

論 說 報 告

第 21 卷 第 8 號 昭和 10 年 3 月

跳 水 現 象 の 實 験 的 考 察

會 員 今 野 彦 貞*

Experimental Research on the Hydraulic Jump

By Hikosada Konno, Member.

内 容 梗 概

跳水現象に關する最も信ず可き理論を述べ底部水平に置かれたる矩形断面を有する實驗樋に就て跳水實驗をなし、其の結果より種々の水理値を求め跳水距離算定に關する著者の一方式を示す。

第 1 章 跳 水 理 論

1. 緒 論

一般に跳水は水流が射流より緩流の状態に急にうつる時に生ずる現象である。

今第 1 圖に示すが如き水路の縦断面を考へ跳水始終の横断面を (1), (2) とする。(1) 及び (2) に於ける流水の有する energy head は次式にてあらはさる。

$$h_1 = d_1 + v_1^2/2g \qquad h_2 = d_2 + v_2^2/2g \dots\dots\dots (1)$$

$$h_1 - h_2 = h_j \dots\dots\dots (2)$$

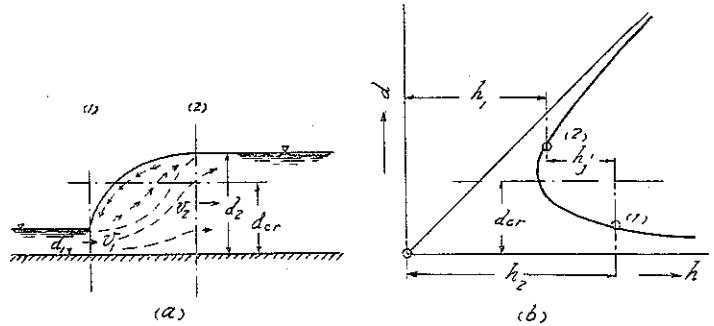
とすれば h_j は跳水によりて失はれたる energy head をあらはす。

此の h_j は大部分 impact type にして普通の摩擦損失に比して大である。

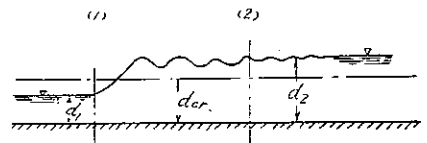
跳水には次の如き 2 つの明かな型がある、其の 1 は第 1 圖 (a) の如く水面は連続して次第に上昇し遂に下流水深に達するもので、之を側面硝子張りの樋中に於て見る時は水面近くの水分

子は廻轉して渦巻を生じ底部附近の流水は擴大して流下し跳水現象を鮮明に認むる事を得、此の種のを完全跳水 (direct jump) と名付く、然るに流量を大にし従て v_1 が大なるに比し、下流水深の浅き場合には第 2 圖に示すが如く (1) より (2) に向つる状態は連続した波動をなし、次第に靜かになつて流下する。此の種のを波狀跳水 (undular jump) と名付く。完全跳水に於ては跳水の始と終とは比較的明瞭に觀測するを得るも、波狀跳水に於ては之を定むる事困難である。

第 1 圖



第 2 圖



* 仙臺高等工業學校助教授

2. 跳水に因る energy の消費量

今 w を水の單位容積の重量, Q を断面の全流量とし, 水深 d_1 の断面の全壓力を P_1 , 水深 d_2 の夫れを P_2 とすれば跳水前後兩横断面の energy の差 E は (1) 式より次の如くなる。

$$E = wQ \left[(d_1 + v_1^2/2g) - (d_2 + v_2^2/2g) \right] = wQ \left[(v_1^2 - v_2^2)/2g - (d_2 - d_1) \right] \dots\dots\dots (3)$$

