

参 考 資 料

第 21 卷 第 4 號 昭和 10 年 4 月

プラニメーターの原理に依る新しい
調和分析器械

（“J. Harvey, Un Nouvel Analyseur Harmonique
basé sur le principe du planimètre polaire”
Le Génie Civil Tome CV-N° 24, 1934.

1895 年 4 月の Philosophical Magazine に G. Udny Yule 氏はある 函数の調和分析をする事の出来る器械の原理を説明しその器械を描いてゐる。著者は次に示す原理を再び発見し、その器械を製作した。そして Yule 氏の手記で知られたよりも、もつと詳しく畫を描いて置かう。新しい器械はプラニメーターを用ひる事も要らなければ、更にその機構は、面積の計算、ある軸に関する面積の 1 次率及び 2 次率の計算も出来る様につてゐる。この器械の土臺となる數學の原理は新しい器械に直接應用される爲めに Yule 氏のものとは異なつた形に於て次の如く與へられる。

理論： 角 x が 0 と 2π の間にある時ある函数 $f(x)$ の Fourier の級数展開 $a_0 + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx$ に於ける係数 $a_0, a_n, b_n, (n=1, 2, \dots)$ を與へる公式は

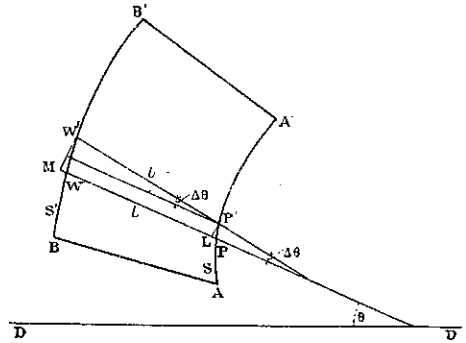
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

である。係数 a_0 は、曲線 $y=f(x)$ の $0-2\pi$ の間の平均の高さである。これは 曲線 x 軸及び $x=0, x=2\pi$ に於ける縦軸の間の面積を分割する事に依つて決定出来る。面積を決定するための器械の使用法は後に説く。先づ係数 a_n, b_n を器械に依つて決定する理論を作り上げやう。一定長さ l の一つの軸の両端 P 及び W を 2 つの固定した曲線 AA' と BD' に沿つて初めの位置 AB から終りの位置 $A'B'$ まで移動させよ (第 1 圖)。

定方向 DD' と位置 PW に於て軸のなす角を θ とせよ。そして $s=AP, s'=BW$ とし、 $P'W'$ を PW の位置と無限に近い軸の位置とせよ。然してその間の

第 1 圖



角を $\Delta\theta$ とせよ。

若し $P'L$ 及び $W'M$ が PW と垂直ならば、

$$LP' = \text{弦 } PP' \sin \widehat{LPP'}$$

$$MW' = \text{弦 } WW' \sin \widehat{MWW'}$$

又一方 $MW' = LP' + W'P' \sin \Delta\theta$

これより $\text{弦 } WW' \sin \widehat{MWW'} = \text{弦 } PP' \sin \widehat{LPP'} + W'P' \sin \Delta\theta$

又は $\frac{\text{弦 } WW'}{\Delta s'} \cdot \sin \widehat{MWW'} \cdot \Delta s' = \frac{\text{弦 } PP'}{\Delta s} \cdot \sin \widehat{LPP'} \cdot \Delta s + W'P' \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \cdot \Delta\theta$

然して $\Delta s \rightarrow 0$ とし

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\text{弦}}{\text{弧}} \right| = 1$$

とすれば

$$\sin \widehat{MWW'} ds' = \sin \widehat{LPP'} ds + l \cdot d\theta$$

この微分の關係を AB 及び $A'B'$ の兩位置間に積分して、

$$\int_B^{B'} \sin \varphi' ds' = \int_A^{A'} \sin \varphi ds + l(\theta' - \theta),$$

茲に φ 及び φ' は PW が曲線 AA' 及び BB' の夫々 P 及び W に於ける切線となす角であり、 θ 及び θ' は夫々 AA' 及び BB' が DD' となす角である。若し軸の移動する間に W に於てそれに固定され

しかも PW と一致する 1 つの軸 (又はそれに平行な直線) のまわりに自由に廻轉する事が出来る小さな輪が 1 回だけ廻轉し、紙面に沿つて滑りうるものとするならば、その小さな輪の縁でたどられた輪の展開 ω (le développement circonférentiel ω roulé par la tranche de la roulette) は

