論 說 報 告

第21卷第4號 昭和10年4月

Plane Strain 又は Plane Stress の應力と Symmetrical Strain の應力とが一致する場合の條件に就て

准員 工學士 最 上 武 雄*

On the Conditions for the Coincidence of Stress Calculated as Plane Strain or Plane Stress and as Symmetrical Strain

By Takeo Mogami, C. E., Assoc. Member.

內 容 梗 概

本文は Plane Strain 又は Plane Stress として計算した應力と Symmetrical Strain として計算した應力とが一致するためには如何なる條件が必要であるかと言ふ事に就て最も一般的に調べたものである。

1. ここに處理した問題は特に實際的な應用と言つてはないけれども，屢々彈性の問題に就て，"ある plane strain 又は plane stress の問題を，symmetrical strain の問題に引き直せたら，又逆に symmetrical strain の問題を plane strain 又は plane stress の問題に引き直せたら便利であるが，" と言ふ事がある。其の疑問に答へるためにやつて見た。最も一般の場合を處理して見たが，この兩者の對應は極く特別な場合にしか行はれない事が分かつた。又逆に言へば，ある特殊の場合にはこの對應が完全に行はれると言ふ事が分かつたのである。故に例へば杭の問題等を plane strain として計算しやうとする試み等は根本的誤りである事が分かる。

2. Symmetrical strain の場合には，次の關係が成立する事は良く知られてゐる。

卽ち

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial r^2}\right\}, & \widehat{\theta\theta}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\nabla^2\chi_1-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_1}{\partial r}\right\}\\ \widehat{zz}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\}, & \widehat{rz}&=\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)^{(1)}$$

玆に

$$\nabla^4\chi_1=0,\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdots\cdots(2)$$

又 plane strain 又はplane stress の場合に次の關係が成立する事も良く知られた事である。

卽ち

$$\widehat{rr}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial z^2},\quad \widehat{zz}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2},\quad \widehat{rz}=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r\partial z}\cdots\cdots(3)$$

玆に

$$\nabla_1{}^4\chi_0=0,\quad \nabla_1{}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdots\cdots(4)$$

plane strain 又は plane stress に依る stress と symmetrical strain に依る stress が等しい場合には，上の (1), (3) 兩式から，

---

* 東京帝大工學部土木教室

(1) Love "Mathematical theory of elasticity" p. 276.

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial r^2}\right\} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\} \quad\cdots\cdots(6)$$

$$-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\} \quad\cdots\cdots(7)$$

(5), (6) 兩式より夫々

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial z}=\sigma\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial r^2}-g_1(r) \quad\cdots\cdots(8)$$

$$-\frac{\partial\chi_0}{\partial z}=(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}-g_2(z) \quad\cdots\cdots(9)$$

玆に $g_1(r)$, $g_2(z)$ は夫々 r 及び z の任意の函數である。(8), (9) 兩式を加へ合せると

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_1}{\partial r}=g_1(r)+g_2(z) \quad\cdots\cdots(10)$$

となる。又 (6), (7) 兩式から

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2}-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\chi_1 \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}\right\}=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r\partial z} \quad\cdots\cdots(12)$$

故に今次の如く置く。

$$(1-\sigma)\nabla^2\chi_1-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}=\Phi \quad\cdots\cdots(13)$$

然る時は $$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2}-\frac{\partial\nabla^2\chi_1}{\partial z} \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r\partial z} \quad\cdots\cdots(15)$$

(15) 式より $$\Phi=-\frac{\partial\chi_0}{\partial z}+p(z) \quad\cdots\cdots(16)$$

玆に $p(z)$ は z の任意の函數である。(16) 式を (14) 式に入れゝば

$$-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial z^2}+p'(z)=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2}-\frac{\partial\nabla^2\chi_1}{\partial z} \qquad 故に \qquad p'(z)=\nabla_1{}^2\chi_0-\frac{\partial\nabla^2\chi_1}{\partial z}$$