然るに $P_2 - P_1 = wQ(v_1 - v_2)/g$

$$\text{又} \quad P_1 = \frac{1}{2}wb d_1^2, \quad P_2 = \frac{1}{2}wb d_2^2$$

式中 b は水路の幅をあらはす故に $\frac{1}{2}wb(d_2^2 - d_1^2) = wQ(v_1 - v_2)/g$

定流 (不均流なるも) とすれば $v_1 = Q/bd_1, \quad v_2 = Q/bd_2$

$$v_1 - v_2 = Q/b \cdot (d_2 - d_1)/d_2 d_1$$

$$\frac{1}{2}b(d_2^2 - d_1^2) = Q^2/bg \cdot (d_2 - d_1)/d_2 d_1$$

$$\frac{1}{2}Q^2/b^2g = \frac{1}{4}(d_2 + d_1) \cdot d_2 d_1$$

故に $v_1^2/2g = (d_2 + d_1)d_2/4d_1$ 同様に $v_2^2/2g = (d_2 + d_1)d_1/4d_2$

$$(v_1^2 - v_2^2)/2g = (d_2 + d_1)(d_2^2 - d_1^2)/4d_2 d_1 \dots\dots\dots (4)$$

(4) 式を (3) 式に代入する時は跳水に因る energy loss E は次の如くなる。

$$E = wQ(d_2 - d_1)^3/4d_2 d_1 \dots\dots\dots (5)$$

之を head の形にてあらはせば (2) 式の

$$h_f = (d_2 - d_1)^3/4d_2 d_1 \dots\dots\dots (6)$$

となる。

3. 跳水前後の水深に就て

次に跳水前後の水深 d_1 と d_2 との關係をしらぶるに

$$(4) \text{ 式より} \quad d_2^2 - d_1^2 = (v_1^2 - v_2^2)/2g \cdot 4d_2 d_1/(d_2 + d_1)$$

然るに $v_1 d_1 = v_2 d_2, \quad v_2 = \frac{d_1}{d_2} v_1$ なるを以て

$$d_2^2 - d_1^2 = v_1^2(d_2^2 - d_1^2)/2g d_2^2 \cdot 4d_2 d_1/(d_2 + d_1) = 4v_1^2/2g \cdot (d_2 - d_1)d_1/d_2$$

$$\therefore \quad d_2 + d_1 = 4v_1^2/2g \cdot d_1/d_2, \quad d_2^2 + d_2 d_1 - 4d_1 v_1^2/2g = 0 \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式を解いて正號のみをとれば

$$d_2 = \frac{1}{2}d_1 \left[\sqrt{1 + 8v_1^2/gd_1} - 1 \right] \dots\dots\dots (8)$$

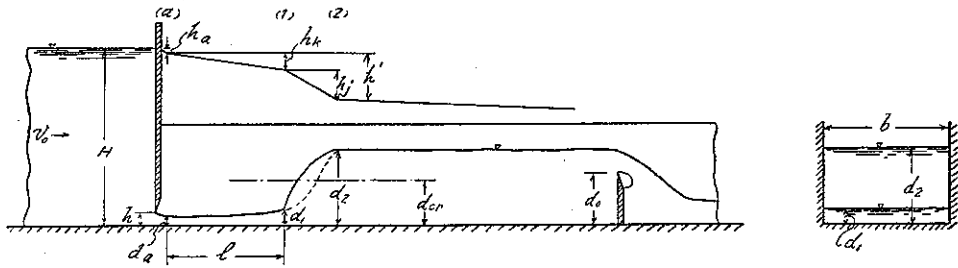
$$\text{同様に} \quad d_1 = \frac{1}{2}d_2 \left[\sqrt{1 + 8v_2^2/gd_2} - 1 \right] \dots\dots\dots (9)$$

第 2 章 水平底部を有する矩形断面の實驗水路内に於ける跳水に就て

1. 概 説

第 3 圖に示すか如き水路の幅 b を有する水平に置かれたる矩形断面の實驗樋中に制水門を設け水門の開きを h とする。今樋中に水を通し上流水槽内に H なる水頭を與へる。

第 3 圖



初め H の小なる間は水門下流に跳水現象を認むるを得ず、殊に下流に溢流堰の如きものを置き最初より d_0 なる水深を與ふる時は水門直下流に渦を生じ潛流 (submerged flow) となつて流下する。次に流量 Q を増し H を増大せしむる時は、或 H に達して初めて跳水し初め完全なる跳水を呈し其の先端 (toe of jump) は水門より次第に離れ初む、夫れより尙ほ H を増加する時は跳水の先端は水門より l なる距離に達し、已然として比較的完全なる跳水現象を呈するも一層 H を増大せしむる時は遂に完全跳水の型は破られ波狀跳水となつて流下する。

今 l なる距離の所に完全跳水現象が生じて釣合を保ちたる場合の energy head の消失を考ふ。

先づ水槽内の接近速度 (velocity of approach) を v_0 とすれば $(H+v_0^2/2g)$ なる energy head を有する水は水門の開き h を通つて vena contracta (a) に達し d_a なる水深と v_a なる流速とを有する迄には $h a$ なる energy head を失ひ、夫れより l なる距離にある (1) 横断面に達し、 d_1 なる水深と v_1 なる流速とを有する迄には $h v_1$ なる head を失ふ。而して此處より (2) 横断面の間に於て h_j なる主として跳水による energy head を損失し d_2 なる水深と v_2 なる流速となつて流下する。

以下節を逐ふて上記種々の水理値に就て述べん。

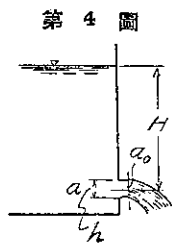
2. d_a, v_a 及び h_a に就て

一般に水槽の垂直面なる側壁に設けられたる小流出孔 (small orifice) より流量は次式にてあらはさる (第 4 圖)。

$$Q = C_a \sqrt{2g} H$$

式中 Q は流量、 g は重力の加速度、 H は水頭をあらはす。

C は流量係數 (coefficient of discharge) にして今 C_v を流速係數 (coefficient of velocity) C_a を收縮係數 (coefficient of contraction) とすれば $C = C_a C_v$ にして流