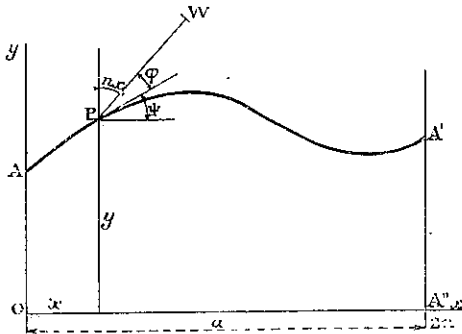
$$\int_B^{B'} \sin \varphi' ds'$$

であり、直ちに

$$\omega = \int_A^{A'} \sin \varphi ds + l(\theta' - \theta)$$

今 AA' (第 2 圖) を $y=f(x)$ なる函数をあらはす

第 2 圖



曲線の $x=0$, と $x=2\pi$ の間とする。0 と 2π の間の角の間が長さ a であらはされてあるとする。小輪を W 點に持ち來たし軸 PW の端 P をして曲線 OAA' A''O を周つて描かしめよ。この變位の間に於て、P W' をして、すべての x 座標に對して、P から y の正方向と nx の角をなさしめる (n は正の整数)。さうすれば、PW は P が AA' を描く間に、時計の針の方向に、完全な n 回轉をする。そして P が A''O を描く間に反對の方向に完全な n 回轉をする。P が OA 及び A'A'' に沿つて變位する間は、PW はその線に沿つて置かれ、小輪が回轉する事なしにたゞ紙の上を滑る。P が曲線 AA' を描く時には、PW は P に於ける曲線の切線と角 $\varphi = \pi/2 - (nx + \psi)$ をなす。茲に ψ は切線の x 軸となす角である。變位の間に小輪の縁に依り正の方向に廻つてなされた展開は上の公式を用ひて、

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin \varphi ds + l \cdot 2\pi n \\ &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos(nx + \psi) ds + l \cdot 2\pi n \\ &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nx \cos \psi \cdot ds \\ &\quad - \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin nx \sin \psi ds + l \cdot 2\pi n \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nxdx \\ &\quad - \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin nx \cdot dy + l \cdot 2\pi n. \end{aligned}$$

又は部分積分をして、

$$\begin{aligned} &= - \left[y \sin nx - n \int y \cos nxdx \right]_{x=0}^{x=2\pi} + l \cdot 2\pi n \\ &= n \int_0^{2\pi} y \cos nxdx + l \cdot 2\pi n \end{aligned}$$

P が道 A''O を書く時には、小輪の縁に依つて負の方向に廻つてなされた展開 ω_2 は、線 A''O の總ての點に對して、 y が 0 であるから、 $\omega_2 = l \cdot 2\pi n$ である。直ちに若し P が閉曲線 OAA'A''O を描くならば、小輪に依つて正の方向に廻られた周上の長さ (la longueur circonférentielle roulée positivement par la roulette) は

$$\omega_1 - \omega_2 = n \int_0^{2\pi} y \cos nxdx$$

若し小輪の直径が d で m をその回轉數とすれば

$$\omega_1 - \omega_2 = m\pi d.$$

$$\text{直ちに } m\pi d = n \int_0^{2\pi} y \cos nxdx$$

これより $\frac{m\pi d}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos nxdx = a_n$, Fourier 級數展開に於ける $\cos nx$ の係數

今曲線 OAA'A''O に沿つての P の變位の間に、桿 PW が總ての P の x 座標に對して、 x の負の方向と nx の角をなすものとしやう。P が OA を描いてゐる間は積分器の小輪は正の方向に周の長さ $\omega_1 = OA$ だけ廻る。P が A'A'' に沿ふて歸つて來る間には小輪は逆に即ち負の方向に周の長さ $\omega_2 = A'A''$ だけ廻る。

P が曲線 AA' に沿つて變位する時に PW は P に於ける曲線の切線と $\varphi = \pi - (nx + \psi)$ の角をなす。文字は第 2 圖に於けると全く同じものをあらはすとす。この間に小輪の縁に依つて正の方向に廻轉される展開 ω_3 は、

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin \varphi ds + l \cdot 2\pi n \\ &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin (nx + \psi) ds + l \cdot 2\pi n \\ &= \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin nx \cos \psi ds \\ &\quad + \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nx \sin \psi ds + 2l \cdot 2\pi n \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin nxdx \\ &\quad + \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nxdy + l \cdot 2\pi n\end{aligned}$$

又は部分積分をして、

$$\begin{aligned}&= \left[y \cos nx + n \int y \sin nxdx \right]_{x=0}^{x=2\pi} + l \cdot 2\pi n \\ &= A''A' - OA + n \int_{x=0}^{x=2\pi} y \sin nxdx + l \cdot 2\pi n\end{aligned}$$

最後に P が A''O の道に沿つて零に歸る時には、小輪の縁に依つて負の方向に廻轉される展開 ω_4 は $l \cdot 2\pi n$ である。直ちに、閉曲線 OAA'A''O に沿つて P が一廻轉する間に、積分器の小輪は、結局正の方向に周の長さ

$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4 = n \int_{x=0}^{x=2\pi} y \sin nxdx$$

