

論 說 報 告

第 21 卷 第 4 號 昭和 10 年 4 月

アーチの形状及其の變形の水平反力に及ぶ影響に就て

會 員 工 學 博 士 田 中 豊*

On the Variation of the Horizontal Reaction of the Two-Hinged Arch

By Yutaka Tanaka, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

本文は Fourier の級数を適用して 2 鉸アーチの水平反力の影響線を求め、アーチの形状及其の變形の水平反力に及ぶ影響を明かにし、且つ 2, 3 の例題によつて解法の適用並に算式の精度の計算等を例示したものである。

1. 緒 言

2 鉸アーチの一般性を知らんとするに當り、其の形状と水平反力との關係を明かにすることは、肝要なる一事項である。又アーチが其の架設後に於て、設計上假定せられたる形状と異りたる不整形を呈して居る場合であるとか、荷重、振動其他の特殊の事由により、アーチが對稱又は不對稱形の變形をなしたの場合等に於ける水平反力の影響線の變化の一般性を知ることは、構造力學上研究を要すべき一問題である。

本文はかかる問題の解法にも適應せしめんが爲めの準備的の目的を以て試みた一解法である。之が爲め本文に於ては、アーチの形状を Fourier の級数にて示し、アーチの肋材の慣性モーメント及斷面積の變化に就ては便宜上、

$$I = I_0 \sec \varphi \quad (\text{但し } I_0: \text{拱頂に於ける慣性モーメント, } \varphi: \text{拱軸線の水平となす角})$$

$$F = F_0 \sec \varphi \quad (\text{但し } F_0: \text{拱頂に於ける肋材の斷面積})$$

なる假定を採用し、且つアーチは一水平線上に在る兩端の鉸に依つて支承せられ、荷重は鉛直に作用するものと假定する。

2. 水平反力 H の影響線の解法

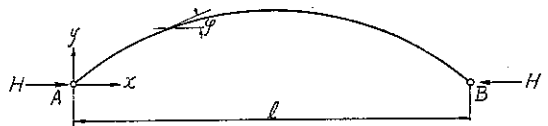
第 1 圖に示す如き 2 鉸アーチに於て、其の任意の 1 點に與へられたる鉛直單位荷重による水平反力 H の第 1 次的近似算式は普通次の如く示されて居る。

$$H = \frac{\int_0^l m y dx}{\int_0^l y^2 dx + \frac{I_0}{F_0} \int_0^l \cos^2 \varphi dx} \quad \dots \dots (1)$$

上式中 m は AB を單純桁として求めた鉛直單位荷重による曲げモーメントである。

然るに單純桁の性質により任意の 1 點に作用する單位荷重による各點の曲げモーメントは直ちに其の荷重點の曲げモーメントの影響線を示す。従つて (1) 式中の $\int_0^l m y dx$ は y なる分布荷重による或る 1 點(單位荷重の作用點)の曲げモーメントを示す。故に y なる荷重による各點の曲げモーメント即ち $-\int \int y dx dx$ は鉛直單位荷重がアーチの全長に亘つて移動する場合其の作用點に相當する $\int_0^l m y dx$ を示すべきである。

第 1 圖



* 東京帝國大學教授

故に鉛直荷重に對する H の影響線は次式に依つて求むることが出来る。

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{-\iint y \, dx \, dx}{\int_0^l y^2 \, dx + \frac{I_0}{F_0} \int_0^l \cos^2 \varphi \, dx} \dots\dots\dots (2)$$

上式中 \mathcal{H}_φ は H の影響線の縦距である。

次に上記の (2) 式を適用して \mathcal{H}_φ の一般解を求めて見る。今便宜上前節に述べたる如くアーチの形状を次式の如き Fourier 級数で示す。

$$y = \sum A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \text{但し } A_k = \text{定数}, \quad k=1, 2, 3, \dots \dots\dots (3)$$

然るときは $-\int y \, dx = \sum A_k \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \dots\dots\dots (4)$

$$-\iint y \, dx \, dx = \sum A_k \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} \dots\dots\dots (5)$$