出孔の断面積を a とし vena contracta に於ける夫れを a_0 とすれば、 $C_a = a_0/a$ なり。水門より流出する場合に於て水門の開き h が水路の幅 b に比し甚だ小なる矩形流出孔の時には C_a は垂直の方向にのみ、即ち h のみの收縮によるものと考へらるべければ

$$C_a = d_a/h = \alpha \quad \therefore d_a = \alpha h = C/C_v \cdot h \quad \dots \dots \dots (10)$$

となる。

次に C_v に就て考へんに C_v は主として孔内側附近に於ける運動の方向變化及び流動に對する摩擦抵抗に因るものにして H 又は h の大なる程大にして同一面積にては矩形孔は圓形孔よりも小ならんと思ふ。

鋭縁圓孔に對して Smith & Walker 氏 (1923) の實驗より h と H の關係を表示すれば凡そ第 1 表の如し。

第 1 表 銳縁圓孔の C_v

孔徑 (m)	水 頭 (m)			
	0.05	0.10	0.20	0.50
0.020	0.951	0.951	0.953	0.956
0.025	0.952	0.954	0.957	0.965
0.030	0.953	0.957	0.962	0.970

實驗水路内に於ける水門の流量係數 C を求めんに、之を一般的に考ふれば水槽内に於て水が v_0 なる流速を以て孔に接近するを以て $v_0^2/2g$ なる接近流速水頭を有す。然る時は次式を得 第 5 圖)。

$$Q = \frac{2}{3} C b \sqrt{2g} [(H_2 + v_0^2/2g)^{3/2} - (H_1 + v_0^2/2g)^{3/2}] \dots\dots (11)$$

若し v_0 を無視し矩形小流出孔と考ふる時は

$$Q = C b h \sqrt{2g \left(H - \frac{1}{2} h \right)} \dots\dots (12)$$

となる。故に之より C を求むれば

$$C = Q / b h \sqrt{2g \left(H - \frac{1}{2} h \right)} \dots\dots (13)$$

13) 式より C を求め C_v を定むる時は (10) 式より d_a を求め得可し、然る時は

$$v_a = Q / b d_a \dots\dots (14)$$

d_a 及び v_a の値を知れば水門より流出するために失ふ energy head h_a は次式より求まる

$$h_a = H - (d_a + v_a^2/2g) \dots\dots (15)$$

3. 跳水距離を求むる著者の一方式

第 3 圖に於て vena contracta (a) より (2) 横断面に達する迄の總 energy head の消失量を h' とすれば h' は次式にてあらはさる。

$$h' = (d_a + v_a^2/2g) - (d_2 + v_2^2/2g) = (v_a^2 - v_2^2/2g) - (d_2 - d_a) \dots\dots (16)$$

然るに h' を別けて考ふれば

$$h' = h_k + h_j \dots\dots (17)$$

h_j は主として跳水のために失ひたる energy head にして h_k は射流部 l なる距離の間に失ひたる energy head である。

今射流部に於ても Chezy 型の流速公式が成立ち只其の constant C のみが異り、之を K とあらはし得るものとすれば次式を得。

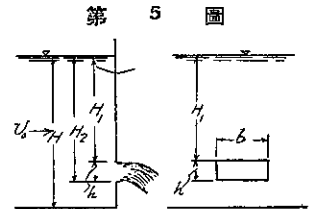
$$h_k = v_m^2 / K^2 R_m \cdot l \dots\dots (18)$$

式中 v_m は (a)~(1) 間の平均流速をあらはし R_m は其の平均徑深をあらはし、 d_m を平均の水深とすれば $R_m = b d_m / (b + 2 d_m)$ である。然る時は