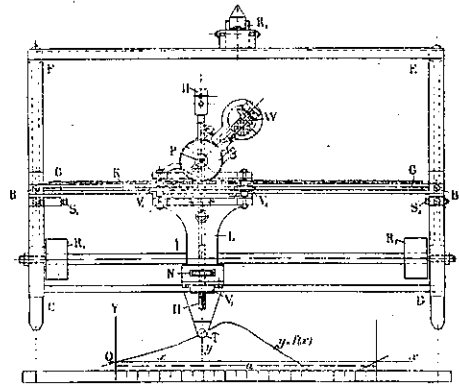
だけ廻る。若し m を小輪の廻轉の數とすれば、

$$\begin{aligned}\frac{m \cdot d}{n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin nxdx \\ &= b_n, \text{ Fourier 級数展開に於ける } \sin nx \\ &\quad \text{なる項の係数}\end{aligned}$$

器械について： こゝに軸 PW の一端 P は、 x の方向に 2π ラジアンをあらはす a なる部分の内で限られた 1 つの邊緣を描かせられる事が出来、PW は、 y の正方向又は x の負の方向と各々の點 P に於て、夫々係数 a_n, b_n を $n=1$ から $n=6$ まで計算出来る

如く、角 nx をなす事が出来る様に作られた。四角な枠 CDEF (第 3 圖) は、 R_1, R_2, R_3 の 3 つの輪に依つて y の方向に動かし得る。そして R_1 と R_2 は共通軸を有し、 x の軸と R_3 の軸は平行である。枠を 2 つに分けてある 1 本の貫木 BB' がありその上面には凹み G に依つて直角に刻みをつけられ、後ろの垂直面には齒板 K がある。そしてその凹み及び齒板は共に x 軸に平行である。

第 3 圖



1 つの車 L は 2 つの車 V_1, V_2 及び刻みに沿つた V の縁、そして又枠の前の縁 CD に沿つてまわる圓筒形の車 V_3 の上につてある。車は止めの臺 S_1 及び S_2 の間を x 軸の方向に自由に動く事が出来、その場合にその車に固定された出つ張り上の點 T は、 x の軸の上を 0 から 2π の間を示してある距離 a (約 24 cm) を動く様になつてある。枠が y 方向に自由に動き、車が x 方向に自由に轉じうる事から、點 T はこの區間内のいかなる限られた曲線をも描く事が出来る。其の代りに、T の y の方向の變位は限られてゐない。車 L はその下面に、桿のうしろに (y の軸と平行な) 遊標 HH を持つてゐる。そして、HH はそのねぢを切つた尾に沿つて、しめつけられた雌ねぢ N に依つて移動出来る。1 本の心棒 P が桿 HH の垂直な穴に刺し通され、その垂直線の周りに廻り得る。この心棒の上端に齒をきざんだ車を付けて、 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に對する $a/2\pi n$ の値を示す様にする事が出来る。

心棒 P の下端には小さな粹を付けその粹には軸が心棒 P の幾何學的軸を通つてゐる様な積分器の小輪があつて、紙の上を轉がる様になつてゐる。器械を合はせるには車 L を止め S₁ に觸れるまで隅の方に持つて來て、點 F が座標原点にある様にする。次ぎに心棒に、齒を切つた車を通す前に、N を廻轉して、車と齒板が、PW が原点に於て係數 a_n 又は b_n を求めるに従つて夫々 y の正方向又は x の負の方向である様な位置に於て噛み合ひ初める様におく。T 點で曲線を描けば、P は全く幾何學的に等しい曲線を描き、PW は +y 又は -x の方向と x, y の位置に於て n x の角をなすのである。實際に作つた器械は積分器の小輪 W の直徑 d が 2 cm である。まだこの器械をプランメーター、積分器として使ふ方法もあるが省略する。

(最上武雄 抄譯)

2 つの自由度を有する系の振動様式

(W. Quade "Die Schwingungsvorgänge in Systemen mit zwei Freiheitsgraden" Z.A.M.M. Heft 6. Dezember 1934)

1 つの自由度を有する系に於ける最も簡単な振動の問題は自由振動のみに限るならば 2 階の線形で同次の常數係數を有する微分方程式に導かれる。

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0, \text{ 又は } (aD^2 + bD + c)x = 0 \dots (1)$$

a, b, c は正の常數で D は微分の operator (Differentialoperator) で x は例へば振動してゐる質點の(時間によつて變る)靜止點からの位置を示す。(1)式の有する解は次の (1) 式に對する特有方程式 (Charakteristische Gleichung)

$$a(D) = aD^2 + bD + c = 0 \dots (2)$$

の根の性質によつて異なる。それ故に次の様な場合に分ける。

[1] 類 (2) 式の根が相異なる場合

- (a) 2 根が實數である。aperiodic の場合。
- (b) 2 根が共軛な複素數である、周期的な場合。

[2] 類 (2) 式の 2 根相等しき場合、 aperiodischer Grenzfall.

