引に外力を以て滑動せしむるならば，話は全く違つて來る。

例へば，車輪を甚だ强く制動し回轉を生ぜしめぬ程となせるものを，强引に軌條上を牽引すれば，軌條面には壓力變化に正比例した所謂正弦波形 (sinusoidal) の磨耗が起らなければならない。然るに車輪に加はる制動力が左程强くなければ，車輪壓が増加した瞬時粘着力が制動力に打ち勝つて粘着回轉が行はれて摩擦磨耗に現はれず，次に車輪壓が減少した瞬時粘着力が制動力に負けて車輪は軌條面を滑走することになるのであるから，其處に生ずる磨耗の姿は所謂間歇的 (intermittent) のものでなければならない。されば上述の 2 つの場合に於ける車輪壓と磨耗發生との關係を比較すれば，其の位相は全く逆であることが考へられる。

普通行はれる摩擦の實驗は，車輪の例で云へば後の場合に該當するものであつて，其の移動運動は時間的に云へ

ば間歇的のものである。

茲に於て，吾々は一つの結論に到達する。即ち曰く，今迄，靜止摩擦係數と云ひ，或は運動摩擦係數と唱へて，兩者を區別して居たけれども，實は夫等は便宜的の區別であつて，本質的には靜止摩擦係數一種だけにて，運動開始後は接觸部に於て壓力の働いて居る方向に振動が發生して，接觸部に於ける壓力に增減の變化を生じ，見掛の摩擦力が減少するため，恰も摩擦係數が減少したるが如き觀を呈するに過ぎぬものであると。

從つて振動に依つて，接觸部の壓力が變化することを考に取るならば，摩擦係數は所謂靜止摩擦係數一種と考へて論じても差支ないことになる。

第5章　要　結

1. 彈性體の接觸部に於ける彈性變位は，Kelvin 卿に依つて導かれた彈性體面の變位に關する方程式

$$w=\frac{1-\sigma}{2\pi\mu}\iint\frac{p\,dx'dy'}{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

に依つて，其の接觸部に於ける負荷分布が與へられゝば計算出來ることになつて居る。

2. 然るに實際彈性體面に加へられる負荷は，必ず或る形を持つた彈性體に依つて與へられるものであつて，其の兩彈性體の形狀及び彈性は假令既知であつても，其れを以て相手方の彈性體面を壓迫する時，接觸部に於ける負荷分布の狀態は兩彈性體の原形とは全く異つたものとなり，嚴密なる意味に於て吾人の知り得るものは負荷の總量だけであつて，其れが如何に接觸部に分布されて居るかは，現在の知識を以てしては知る由もないのである。即ち，本來ならば接觸部に於ける負荷分布は，相接觸したる後の兩彈性體の接觸部の形狀と，負荷の大さに依つて與へらるべきであるが，其の數理的關係は簡單でない故，與へられたる負荷に依つて生ずる變位を計算するに，相接觸する彈性體の形を觀察し，壓迫後に於ける尤もらしき負荷分布を推定し，其の推定に依る負荷分布が壓迫の平衡狀態に於て，接觸部に現はれ存在するものと假定して，接觸部の彈性變位を計算するより外に途はない。

3. 其處で Heinrich Hertz 氏は，兩彈性體を輕く接觸せしめた場合接觸部附近の表面の relative indicatrix が x, y の 2 次函數であると云ふ假定をなし，近似的に

$$\iint\frac{p\,dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$$

が x, y の 2 次函數であることを導き，“接觸部に於ける負荷分布の狀態は楕圓形態を爲すものである„と推論して，其の解を求めて行つたのである。

4. 其れに對して著者は別の解法を與へた。即ち，兩彈性體を接觸し壓迫を加へれば互に接近して恰も其の接觸部に於て原形から見て立體交叉が起るかの樣に見えるものであつて（第1圖參照），其の立體交叉の部分に當初から何れか一方の彈性體が缺如して居たならば，斯く接近するも互に競合ふ如きことはなく，從つて其處には何等の壓力も發生することはないものである。云ひ換へれば，上の立體交叉の部分に實體を挿入することが，兩彈性體間に壓力を發生する根源であると考へて，接觸部に於ける壓力分布の狀況を推定しやうと云ふのである。

即ち，“兩彈性體が壓迫せられた時，其の原形から考へて，恰も立體交叉を爲すが如く考へられる部分に相當する形の壓力分布が存在する。„と云ふ假定を立てゝ彈性變位の計算を行つた。

5. 其の結果は Hertz 氏の結果と殆ど同樣であつて，氏が“接觸部の壓力分布を楕圓形態である。”と假定する氏の理論が正當である理由として，種々なる實驗の末“壓迫を受けた接觸面の一次寸法は，兩體間に加へられたる壓力の 3 乘根に正比例することの誤りでないことが極めて正確に證明された。„と云つて居るに對して，著者の假

定に依つて得た結果も亦耗迫を受けた接觸面の一次寸法は，兩體間に加へられたる壓力の 3 乘根に正比例することを示して居るのである。

6. されば單なる彈性變位の計算だけであるならば，Hertz氏の假定を非なりとする理由はない。然し少くとも著者の理論が正しいものとすれば，こゝ三の興味ある結論が導かれる。即ち，

(a) 彈性體の接觸部に起る立體交叉の體積は加へられたる負荷に正比例する。

(b) 彈性體の接觸部に於ける最大靜止摩擦力は上記の立體交叉の體積に正比例する。從つて最大靜止摩擦力は"加へられたる重量に正比例し，接觸面の廣狹に關することなし。"

(c) 摩擦運動ある所必ず磨耗を伴ふものである。而して其の磨耗はより多く歪ませられる側により多く起る。

(d) 最大靜止摩擦係數は必然的に運動摩擦係數より大である。

但し是等に就ては本文 14 頁 "3. 彈性體間の Archimedean Principle." 以下あまり長くない故，其れを參照して頂き度い。

7. 著者の理論に依るならば，彈性體の接觸部に於ける彈性變位の計算が簡單化される。即ち，立體交叉の形を見て容易に壓力分布の状況を假定し得るからである。其の計算例に就ては拙著 "波状磨耗を通じて軌條磨耗を見る" 第 10 章第 2 節なども參照せられたい。