$$h' = v_m^2 / K^2 R_m \cdot l + h_j$$

之より l を求むれば

$$l = K^2 R_m / v_m^2 \cdot (h' - h_j) \dots\dots (19)$$



第3章 實 驗

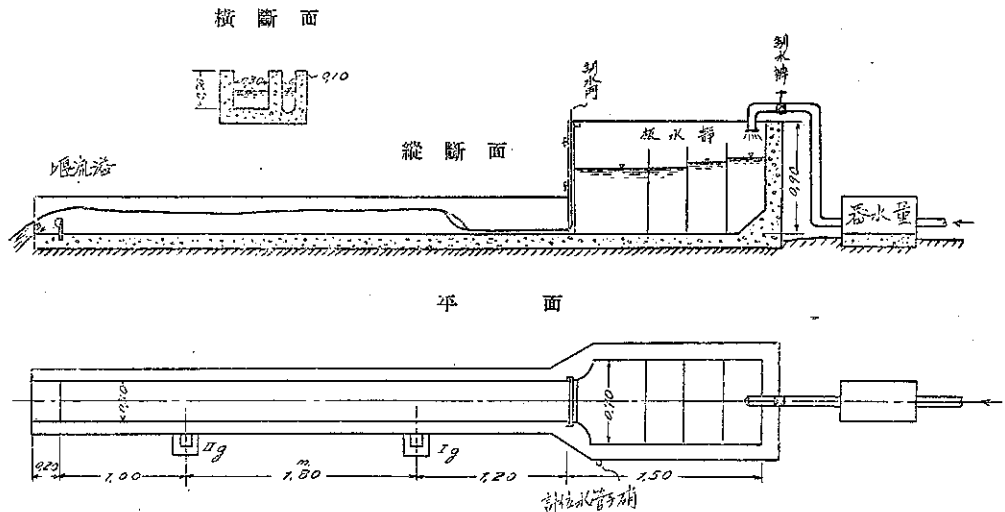
1. 實驗裝置

此度發表せる分の實驗は第6圖に示すが如きコンクリートの樋體を有し内面は充分平面なる様洗ひ出し磨き仕上を施せり。水門附近より下流 2 m 位迄の底部は特に入念に仕上たり。水門は檜板を用ひ其の先端に眞鍮製の双部を取付け其の双先を直線になし水平になる様装置せり。

流量 Q の測定には精密に檢定せられたる金門商會製口径 65 mm 乾式聯結翼車型量水器を使用せり。

下流水深は樋體側面に設けたる gauge pit 中にて精確に目盛られたる hook gauge により 1/10 mm 迄求めた。

第6圖 實驗樋略圖



而して $l=1.00$ m 以内は I_g を用ひそれ以上は II_g を使用せり。尚ほ直接水面を needle gauge によりて測定し見たるも精度よろしからざれば中止せり。

水槽水頭 H は其の小なる間は水槽側壁に取付けたる hook gauge を用ひ大なる場合は硝子管 mm 目盛の水時計によりて測定せり。跳水距離 l は水門双先より跳水の先端と認むる所迄巻尺によりて cm 迄測り、水門より vena contracta 迄の距離は之を無視せり。水門の開き h は 1/100 mm の精度を有する。

Thickness gauge により充分樋體を落付けたる後蝶螺旋によりて固定せり。下流水深は初め何等邪魔物を置かざる場合を $d_0=0$ とし、次に凡そ 1cm, 2cm, 3cm... になる如きゴム・パッキングを有する溢流堰を挿入し、其の都度 hook gauge により d_0 を測定して d_0 の異なる case とせり。

尚ほ此の他水槽内に於ては流水の亂さるゝ事なき様又 v_0 の影響大ならざる様特に注意して數枚の静水板を3箇所に挿入し流量によりて適當に加減せり。

2. 實驗結果

實驗結果を一覽にして第2表に示す。

之より諸値を求むれば次の如し。

(a) 流量係數 C の値

(11) 式に於て $v_0/2g$ の値は幾許なるかと云ふに、其の最大の場合には $h=0.025$ m, $d_0=0$, $Q=13.84$ m³/hr,

H=0.048 m の時なり。而して水槽の幅は 0.70 m なるを以て

v_0 = 13.84/3 600 x 0.70 x 0.048 = 0.114 m/sec

v_0^2/2g = 0.114^2/19.6 = 0.0006 65 m

第 2 表 (其 の 1)

Table with columns Q, H, d_0, l, c, alpha, d_1, u_1, u_2, h_1, h_2, K^2. Sub-sections for d_0 = 0.005, 0.010, 0.017, 0.022, 0.032, 0.039, 0.042, 0.052.

Table with columns Q, H, d_0, l, c, alpha, d_1, u_1, u_2, h_1, h_2, K^2. Sub-sections for d_0 = 0.042, 0.010, 0.011, 0.022, 0.032, 0.039, 0.052.

之は此度の實驗中の最大の値にして H の測定の精度に比して無視し得る程度である。

$$\text{故に } Q = \frac{2}{3} C l \sqrt{2g(H_2^2 - H_1^2)}$$

$$\text{然るに } H_1 = (H_2 - h)^2 = H_2^2 - \frac{3}{2} H_2 h + \frac{3}{8} H_2^{-1} h^2 - \dots$$

第 3 項の最大値は $h = 0.025 \text{ m}$, $H_2 = 0.428 \text{ m}$ ならば $\frac{3}{8} H_2^{-1} h^2 = 0.0013 \text{ m}$ となる。

實際 0.428 m の H を測るには硝子管の水位計により 1 mm 前後の誤差は止むを得ず、却つて釣合を保つて正しき水位を與へるためには相當の時間を要し、此ための誤差の方遙かに大なれば全體を通じて v_0 の影響を無視せる矩形小流出孔よりの流量として (12) 式を用ひ C を出した。其の値を第 2 表に示す。