但し此の場合積分定数を何れも零とすることが出来る。如何となれば 1 例として $y = A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ なる場合を考へて見るに

y 荷重による單純桁 AB の剪力は $-\int y \, dx = A_k \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}$,

曲げモーメントは $-\iint y \, dx \, dx = A_k \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l}$

であつて何等の積分定数を要しないのである。

次に $\int_0^l y^2 \, dx$ を求むるに當り、一般に $\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx = 0, \quad m \neq n; \quad \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{l}{2}$

であるから、容易に次式が得られる。

$$\int_0^l y^2 \, dx = \frac{l}{2} \sum A_k^2 \dots\dots\dots (6)$$

故に前掲 (2) 式の H に對する影響線 \mathcal{H}_φ は次の如く示すことが出来る。

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{\frac{2}{l} \sum A_k \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l}}{\sum A_k^2} v \dots\dots\dots (7)$$

但し
$$v = \frac{1}{1 + \frac{2I_0}{lF_0 \sum A_k^2} \int_0^l \cos^2 \varphi \, dx}$$

故に直力によるアーチの肋材の短縮を無視すれば $v=1$ であることは當然である。又之を無視せざる場合であつても(一般に直力の影響は \mathcal{H}_φ に對して $-(3\sim 4)\%$ 以下であるから) v の計算は相當な近似計算法によることが出来る。此の場合級数積分に依るのもよいか、Simpson 式を適用して

$$\int_0^l \cos^2 \varphi \, dx = \frac{l}{12} (C_0^2 + 4C_1^2 + 2C_2^2 + 4C_3^2 + C_4^2)$$

但し $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 = (x=0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3}{4}l, l \text{ に於ける } \cos \varphi)$

等によるのも 1 法である。

茲に於て上記の (7) 式を吟味して見るに、本式は 2 絞アーチの性質を知るのに極めて便利なる公式であることが

分る。

即ち 1 例として正弦曲線形のアーチ即ち $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$

なる場合に於ては直ちに $\mathcal{H} = \frac{2l}{\pi^2 f} \sin \frac{\pi x}{l} v \dots\dots\dots(8)$

であつて $x = \frac{l}{2}$ 點に於ては $\mathcal{H}_{\frac{l}{2}} = \frac{2l}{\pi^2 f} v$

而して v は 1 に近き數値であるから $\frac{f}{l}$ が約 $\frac{1}{5}$ なるとき $\mathcal{H}_{\max} \approx 1$ で $\frac{f}{l}$ が $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ 等の場合には $\mathcal{H}_{\max} \approx 1.2, 1.4$ なることを知る事が出来る。

又第 2 圖に示す如き左右非對稱形のアーチに於て

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

なる場合の H の影響線は次式で與ふることが出来る。

$$\mathcal{H} = \frac{2l}{\pi^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_2}{4} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) v \dots\dots\dots(9)$$

従て $f_2 = \frac{f_1}{10}$ なる如き場合に於ける H の影響線 \mathcal{H} は $x = \frac{l}{4}$ 及 $\frac{3}{4}l$ に於て、 $y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ なる對稱アーチの場合に比して、夫れ夫れ約其の $+\frac{\sqrt{2}}{40}$ 及 $-\frac{\sqrt{2}}{40}$ の差異あるべきことを認識することが出来る。

又アーチが或る原因に依つて第 3 圖に示す如き變形をなし

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

なる形状を採りたる場合に於ける H の影響線は

$$\mathcal{H} = \frac{2l}{\pi^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_3}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) v \dots\dots\dots(10)$$

となり、1 例として $f_3 = \frac{f_1}{50}$ とすれば $y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ なる場合の \mathcal{H} に對する影響は $x = \frac{l}{6}$, $\frac{5}{6}l$ に於て約 $+\frac{1}{225}$, $x = \frac{l}{2}$ に於て約 $-\frac{1}{450}$ の差異を生ずることが分る。之等の例題に依つてアーチの不整形及變形の影響の一斑を窺知することが出来るのである。

3. 一般式の精度の吟味

前節に於て求めた水平反力の影響線の一般式を實用に供する場合、其の精度を知ることは本式の適用上肝要なる 1 問題である。故に今其の 1 例として拋物線形アーチに就て其の精度を吟味して参考に供し度いと思ふ。