この兩邊に $\nabla_1{}^2$ を掛けて (4) 式を利用すれば $p'''(z)=-\dfrac{\partial\nabla_1{}^2\nabla^2\chi_1}{\partial z}$

故に $p''(z)=-\nabla_1{}^2\nabla^2\chi_1$ 處が $\nabla_1{}^2=\nabla^2-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ であるから

$$p''(z)=-\nabla^4\chi_1+\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_1}{\partial r}\right)=\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_1}{\partial r}\right) \quad\cdots\cdots(17)$$

(10) 式を (17) 式に入れゝば $p''(z)=\nabla^2 g_1(r)+\nabla^2 g_2(z)$

故に $$\nabla^2 g_1(r)=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\nabla^2 g_2(z)=p''(z) \quad\cdots\cdots(19)$$

故に $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg_1(r)}{dr}\right)=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

$$g_2(z)=p(z)+c_1 \quad\cdots\cdots(21)$$

以後 c_1, c_2 等は任意の常數を示すものとする。(20) 式から $g_1(r)$ を求めると，

$$g_1(r)=c_2\log r+c_3 \qquad \cdots\cdots(22)$$

(10), (21) 及び (22) 式から

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_1}{\partial r}=c_2\log r+p(z)+c_4 \qquad \cdots\cdots(23)$$

之を積分して

$$\chi_1=\frac{1}{2}c_2r^2\log r+\frac{1}{2}r^2\left(c_4-\frac{c_2}{2}\right)+p(z)\frac{r^2}{2}+q(z)$$

$$=c_5r^2\log r+c_6r^2+p(z)\frac{r^2}{2}+q(z) \qquad \cdots\cdots(24)$$

玆に $q(z)$ は任意の z の函數である。(2) の條件から

$$\nabla^4\{p(z)r^2\}+\nabla^4q(z)=0$$

即ち

$$r^2\frac{d^4p(z)}{dz^4}+8\frac{d^2p(z)}{dz^2}+\frac{d^4q(z)}{dz^4}=0 \qquad \cdots\cdots(25)$$

(25) 式は r の如何に關らず成り立たねばならぬから

$$\frac{d^4p(z)}{dz^4}=0 \qquad \cdots\cdots(26)$$

及び

$$\frac{d^4q(z)}{dz^4}=-8\frac{d^2p(z)}{dz^2} \qquad \cdots\cdots(27)$$

この 2 つの方程式から

$$p(z)=c_7z^3+c_8z^2+c_9z+c_{10} \qquad \cdots\cdots(28)$$

$$q(z)=-\left\{\frac{2}{5}c_7z^5+\frac{2}{3}c_8z^4\right\}+c_{11}z^3+c_{12}z^2+c_{13}z+c_{14} \qquad \cdots\cdots(29)$$

依つて最も一般な χ_1 の式として

$$\chi_1=c_5r^2\log r+c_6r^2+(c_7z^3+c_8z^2+c_9z+c_{10})r^2$$

$$-\left[\frac{2}{5}c_7z^5+\frac{2}{3}c_8z^4\right]+c_{11}z^3+c_{12}z^2+c_{13}z+c_{14} \qquad \cdots\cdots(30)$$

又は stress に無關係な項は除外して

$$\chi_1=c_5r^2\log r+(c_7z^3+c_8z^2+c_9z)r^2-\frac{2}{5}c_7z^5-\frac{2}{3}c_8z^4+c_{11}z^3 \qquad \cdots\cdots(31)$$

これから $\nabla^2\chi_1$, $\partial^2\chi_1/\partial r^2$, $\partial^2\chi_1/\partial z^2$ を計算すれば

$$\nabla^2\chi_1=4c_5(\log r+1)-4c_7z^3-4c_8z^2+(4c_9+6c_{11})z+(6c_7z+2c_8)r^2$$

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial r^2}=c_5(2\log r+3)+2(c_7z^3+c_8z^2+c_9z)$$

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2}=(6c_7z+2c_8)r^2-8c_7z^3-8c_8z^2+6c_{11}z$$