(b) 收縮係數 α の値

C_0 に就ては第 2 節に於て述べたる如くにして、今全體を通じて $C_0 = 0.95$ とする事にする。

然る時は (10) 式より

$$\alpha = C/0.95 \dots (20)$$

(20) 式を用ひて計算したる α の値は第 2 表にあり。

尙ほ参考のため平均に近き値を H と h とに就て圖示せるものは第 7 圖である。

(c) Energy 消失水頭 h' の値

(14) 式より v_2 を求め

$$v_2 = Q/bd_2 \dots (21)$$

より v_2 を算出し、 $v_1^2/2g$ 及び $v_2^2/2g$ を計算する時は (16) 式より (a)~(2) 間の總 energy head の消失量 h' を求め得可し (第 2 表)。

(d) l と h' との関係

實測せる l と h' との関係を plot せるものは第 8 圖である。

圖を見れば比較的完全なる跳水をなす間は

$$l = a(h' - b) \dots (22)$$

なる直線式にてあらはさるゝ如く思はる。

今圖上に於て實驗値に近き値を示す直線を描き a を求め、各 d_0 に對する d_2 の平均をとり a と d_2 との関係を第 9 圖に描き、各 h に就て fair curve を以て之を結び d_2 の平均に相當する a を定むれば第 3 表の如し。

又第 8 圖より各 h の夫れ夫れの d_0 の場合の b を求めて表示すれば第 3 表の如し。

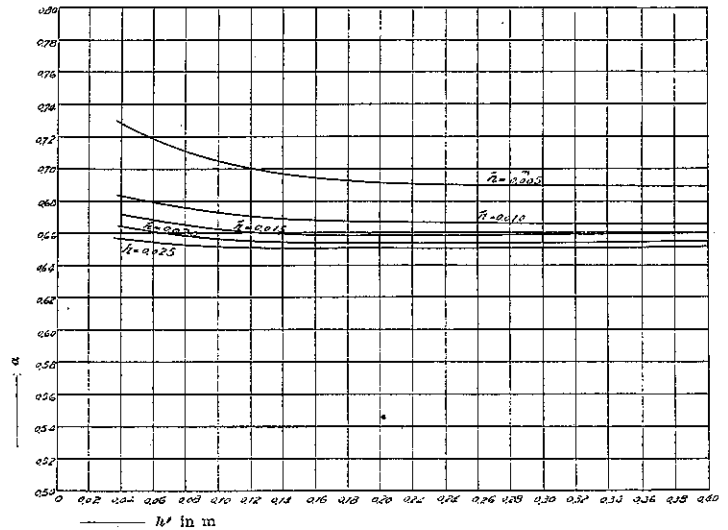
(22) 式 $l = a(h' - b)$ と (19) 式 $l = K^2 R_m / v_m^2 \cdot (h' - h_j)$ とを比較して見るに

$$a = K^2 R_m / v_m^2 \dots (23)$$

$$b = h_j \dots (24)$$

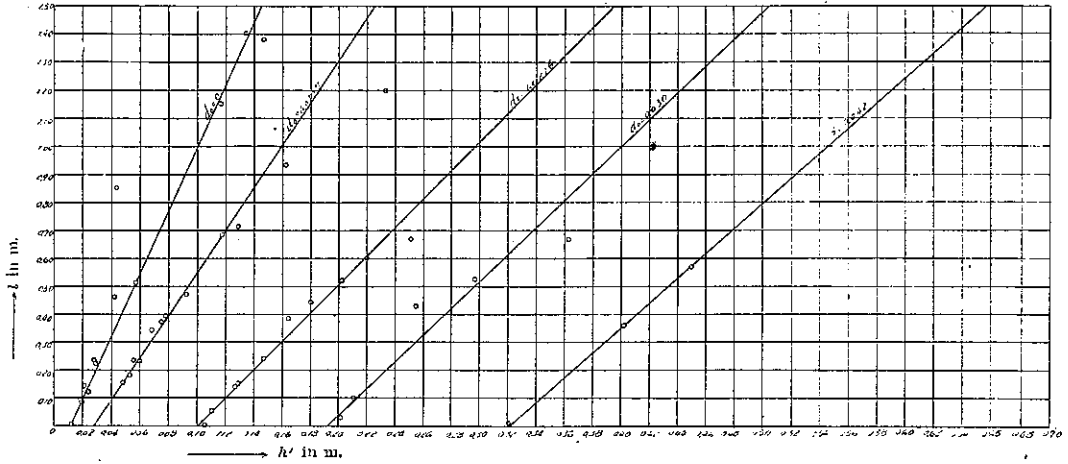
なれば理論式と實驗式とは形に於て一致する事になる。但し第 3 表に示せる a 及び b は各 h の d_0 に就て圖上