此處に與へた分類は、從來のそれとはいくらか異つてゐる。ある類に屬すると言ふ事は、(2) 式の根が何重根であるかと言ふ事に依つてきまる。1 つの類の中に於ては、その根が實數であるか複素數であるかに依つて分けられる。

これによつて、1 つの自由度を持つた自由振動に於て可能な事象が指摘できる。事象の異同は型的代表的見地に依り、代數的方程式 (2) の根の性質から來る。もつと多くの自由度を有する系に起こり得べき事象を數へたてる事は遙かに困難である。

靜止點からの小さな變位が x₁, x₂ である 2 つの自由度を有する系の自由振動は、常數係數を有する線型同次の 2 階微分方程式の組合に依つてきまる。

$$\begin{cases} (a_{11}D^2 + b_{11}D + C_{11})x_1 + (a_{12}D^2 + b_{12}D + C_{12})x_2 = 0 \\ (a_{21}D^2 + b_{21}D + C_{21})x_1 + (a_{22}D^2 + b_{22}D + C_{22})x_2 = 0 \end{cases} \dots (3)$$

(3) 式の對稱行列は

$$\begin{aligned} M(D) &= \begin{pmatrix} a_{11}D^2 + b_{11}D + C_{11} & a_{12}D^2 + b_{12}D + C_{12} \\ a_{21}D^2 + b_{21}D + C_{21} & a_{22}D^2 + b_{22}D + C_{22} \end{pmatrix} \\ &= AD^2 + BD + C, \end{aligned}$$

そしてこれの特有方程式は行列 M(D) の行列式を 0 とする事に依り得られ

$$A(D) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)D^4 + \dots + C_{11}C_{22} - C_{12}^2 = 0 \dots (4)$$

1 つの自由度を有する系では aD² + bD + c の式の様子で事象が區別されるが 2 つの自由度を有する系では行列 M(D) に依つて區別される。行列 M(D) は次の 3 つの群に分かれる。

I-群 M(D) の要素が互ひに素である。

II-群 M(D) の總ての要素の最大公約數が D についての 1 次多項式である。即ち

$$M(D) = \begin{pmatrix} (D - s_1)(a_{11}D - \sigma_{12}) & (D - s_1)(a_{12}D - \sigma_{12}) \\ (D - s_1)(a_{21}D - \sigma_{21}) & (D - s_1)(a_{22}D - \sigma_{11}) \end{pmatrix}$$

(4) 式は之の場合常に實の 2 重根を有する。

III-群 M(D) の總ての要素の最大公約數が D についての 2 次多項式である。即ち

$$M(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D-s_1)(D-s_2), & a_{12}(D-s_1)(D-s_2) \\ a_{21}(D-s_1)(D-s_2), & a_{22}(D-s_1)(D-s_2) \end{pmatrix}$$

(4) 式は常に二重根をす。

1 つの群の中を類に分ける。その場合に 1 つの自由度を有する系に於けるが如く $d(D)=0$ の根の重複度に依つて分ける。

I-群 [(1111), [2, 11], [22], [3, 1], [4]

大括弧は相異なる 1 次の項の指数である。

II-群 [(11) 11], [(11) 2], [(21) 1], [(31)]

小括弧の中の数字の和は常に 1 次の項 $D-s_1$ の指数を與へる。

III-群 [(11)(11)], [(22)]

この場合は 2 つの類しかない。即ち $s_1 \neq s_2$ 及び $s_1 = s_2$ の場合である。

これに依つて行列 $M(D)$ は 11 の類に分けられた。これ等の分類に於ては、振動の問題に於てあらはれる行列、 $M(D) = AD^2 + BD + C$ に對して規定される状態は残されてある。A, B, C は對稱でなければならず、正のきまつた 2 次形式即ち $2T, 2F, 2U$ の行列でなければならぬ。茲に T, F, U は夫々、運動エネルギー、Rayleigh のエネルギー逸散函数、系の位置エネルギーである。この様な行列はしかし、[(11) 2], [(31)] にはない。これは特殊な現象である。上の例外を除いて各々の類に於て、複素数の根があらはれるか又は、どんな風にあらはれるかと言ふ事を調べる事が残つてゐる。次の表に於て、各々の類に對して複素数の根の對の数が與へられてゐる。

I-群 [(1111), [211], [22], [3, 1], [4]

0	0	0	0	0
1	1	—	—	—
2	—	2	—	—

II-群 [(11) 11], [(21) 1]

0	0
—	—
—	—

III-群 [(11)(11)], [(22)]

0	0
---	---

2 つの自由度を有する系に於ては、實際に相異なる振動様式は 14 である。純粹な周期的と aperiodisch な事象の間の差異は不可能である。其の譯は (3) の解に於ては、同時に周期的と非周期的 (aperiodisch) な性質を有する函数が現はれ得るからである。高々非周期的、周期的、混合的事象と分けられるのみで、9 個の非周期的、3 個の周期的、2 個の混合的事象となる。(最上武雄 抄譯)

風に依つて起こされる大洋の流れ

(G. R. Goldsbrough. "On Ocean Currents Produced by Winds" Proc. Roy. Soc. London, Jan. 1935.)

