

論 說 報 告

第21卷第2號 昭和10年2月

撓角分配法によるトラスの2次應力計算に就て

會員工學博士 鷹部屋福平*

On Secondary Stress-Calculation of Trusses by the Slope Distribution Method

By Hukuhei Takabeya, Dr. Eng., Member.

內 容 條 摘

本文は、トラスの2次応力の計算に對して、聯立方程式の解を用ふることなく、筆者提案の撓角分配法に依つて、トラスの圖上に於て計算尺使用の下に、簡単なる算術計算を行ひ、不均衡性撓角(unbalanced slope)を撓角分配率にじて逐次分配して balance に導き、これにより2次應力を計算する解法を示したものである。

1. 撞角分配法と撞角式の圖上表現

トラスの節點に於ける連結方法が、鉄又は鍛接構造となれる今日に於ては、それ等の構法が然らしむる必然的結果として、曲げモーメントに基因して誘發せらるべき 2 次應力の算定は、橋梁設計者の實用的立場より考へて極めて重要な問題である。

Manderla, Müller-Breslau, Ritter, Mohr¹⁾ 等の先覺に依る諸種の解法は、2 次応力の計算法として今日まで廣く知られ遍く其の應用を見たるものであり、H. Cross²⁾ の方法なるもの、最近に於て一特色を有する解法として知らるゝところである。

筆者は曩に、ラーメン並に連續梁の解法として撓角分配法 (method of unbalanced slope-distribution) なるものを提案したるが、茲にはこの方法をトラスの2次應力算定に應用して、此の種計算をして、幾分にても簡易實用的ならしめ、機械的無難作に行ひ得る様試みたるものである。

今、橋梁トラスに於ける普通一般なる構造よりすれば、荷重は總て節點に荷せられ、従つて熟知なる撓角撓度式(slope-deflection equation)は次式の如くなる。

* 北海道帝國大學教授

⁽¹⁾ Manderla. Die Berechnung der Sekundärspannungen, welche im einfachen Fachwerke infolge starrer Knotenverbindungen entstehen. Allgemeine Bauzeitung, 1880.

Müller-Breslau. Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1886.

Ritter. Über die Druckfestigkeit stabförmiger Körper mit besonderer Rücksicht auf die im steifen Fachwerk auftretenden Nebenspannungen. Schweizerische Bauzeitung, 1884.

Mohr. Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen. Der Civil Ingenieur: Organ des Sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. 1892.

²⁾ H. Cross. Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments, Proceedings of A. S. C. E., May 1930.

茲に M_{ab} は部材 ab に於ける材端 a の曲げモーメントを示し、 K_{ab} は部材 ab の慣性モーメントを部材 ab の長さにて除したるもの、 φ_a, φ_b は夫々 a 端及び b 端に於ける撓角 (slope) の $2E$ 倍、 μ_{ab} は部材 ab の迴轉角の $-6E$ 倍を示すものなること本誌第 21 卷第 1 號拙著 “不靜定構造の解法に應用したる撓角分配法” に述べたるところである。

即ち、トラスの場合に於ては、荷重項 C_{ab} は消失し、之に代ふるに μ_{ab} の項が既知量として重要な役割を持つものにして、 μ_{ab} を決定するには Williot-Mohr の變位圖法によるを便とする。

斯くの如き考察は、理論嚴正を保つ點よりすれば、尙缺くるところ無きにしもあらざれども、實用解として普通一般に行はれるものであり、筆者も亦この程度の近似解に満足して、これが解法を試み、大方の叱正を乞はんとするものである。

今第 1 圖に示す如く、トラスの 1 節點 m を取出して考へ、節點 m が荷重により m' に移動し、他端 1, 2, 3, ..., n が $1', 2', 3', \dots, n'$ に移動し、且つ圖に示す如く夫々撓角を生じたるものとすれば、節點 m に於ける曲げモーメントの釣合條件

$$M_{m1} + M_{m2} + M_{m3} + \dots + M_{mn} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