第 7 圖 收縮係數 “ α ” の値

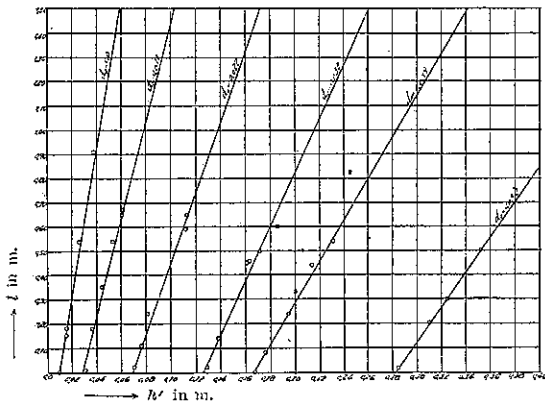


第 8 圖 l と h' との関係

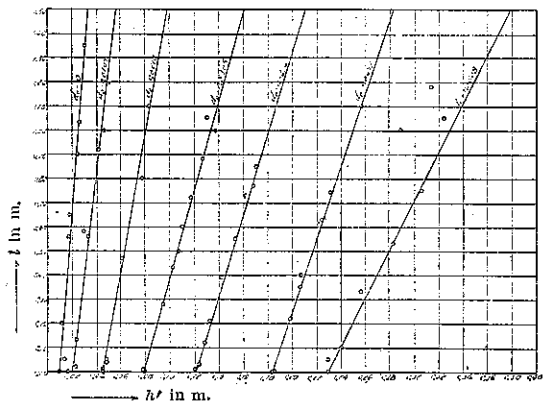
(其の 1) $h=0.005$ m.



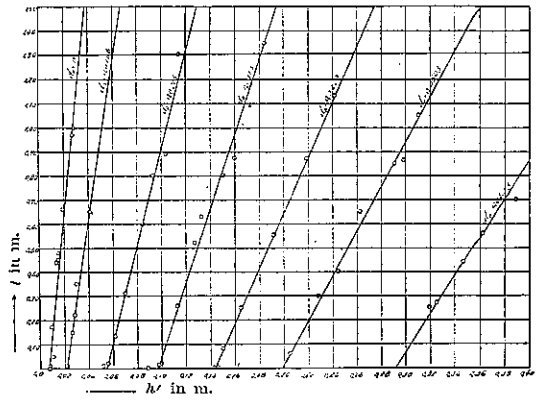
(其の 2) $h=0.010$ m.



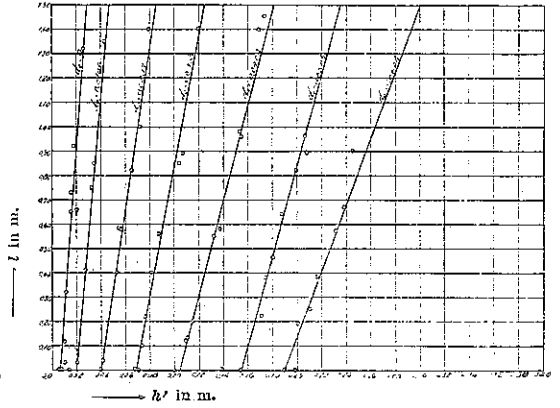
(其の 4) $h=0.020$ m.



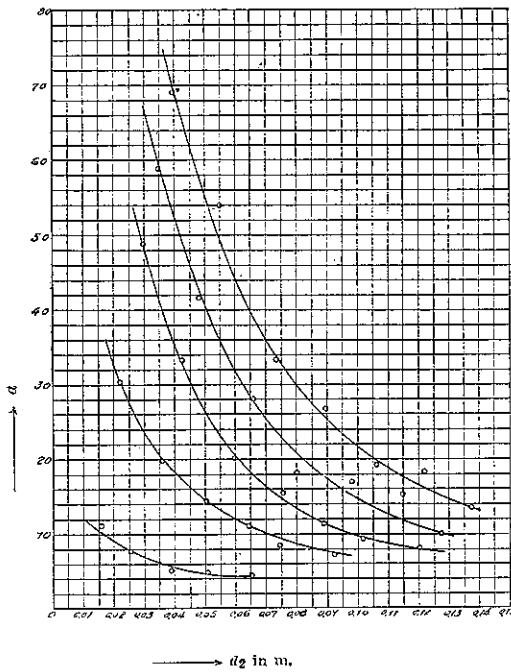
(其の 3) $h=0.015$ m.



(其の 5) $h=0.025$ m.