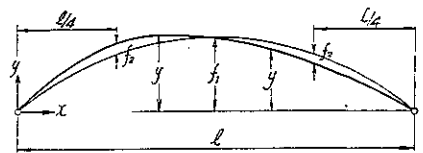
今第 4 圖に示す如き對稱拋物線形 2 絞アーチの軸線の方程式を

$$y = \frac{16}{\pi^3} f \sum \left[\frac{1}{k^3} (1 - \cos k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l} \right]$$

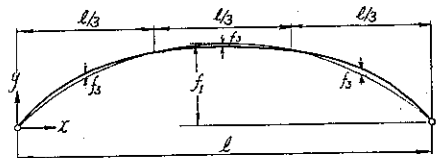
或は $y = \frac{32}{\pi^3} f \left[\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{27} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{125} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right] \dots\dots\dots(11)$

とすれば、前掲 (7) 式によりて $\mathcal{H} = \frac{2}{l} \left[\frac{32}{\pi^3} \cdot \frac{f l^2}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9 \cdot 27} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25 \cdot 125} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \right] v \dots\dots(12)$
 $\left(\frac{32}{\pi^3} \right)^2 f^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(27)^2} + \frac{1}{(125)^2} + \dots \right\}$

第 2 圖



第 3 圖



第 4 圖



故に第 3 項以下を無視すれば

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\frac{\pi l}{16 f} \left\{ \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{243} \sin \frac{3\pi x}{l} \right\}}{1 + \frac{1}{729}} v \dots\dots\dots (13)$$

を得。然るに $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ として求めたる水平反力の影響線は

$$\mathcal{H}_0 = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \left\{ \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \right\} v' \dots\dots\dots (14)$$

但し

$$v' = \frac{1}{1 + \frac{I_0 \int_0^l \cos^2 \varphi dx}{F_0 \int_0^l y^2 dx}}$$

である。故に之等の兩式に於て $v = v' = 1$ として其の主要項の値を比較すれば (13), (14) 式の何れに於ても

$$x = \frac{l}{4} \text{ に對し } \mathcal{H}_0 = 0.1392 \frac{l}{f} \quad \text{又} \quad x = \frac{l}{2} \text{ に對し } \mathcal{H}_0 = 0.1953 \frac{l}{f}$$

となり、其の差異は夫れ夫れ約 $\frac{1}{1390}$ 以下及 $\frac{1}{1950}$ 以下である。之によつて前節に於て求めた一般式の精度の一斑を知ることが出来ると思ふ。

4. 結 語

本文は其の緒言に於て述べたる如く、2 鉸アーチの形状並に變形の水平反力に及ぶ影響に就て稍一般なる解法を試みたものである。本文に示すか如く其の解法に Fourier 級数を適用せることによつて、アーチの形状が不對稱形に變形せる場合であつても又アーチが代數函數に示し難い様な形状を採る場合であつても (其の形状を Fourier 級數に示すことが出来れば) 比較的容易に其の性質を知ることが出来る。然も其の級數が急速に收斂するものであればある程水平反力の影響線の式は更に急速に收斂する。従て正弦曲線とか拋物線狀のアーチに在つては簡単な算式で精度の高い結果が容易に得られる。

2 鉸アーチの解法として本文に示す様な解法を適用することは、場合に依つては必ずしも便利であるとは限られないのであるが、前述の様に形状の變化の影響を知らんとする場合であるとか、更に進んで 2 鉸アーチの振動問題の解法であるとか、又安定度に関する問題の解法等に對しては此の種の解法によることが便利であると信ずる次第である。

本文の解法の適用上特に除外せらる可き場合としてはアーチの兩端に於ける法線 (normal line) の内方夾角が 2 直角を超過する如き場合を挙げなければならぬ。これは Fourier 級數の適用に困難があること、水平反力の影響線が一般に不連続性を有することとなるからである。かかる場合の不連続性に關しては相當興味ある問題もあるが他の機會に譲ることとする。(完)