に於て

$$M_{m1} = K_{m1}(2\varphi_m + \varphi_1 + \mu_{m1})$$

$$M_{m2} = K_{m2}(2\varphi_m + \varphi_2 + \mu_{m2})$$

$$M_{m3} = K_{m3}(2\varphi_m + \varphi_3 + \mu_{m3})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_{mn} = K_{mn}(2\varphi_m + \varphi_n + \mu_{mn})$$

なるが故に (2) 式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \varphi_m \rho_m + \varphi_1 K_{m1} + \varphi_2 K_{m2} + \varphi_3 K_{m3} + \dots + \varphi_n K_{mn} \\ & + \mu_{m1} K_{m1} + \mu_{m2} K_{m2} + \mu_{m3} K_{m3} + \dots \\ & + \mu_{mn} K_{mn} = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3)$$

茲に

$$\rho_m = 2(K_{m1} + K_{m2} + K_{m3} + \dots + K_{mn}) \quad \dots \dots \dots (4)$$

或は (3) 式より

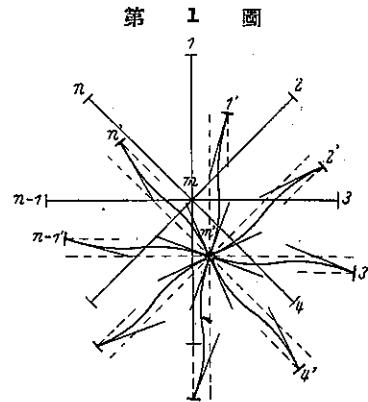
$$\varphi_m = -\{\varphi_1 \gamma_{m1} + \varphi_2 \gamma_{m2} + \varphi_3 \gamma_{m3} + \dots + \varphi_n \gamma_{mn} + \mu_{m1} \gamma_{m1} + \mu_{m2} \gamma_{m2} + \mu_{m3} \gamma_{m3} + \dots + \mu_{mn} \gamma_{mn}\} \quad (5)$$

(5) 式に於て

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{m1} &= \frac{K_{m1}}{\rho_m}, & \gamma_{m2} &= \frac{K_{m2}}{\rho_m} \\ \gamma_{m3} &= \frac{K_{m3}}{\rho_m}, & \gamma_{mn} &= \frac{K_{mn}}{\rho_m} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

即ち γ は撓角分配率と命名したるものにして是等は數値として與へらる。而して μ_{m1}, μ_{m2} 等は次式の如きものである。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{m1} &= -6E \frac{d_{m1}}{l_{m1}}, & \mu_{m2} &= -6E \frac{d_{m2}}{l_{m2}} \\ \mu_{m3} &= -6E \frac{d_{m3}}{l_{m3}}, & \mu_{mn} &= -6E \frac{d_{mn}}{l_{mn}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$



故に(7)式を用ひて(5)式を整形すれば

(8) 式中 E_{dm1} , E_{dm2} 等は Williot-Mohr の變位圖より求めらる。従つて、與へられたる荷重に對しては A_m の値は一定の數値となる。

而して、 Δ_m は(8)式に於て總ての ψ を消失せしめたる場合の ψ の値に等しく、換言すれば、第 1 圖に與へられたる節點 1, 2, 3, ..., n を總て固定端と考へ、それ等の變位のみを許したる場合の節點 m に於ける撓角を示す。

故に今トラスの總ての節點に於て、斯くの如き撓角を考へ、これを $\psi^{(0)}$ にて表す時は

となる。本解法に於ては、各節點に於て求めたる A_m を其の節點の撓角の概算値にとる。従つて第 2 圖に示す如きトラスの節點 1 に於ける撓角の概算値 $\varphi_1^{(0)}$ は次式にて與へらる。

$$\varphi_1^{(0)} = \mathcal{A}_1$$

同様に節點 2, 3, 4 等に對しては

$$\varphi_2^{(0)} = \mathcal{A}_2, \quad \varphi_3^{(0)} = \mathcal{A}_3, \quad \varphi_4^{(0)} = \mathcal{A}_4$$