海の面を平面と假定すると風に依つておこる流れは風の方向と 45° をなすと言ふ事が Ekman に依つて見出され、この結果は Jeffreys や Durst に依つて實際に調べられたが、45° よりも一般に小さい事が分かつた。依つて著者は地球の曲率を考へに入れて問題を處理した。

r, θ, ϕ を球面座標とし、 u, v, w をそれに対応する速さの成分とし、 ν を kinematic viscosity の係數とすると、運動方程式は

$$-2\omega \cos \theta v = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \nu \left[\nabla^2(u) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right] \dots \dots \dots (1A)$$

$$2\omega \cos \theta v + 2\omega \sin \theta w = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \phi} + \nu \left[\nabla^2(v) + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right] \dots \dots \dots (1B)$$

$$-2\omega \sin \theta w = \frac{\partial Q}{\partial r} + \nu \left[\nabla^2(w) - \frac{2w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cot \theta u - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right] \dots \dots \dots (1C)$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r} w + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \dots \dots \dots (1D)$$

地球の半徑 a に比して大洋の深さは小さいから、

$r=a, \partial/\partial r = \partial/\partial z$ とする事に依つて方程式は簡単になる。 z は自由面からの垂直距離である。しかる時は

$$Q = -p/\rho - g(z+\zeta) \dots \dots \dots (2)$$

であるとはもと z にあつた質點の變位した位置である。今 w を u, v に比して小さいとして無視し $\cos\theta = \mu$ とおけば (1) 式を變形して、

$$-2\omega\mu v = -\frac{1}{a}\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial Q}{\partial\mu} + v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu} + \frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} - \frac{u}{a^2(1-\mu^2)} - \frac{2\mu}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial v}{\partial\phi}\right] \dots \dots \dots (4A)$$

$$2v\mu u = \frac{1}{a\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial Q}{\partial\phi} + v\left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{a^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu} + \frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} - \frac{v}{a^2(1-\mu^2)} + \frac{2\mu}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right] \dots \dots \dots (4B)$$

$$0 = \sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial u}{\partial\mu} - \frac{\mu u}{\sqrt{(1-\mu^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial u}{\partial\phi} \dots \dots \dots (4C)$$

今 p, q なる 2 量を導いて

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial p}{\partial\mu} - \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial q}{\partial\phi} \\ v &= -\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial q}{\partial\mu} - \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial p}{\partial\phi} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

そして
$$A \equiv \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

とすれば、(5) を (4C) 式に入れる事に依り

$$A(p) = 0$$

この方程式は $p=0$ の他兩極に於て有限な解はない。

故に (5) の代りに

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial q}{\partial\phi} \\ v &= -\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial q}{\partial\mu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

これ等に依つて、 q についての方程式を求むれば

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial q}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\phi^2}\right\} - \frac{2\omega}{v}\frac{\partial q}{\partial\phi} = 0 \dots (9)$$

これを解くと

$$q = P_n^s(\mu)[A\{\cos\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d) + \sin\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d)\} + B\{\sin\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d) - \cos\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d)\}]$$

$$u = -\frac{sP_n^s(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}}[A\{\cos\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d) + d\} - \sin\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d)] + B\{\cos\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d) + \sin\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d)\},$$

$$v = -\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{dP_n^s(\mu)}{d\mu}[A\{\cos\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d) + d\}(\cos\alpha_n^s(z+d) + \sin\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d)) + B\{\sin\phi\sinh\alpha_n^s(z+d)\cos\alpha_n^s(z+d) + d\}(\cos\alpha_n^s(z+d) - \cos\phi\cosh\alpha_n^s(z+d)\sin\alpha_n^s(z+d))]$$

茲に

$$\alpha_n^s = \sqrt{\frac{\omega s}{vn(n+1)}}$$

である。

風の大洋の表面への影響は、切線應力を生ずるにある。この切線應力はある函數 $\psi(\theta, \phi)$ から次の如く導かれるものと假定する。

$$p_{z\theta} = -\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$p_{z\phi} = -\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}$$

處が氷の方では

$$[p_{z\theta}]_{z=0} = \bar{\mu}\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{a}\right\}_{z=0} = \bar{\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=0}$$

$$[p_{z\phi}]_{z=0} = \bar{\mu}\left\{\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\phi} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{a}\right\}_{z=0} = \bar{\mu}\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z=0}$$

今 $\psi(\mu, \phi)$ として $CP_n^s(\mu)\sin\phi$ を取れば

$$A = \frac{C}{2\alpha_n^s} \frac{\cosh\alpha_n^s d \cos\alpha_n^s d + \sinh\alpha_n^s d \sin\alpha_n^s d}{\cosh^2\alpha_n^s d - \sin^2\alpha_n^s d}$$

$$B = \frac{C}{2\alpha_n^s} \frac{\cosh\alpha_n^s d \cos\alpha_n^s d - \sinh\alpha_n^s d \sin\alpha_n^s d}{\cosh^2\alpha_n^s d - \sin^2\alpha_n^s d} \dots \dots \dots (13)$$