依つて應力が下の如き場合に限り plane strain 又は plane stress の問題を symmetrical strain の問題に引き直せる。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial z^2}=-6(1+2\sigma)c_7z^2-4(1+2\sigma)c_8z-2(1+2\sigma)c_9+6\sigma c_{11}+6\sigma c_7r^2\\ \widehat{zz}&=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r^2}=12\sigma c_7z^2+8\sigma c_8z+6(1-\sigma)c_{11}+4(2-\sigma)c_9+6(2-\sigma)c_7r^2\\ \widehat{rz}&=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial r\partial z}=4(1-\sigma)c_5\frac{1}{r}-4\sigma(3c_7z+c_8)r\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(32)$$

變位の方は (32) 式から直ちに求まる。今 r 方向と z 方向の變位の成分を夫々 U, W とすれば

$$\left.\begin{aligned} U&=-\frac{2(1+\sigma)}{E}(3c_7z^2+2c_8z+c_9)r \\ W&=\frac{1+\sigma}{E}[-8\sigma c_5(\log r+1)+8\sigma(c_7z^3+c_8z^2)+4c_9z+2(1-2\sigma)(2c_9+3c_{11})z \\ &\quad+2(1-2\sigma)(3c_7z+c_8)r^2] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

例 1. 今特に $q(z)\equiv 0$ の場合を考へれば $c_7=c_8=c_{11}=c_{12}=c_{13}=c_{14}=0$

であるから $\widehat{rr}=-2(1+2\sigma)c_9,\quad \widehat{zz}=4(2-6)c_9,\quad \widehat{rz}=4(1-\sigma)\frac{1}{r}c_5$

$$U=-\frac{2\,1+\sigma)}{E}c_9r,\quad W=\frac{1+\sigma}{E}\{-8\sigma c_5(\log r+1)+8(1-\sigma)c_9z\}$$

である。$\widehat{rr}, \widehat{zz}$ は一定でしかも $\frac{2}{1+2\sigma}\widehat{rr}+\frac{1}{2-\sigma}\widehat{zz}=0$ の關係があり剪斷應力 $\widehat{rz}$ は z には無關係で r に逆比例してゐる。$c_5=0$ ならば pure radial 及び pure axial stress の組合はせとなる。

例 2. 今特に $p(z)\equiv 0$ とすれば $c_7=c_8=c_9=c_{10}=0$ であるから

$$\widehat{rr}=6\sigma c_{11},\quad \widehat{zz}=6(1-\sigma)c_{11},\quad \widehat{rz}=4(1-\sigma)c_5\frac{1}{r}$$

$$U=0,\quad W=-\frac{8\sigma(1+\sigma)}{E}\{c_5(\log r+1)+6(1-2\sigma)c_{11}z\}$$

であつて例 1 と似てゐるが變位の方は大分性質が違ふ。

例 3. (32) 又は (33) 式の criterion を使ふ事の實例。

例へば今半無限彈性體の面の上の一點に P なる力を面に垂直に加へた時の變位はよく知られてゐる樣に次の式で示される。

$$\left.\begin{aligned} U&=\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)r}\left\{1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z}}\right\}+\frac{Prz}{4\pi\mu\sqrt{(r+z)^3}} \\ W&=\frac{(\lambda+2\mu)P}{4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(r^2+z^2)}}+\frac{Pz^2}{4\pi\mu\sqrt{(r^2+z^2)^3}} \end{aligned}\right\}^{(2)}$$

この變位は明らかに (33) 式に依る變位とは性質を異にする。故に之を plane strain 又は plane stress の方に引き直す事は不可能である。

3. 結　　論

上の例 3 の樣に問題の性質上明白な場合は別として，明白でない場合には上の判定條件は有效である。又上を判定條件と見ないで，上に示した樣な場合に於ては plane strain 又は plane stress で出した應力と symmetrical strain で出した應力とが一致する性質があると言ふ一つの定理と考へても良いと考へる。

本文は山口教授に眼を通して戴いて御注言を戴いた。終りにのぞみ厚く御禮を申し上げる次第である。

---

(2) 佐野靜雄 "應用數學" p. 427.