而して一般に節點 m に對しては (9) 式により與へらる。

故に (8) 式中の ψ に是等の $\psi^{(0)}$ を用ひ斯くして得らるゝ φ_m を $\varphi_m^{(1)}$ とすれば

となる。

この式の右邊は總て既知量なるを以て、(10) 式より ϑ を計算することが出来る。(10) 式の示す關係は、1 個の方程式より 1 個の未知量を決定するものなるを以て、 n 個の未知量存在する場合にも、それ等を聯立に解くことを要せずして、1 個の式より 1 個の未知量を決定する方法を n 回獨立に行へば可なることとなる。

この特異性は、この方法をして實用的ならしめ、簡易性を發揮する所以にして、未知量の數多ければ多き程便利なるものである。

今第 2 圖に於て、 $\varphi_1^{(1)}$ を求むれば次式の如し。

$$\varphi_1^{(1)} = \mathcal{A}_1 - \{\varphi_2^{(0)}\gamma_{12} + \varphi_3^{(0)}\gamma_{13}\}$$

次に $\varphi_2^{(1)}$ を求むるには、上式より $\varphi_1^{(1)}$ を決定し、其の値を應用して次式により求めらる。

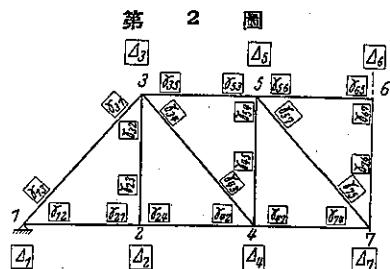
$$\varphi_2^{(1)} = A_2 - \{ \varphi_1^{(1)} \gamma_{21} + \varphi_3^{(0)} \gamma_{23} + \varphi_4^{(0)} \gamma_{24} \}$$

同様にして節點 3 に於ては

$$\varphi_3^{(1)} = A_3 - \{\varphi_1^{(1)}\gamma_{31} + \varphi_2^{(1)}\gamma_{32} + \varphi_4^{(0)}\gamma_{34} + \varphi_5^{(0)}\gamma_{35}\}$$

即ち是等の計算は第2圖に示す如く、枠内に入れたる數値をトラスの圖形中に記入し、上式の計算を機械的に同圖上に於て行ふものにして、後述の例題によりこれが計算の操作を知ることが出来る。

換言すれば、或る一つの節點に於ける撓角を與ふる方程式(8)は、第2圖に示す如く圖上に表現せられ、計算尺と算盤によつて各節點の撓角は決定せらるゝこと、ラーメンに對する撓角分配法に於て述べたると同様である。



2. 2 次應力計算例

撓角分配法による 2 次應力の計算例題として、第 3 圖に示す如きトラスの中央節點に 1000# の荷重を有する場合の 2 次應力を求む。¹⁾

第 3 圖に於ける各部材の上部には其の断面積を記入し、下部括弧内には其の慣性モーメントを示す。尙同圖右端には、各部材の寸法を記入す。

第 4 圖には、各部材の慣性モーメントを其の部材の長さにて除したる K の値を上方に示し、各部材に働く内力の大きさを部材の下方に示す。又第 3 圖及び第 4 圖に示す數値より各部材の變長は $\Delta l = Sl/(AE)$ にて與へられるれども、便宜上其の E 倍をとり、 $\Delta l \cdot E = Sl/A$ を求む。第 4 圖括弧内に此の値を示す。又各節點に於ける ρ の値は、(4) 式より與へられ、節點に集る K の總和の 2 倍を表す。

今上記の $\Delta l \cdot E$ の數値を用ひて Williot-Mohr の變位圖法に依り各節點の變位を求むれば第 5 圖に示す如し。

この變位圖は、部材 6-7 に内力働かず、従つて節點 6, 7 を不動と假定して出發したる結果、節點 1 に對しても垂直方向の分變位を生じ、上向きの移動を見たるものなれども、變位後に於ける各節點の相對的位置の關係は、この儘にて支障なく、且つ第 5 圖に示されたる長さに就て考ふるに、(8) 式に示したる Ed の數値を與へ居ることは、本解法上極めて便なることである。