又今簡単のため

$$q = e^{\alpha_n^s(1-i)z + is\phi} P_n^s(\mu) \dots \dots \dots (18)$$

とにおいて且つ風による切線應力が $P_n^s(\mu) \sin s\phi = \text{const.}$ の様な分布をしてるとすれば stream function は

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu}\alpha_n^s} P_n^s(\mu) e^{\alpha_n^s z} \cos(s\phi - \alpha_n^s z - \pi/4) \dots(21)$$

で

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{s P_n^s(\mu) e^{\alpha_n^s z}}{\sqrt{2\mu}\alpha_n^s \sqrt{(1-\mu^2)}} \sin(s\phi - \alpha_n^s z - \pi/4) \\ v &= \frac{\sqrt{(1-\mu^2)} \frac{d}{d\mu} P_n^s(\mu) e^{\alpha_n^s z} \cos(s\phi - \alpha_n^s z - \pi/4)}{\sqrt{2\mu}\alpha_n^s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

自由面に於ける流線は

$$P_n^s(\mu) \cos(s\phi - \pi/4) = \text{const.} \dots\dots\dots(23)$$

又は $P_n^s(\mu) \sin(s\phi - \pi/4) = \text{const.}$

で示される。例へば風に依る切線應力が

$$P_n^s(\mu) 3 \sin 3\phi = \text{const.} \dots\dots\dots(24)$$

であるとすれば流線は

$$P_n^s(\mu) \sin(3\phi + \pi/4) = \text{const.} \dots\dots\dots(25)$$

である。(24) 式の曲線は $\phi=0$ と $\phi=\pi/3$ 及び赤道でかこまれた閉曲線の組で、北及び南大西洋と似た形をしてゐる。

この結果は大體に於て實測の結果をあらはしてゐる。又風に依る閉じた流れはそれ自身同じ様な曲線に沿つて動いてゐて、その後者は西の方にづれてゐることも分かる。(最上武雄 抄譯)

開水路内の整流と攪亂流

(J. Allen. "Streamline and Turbulent Flow in Open Channels." Philosophical Magazine & Journal of Science, June 1934, P. 1081~1112)

開水路内の定流は次の方程式にて與へられる。

$$\frac{dh}{dl} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dl} + \frac{fv^2}{2gm}$$

但し h : 水深, l : 長さ, v : 任意断面の平均流速, m : 任意断面の徑深, f : 係數。

故に l なる距離にある 2 點 A, B 間の水位差を δh とすれば

$$f = \frac{(\delta h - \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g}) 2gm}{lv^2} = \frac{2R}{\rho v^2}$$

R : 壁の單位面積當りの抵抗, ρ : 水の密度である。

著者は精密なる實驗によつて $\delta h, l$ 及び A, B に於ける水深を測定して之より v_A, v_B, m 等を計算し、更に f の値を計算して之と Reynolds 數 vm/v (v : 水の動粘性係數) との關係を調べた。而してその結果より開水路内に於ける限界速度の説明を試みた。得たる結果のみを此處に列記すれば次の如くである。

(a) 開水路に於ける 限界流速 (減速限界流速) は $vm/v = 1400$ の時に起り、この値は側壁及び底の粗度に無關係である。

(b) vm/v が 300 以下の時は損失水頭は整流の假定の下に打算した値とよく一致する。之がやゝ大きくなれば整流に横流の加つた状態を現はし損失水頭は増加する。

(c) 攪亂流にては f と vm/v との關係を圖示すれば滑らかな壁面の時は 1 曲線となる。之を大なる Reynolds 數に對して行はれた他の實驗の結果に一致させる爲にこの曲線を延長するには次の如き形が適當である。

$$f = 0.0234 \left(\frac{vm}{v} \right)^{-0.15} \dots \dots (\text{ft-lb-sec})$$

(d) 側壁は滑かて底が粗い時は攪亂流に對して Bazin の公式

$$C = \frac{157.6}{1 + N/\sqrt{m}} \quad (\text{ft 單位})$$

にて N を 0.195 とせるものが實測に近い。

(e) 側壁及び底が共に粗面なる時は上と同じ公式にて N を 0.225 とせるものが實測値によく一致した。(本間 仁 抄譯)

流體の表面に於ける輪狀波の問題

(Hans. Widenbauer: "Das Problem der Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche." Zeitschrift für angewante Mathematik und Mechanik, Dez. 1934, S. 321~332)

ある一定水深の無限に廣い、静止せる水域の1箇所に何等かの原因によつて運動が與へられれば表面に輪狀の波を生じて傳播する。水を非壓縮性としてその摩擦を考慮せず、外力は重力のみとすれば最初静止なりしか故に無渦運動 (irrotational motion) である。従つて速度ポテンシアル φ が存在し

$$\Delta\varphi=0 \dots\dots\dots(1)$$

座標は (r, α, y) , 水面は $(r-\alpha)$ 面, y 軸は鉛直上向きにて原點に於て最初の運動が與へられるものとする。水深を h とすれば境界條件は

$$y=-h \text{ にて } \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

水面は $y=\eta$ にて表はす, 水面上昇 η が小さければ水面に於ける條件は

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right]_{y=\eta} = g\eta \quad \text{及び} \quad -\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right]_{y=\eta}$$