第 9 圖 “a” と “d₂” との関係



第 3 表

(其の1) “a” の値

h	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0.005	11.2 (0.0157)	78.5 (0.252)	5.2 (0.387)	4.3 (0.0506)	4.2 (0.0652)		
0.010	30.2 (0.0226)	20.0 (0.0761)	14.1 (0.0504)	10.6 (0.0627)	9.1 (0.0744)	7.5 (0.0924)	
0.015	49.1 (0.0297)	32.8 (0.0424)	20.5 (0.0599)	14.5 (0.0755)	11.3 (0.0888)	9.4 (0.1013)	8.0 (0.1203)
0.020	58.8 (0.0348)	43.0 (0.0491)	27.4 (0.0661)	20.4 (0.0802)	14.7 (0.0977)	11.4 (0.1146)	10.2 (0.1274)
0.025	69.6 (0.0397)	50.0 (0.0552)	33.7 (0.0735)	25.0 (0.0856)	19.2 (0.1063)	15.6 (0.1222)	13.5 (0.1374)

備考 () 内は d₂ の平均を示す

(其の2) “b” の値

h	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0.005	0.0113	0.028	0.100	0.192	0.3215		
0.010	0.009	0.0275	0.0685	0.1255	0.1660	0.2830	
0.015	0.007	0.0215	0.0525	0.097	0.1435	0.1985	0.2915
0.020	0.0085	0.020	0.0450	0.0785	0.1210	0.1830	0.2285
0.025	0.006	0.019	0.0395	0.068	0.1035	0.1540	0.1820

より平均せる値なるを以て、直ちに之を眞の a 及び b と考ふるは不可なる事勿論なり。元來 R_m 從て v_m を定むるには第 3 圖に於て vena contracta (a) より (1) 横斷面に至る射流部の水面の curve は一體如何なる形のものであるかと云ふ事が本問題を解決するために誠に重要な事なるも、之を實驗的に直接測定する事は殊に射流部の水深の淺き場合には精度上に於て甚だ困難である。Bakhmeteff 氏は其の著 “Hydraulics of open channels” に於て backwater の principle を應用して解決せんとし、恩師鶴見博士は土木學會誌第 16 卷第 9 號に於て Deckwalze を生ぜざる場合に就て論じられて居る。

此の問題に就ては精密なる他日の研究に待つとして、少くとも h の小なる間比較的完全なる跳水を生ずる範圍内に於ては d_a ≐ d₁ と考へ得られ實用的にも甚だ便利である。

然る時は $R_m \doteq F_a = R_1, \quad v_m \doteq v_a = v_1$

故に $a = K^2 R_a / v_a^2 = K^2 R_1 / v_1^2 \dots\dots\dots (25)$

(8) 式より $v_a^2 = \frac{1}{2} g d_2 (d_2 / d_a + 1) \dots\dots\dots (26)$

又 $R_a = b d_a / (b + 2 d_a) = \beta d_a \dots\dots\dots (27)$

とすれば

$$a = 2\beta K^2 d_a^2 / g d_2 (d_2 + d_a) \dots\dots\dots (28)$$

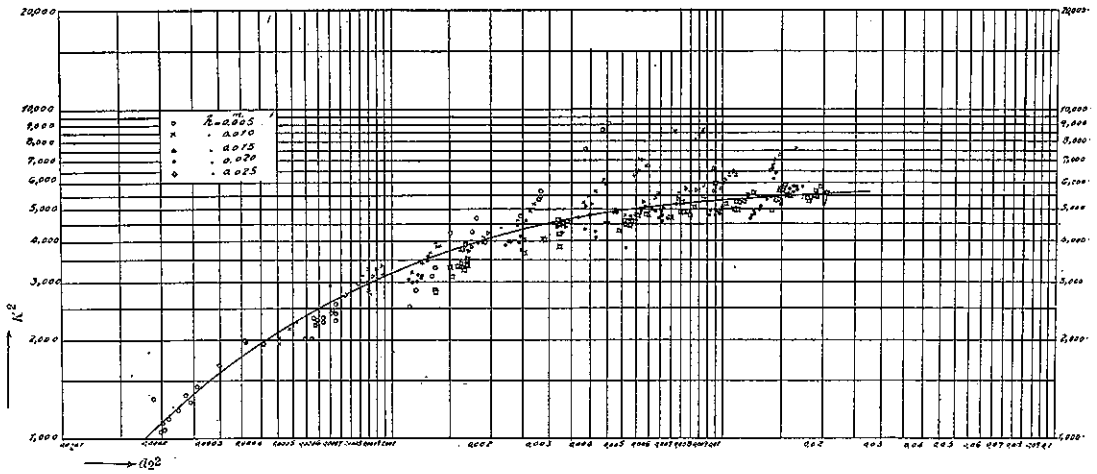
之より K² を求むれば

$$K^2 = a g d_2 (d_2 + d_a) / 2\beta d_a^2 \dots\dots\dots (29)$$

今研究の第 1 階梯として第 3 表の a を用ひて K² を計算して第 2 表に示す。

K は如何なる理論の根據による係數なるかは未だ其の探究充分ならず、之を發表し得ざるを遺憾とするも d₂ の或函數なる事は實驗より明かなるを以て、K² と d₂² との關係を log. paper に圖示して第 10 圖に示す。