運動は軸對稱の週期運動であるから (1) 式の解は次の形を有する。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \cos\omega t \cdot J_0(kr) \\ \varphi &= g \frac{\sin\omega t \cosh k(y+h)}{\omega \cosh kh} \cdot J_0(kr) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ω と k 及び h の關係は

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

最初の條件を原點を中心とする半徑 d の圓形の水面上が深さ C だけ陥没するものとするれば $t=0$ にて

$$\eta = \begin{cases} -C & \dots(r \leq d) \\ 0 & \dots(r > d) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

この最初の水面形を Fourier の積分にて表はせば

$$F(r) = \int_0^\infty k \cdot J_0(kr) dk \int_0^\infty \alpha F(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha$$

この場合は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha F(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha &= -C \int_0^d \alpha J_0(k\alpha) d\alpha \\ &= -\frac{Cd}{k} J_1(kd) \end{aligned}$$

$$\therefore \eta = -Cd \int_0^\infty J_1(kd) J_0(kr) \cos\omega t \cdot k$$

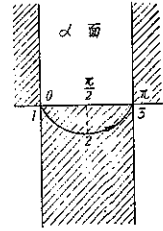
$$\varphi = -Cgd \int_0^\infty J_1(kd) J_0(kr) \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\sin\omega t}{\omega} dk \\ \omega^2 &= gk \tanh(kh) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

水深 h が波長 $2\pi/k$ に比して大なる場合を考へれば

$$\omega^2 = gk$$

第 4 圖



此處にて

$$J_0(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos\alpha} d\alpha$$

の關係を用ひれば積分の收斂なる爲には α 面に於て積分路を第 4 圖の 1-2-3 の如く取らなければならない。かくして更に $n = \sqrt{kd}$ と書けば

$$\eta = -\frac{2C}{\pi} R \left\{ \int_1^\infty d\alpha \int_0^\infty dn \cdot n J_1(n^2) e^{i\rho(1-2\cos\alpha+2\sigma n)} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{但し } \rho = \frac{r}{d}, \quad 2\sigma = \sqrt{\frac{gd^2}{r^2}} \dots\dots\dots(6)$$

(5) 式の積分計算は省略するが $\frac{r}{d} \gg 1, \frac{gt^2}{4r} \gg 1, \frac{gd^2}{4r^2} \ll \frac{r}{d}$ なる條件の下に

$$\eta = -C\sqrt{2} \frac{d}{r} J_1\left(\frac{gd^2}{4r^2}\right) \cos\frac{gt^2}{4r} \dots\dots(7)$$

特殊の場合として陥没の半徑 d が零に近く而も陥没量 $a^2\pi C = \Gamma$ は一定なる場合を考へれば (7) より $d \rightarrow 0$ として

$$\eta = -\frac{gt^2\Gamma}{2\frac{1}{2}\pi r^2} \cos\frac{gt^2}{4r} \dots\dots\dots(8)$$

之は Lamb の Hydrodynamics 中にも擧げてある形であるが、次に d がある有限の大きさを有する場合は

$$\eta = -\frac{4C}{\sqrt{gd\pi}} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{gd^2}{4r^2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{gt^2}{4r} \dots\dots(9)$$

にて表はされる。之は急に似た振動であつて各場所の振幅が又週期的に増減するのである。而て r の位置に於ける第 n 番目の最大振幅の現れる時間は

$$t_n = 2r\sqrt{\frac{an}{gd}}, \quad a_n = \frac{gd^2}{4r^2}$$

にて與へられる。(本間 仁 抄譯)

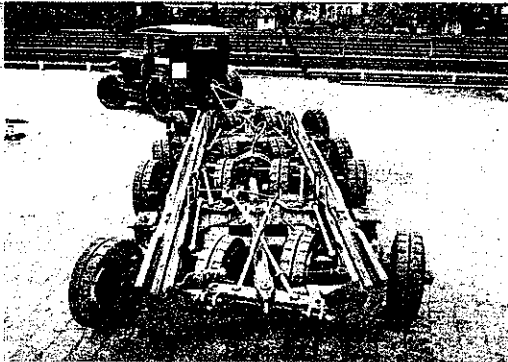
ドイツに於ける貨車の路面輸送

(Bulletin of the International Railway
Congress association, October 1934)

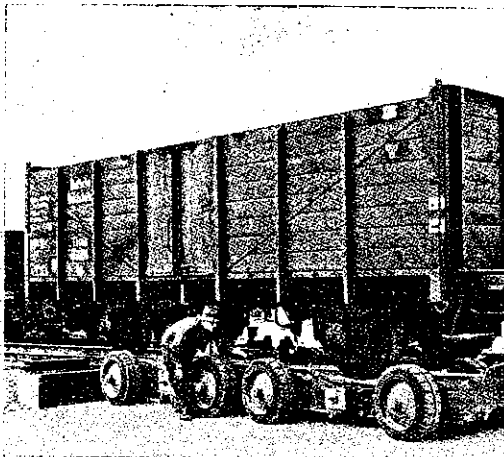
貨車運送車は貨物停車場から引込線のない荷受人の所へ貨車に積込んだまま、貨物を輸送するのに用ひられるものであつて、こゝろ運送車を作つて置けば重量貨物に對しても戸口から戸口へのサービスをすることが出来、積荷主は荷作りの費用や、積み込み積降しに要する費用時間等が省け、同時に積換等による破損や盗難の恐れもなくなるのである。

ドイツ國有鐵道會社では之を 1933 年の秋から始めて、今では殆んど完成の域に達してゐる。

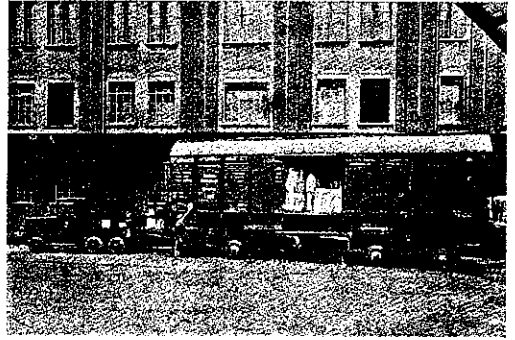
第 5 圖 ドイツ國有鐵道會社の貨車を輸送する運送車



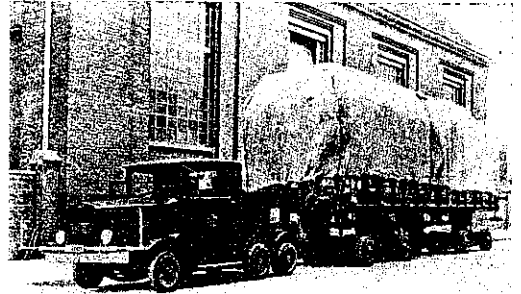
第 6 圖 軸距 4.5 米の Om 形 20 ton 貨車を運送車へ積込んでゐるところ



第 7 圖 ドイツ國有鐵道會社最大の軸距 7 m Glt 形有蓋貨車に工場で荷物を積込んでゐるところ

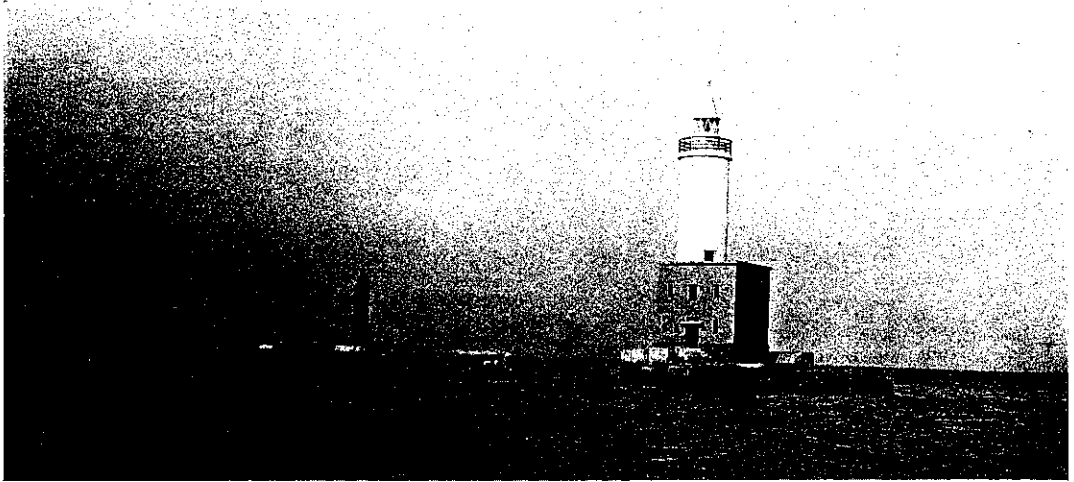


第 8 圖 軸距 6 m の R 形貨車の路面輸送



(高橋憲雄 抄譯)

竣工せる横濱港新燈臺



昭和 10. 5. 6.



昭和 10. 5. 6.

構 造： 鐵筋コンクリート造圓形

燈 臺 高： 平均水面上 20.3 m.

等 級： 第4等, アセチレン瓦斯急閃光(毎5秒時間を隔て、3秒時間に急閃光)

燈 色： 紅色 ヨーロッパ堤(北)
白色 アヂヤ堤(南)

燭 光 數： 1 200

光 達 距 離： 14 浬

施 工 者： 内務省横濱土木出張所