第 10 圖 K^2 と d_2^2 との関係



(e) 跳水に因る energy head の損失 h_j に就て

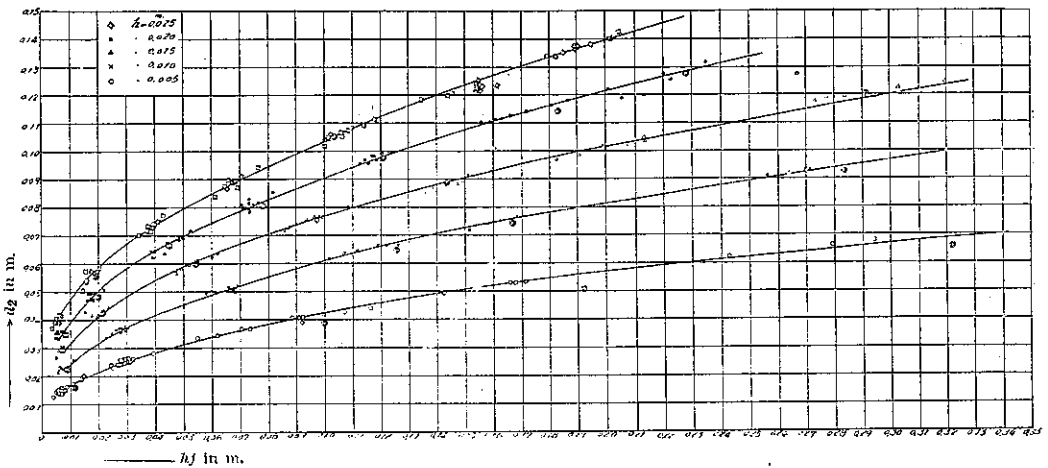
前述の如く $d_a=d_1$ となし得る範囲内に於ては (6) 式を用ひて h_j の理論的の値を求め得、即ち

$$h_j = (d_2 - d_a) / 4d_2d_a \dots\dots\dots (30)$$

各實驗値に就て之を計算せるものを第 2 表に示す。

又第 11 圖には縦軸に d_2 を取り横軸に h_j を取つて之を圖示せり。圖に於て 1 つの曲線上に來らざるは d_a の異なるためである。尚ほ同圖中に第 3 表に示せる b の値を d_2 の平均値に對して◎印を以て描き置きたり。

第 11 圖 h_j と d_2 との関係



(f) 結 論

(19) 式と (22) 式とより $l=0$ なる時は $h' = h_j = b$ 、即ち跳水の初まりに於ける h_j は b に等しかるべきも理論式より求めたる h_j は總て b より小なり、而して其の差は d_0 の小なる間は mm の單位である、之は勿論 d_a, d_2 の決定に於て mm の誤差を生ずれば直ちに其の儘影響するものにして、殊に d_a を定むるに α に就ては $C_0 = 0.95$ を同一とせる事及び實驗を連續して行ふ時は正しき H を與へる迄には相當の時間を要し、餘程注意をなすも相當の誤差あるを免れず。

又 h_j が b より小なる理由としては單に b は理論式の h_j のみならず、跳水前後の 2 横断面間に於ても摩擦その他を含む energy 損失あるものと考へらるべし。

d_0 の大なる場合には cm にて差のあるものあり、之は尙ほ將來の研究に待つとするも、元來 (8) 式は理論式にして土木學會誌第 20 卷第 11 號に薄江昇氏の討議中にある如く

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 \left[\sqrt{1 + 8\alpha v_1^2 / g d_1} - 1 \right]$$

式中の α を考に入れて d_2 と d_1 との關係を定め h_j をも求む可きものと思ふ。されば理論式を用ひて求めたる K なる値に就ても多少 correction を施さざる可らず、 d_0 の大なる時は殊に然りであると思ふ、然る時は第 10 圖に示せる K^2 の値も 1 つの曲線附近に集る可く、 α なる勾配も實驗値に近づく事と信ずる。

第 10 圖は圖上より α の平均に近き値を用ひて算出せるものなれば充分なる精度を望む事は無理である。一層將來の研究に待つ事として本論に於ては K なる係數の存在するが如く思はるゝ事を發表せんとする者である。

下流の深さ d_2 に就ては溢流堰を設けたる場合には下流の状態より之を考究するも一方法と思考す。

附 言

今回はコンクリート内面洗ひ出し仕上をなせる實驗樋に就ての發表に止り、粗度を異にする他種材料にて作れる樋及び水路の幅の比較的大なる實驗樋に就ての研究は精を改めて發表せんとするものにして K^2 を d_2^2 の函數として表はさんとする實驗式の決定は之を他日に留保するものである。