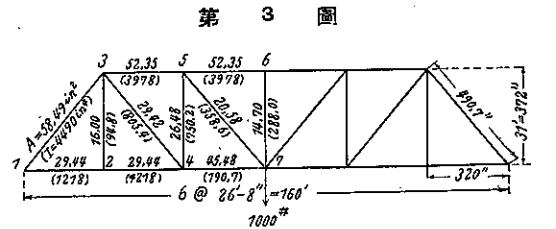
而してこれ等の各節點に於ける移動を、トラスの上に移して考へて見るに、各部材の迴轉角は何れも時針と同方向の迴轉を呈し、 Ed の値は正量を示す。

今準備計算として次の數種の數値を算出する。

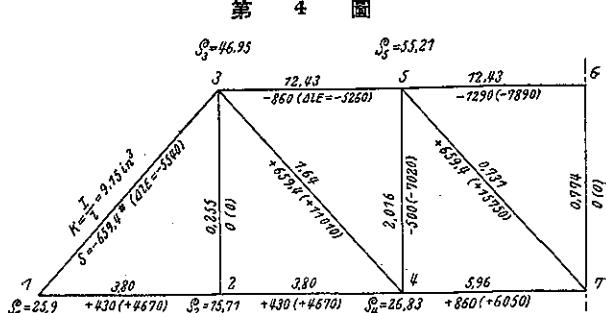
(A) Ed/l の計算 (計算尺に依る)

今 Ed/l の數値を各部材に就て計算すれば下の如し。

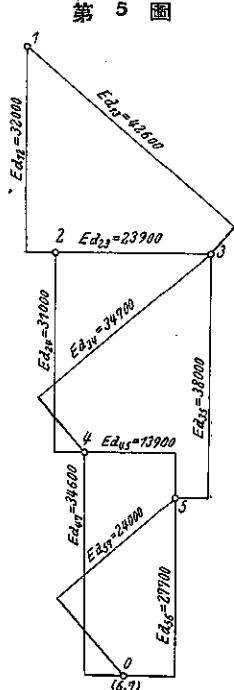
$$\frac{Ed_{12}}{l_{12}} = \frac{32000}{320} = 100, \quad \frac{Ed_{13}}{l_{13}} = \frac{42600}{490.7} = 86.8 \quad \frac{Ed_{23}}{l_{23}} = \frac{23900}{372} = 64.4$$



第 3 圖



第 4 圖



第 5 圖

1) 本例題は J. B. Johnson, C. W. Bryan, F. E. Turneaure 共著による The Theory and Practice of Modern Framed Structures, p. 443 に示すトラスの 2 次應力計算例をとりて其の計算結果と比較對照せんとせるものである。

以下同様にして各部材に對し計算すれば、第6圖に記入せる如し。

(B) 撓角分配率 γ の計算 (計算尺に依る)

γ の値は第4圖参照の下に(6)式より求む。

節點1に於ては

$$\gamma_{12} = \frac{3.80}{25.9} = 0.1465, \quad \gamma_{13} = \frac{9.15}{25.9} = 0.353$$

節點2に於ては

$$\gamma_{21} = \frac{3.80}{15.71} = 0.242, \quad \gamma_{23} = \frac{0.255}{15.71} = 0.0162$$

$$\gamma_{34} = \frac{3.80}{15.71} = 0.242$$

以下同様にして各節點に於て γ を計算し
これを該當位置に記入すれば第6圖に示す
如し。

(C) A の計算 (計算尺に依る)

以上計算したる Ed/l 並に γ の數値を用
ひて(8)式に示す A_m を算出すれば下の如
し。但し第6圖を見つゝ計算する。

$$\begin{aligned} A_1 &= 6 \left\{ \frac{Ed_{12}}{l_{12}} \gamma_{12} + \frac{Ed_{13}}{l_{13}} \gamma_{13} \right\} \\ &= 6 \{ (100)(0.1465) + \\ &\quad + (86.8)(0.353) \} = 271.5 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} A_2 &= 6 \{ (100)(0.242) \\ &\quad + (64.4)(0.0162) \\ &\quad + (97)(0.242) \} = 292 \end{aligned}$$

其の他の節點に於て同様に A を算出し、第6圖の該當節點にそれ等の數値を記入する。

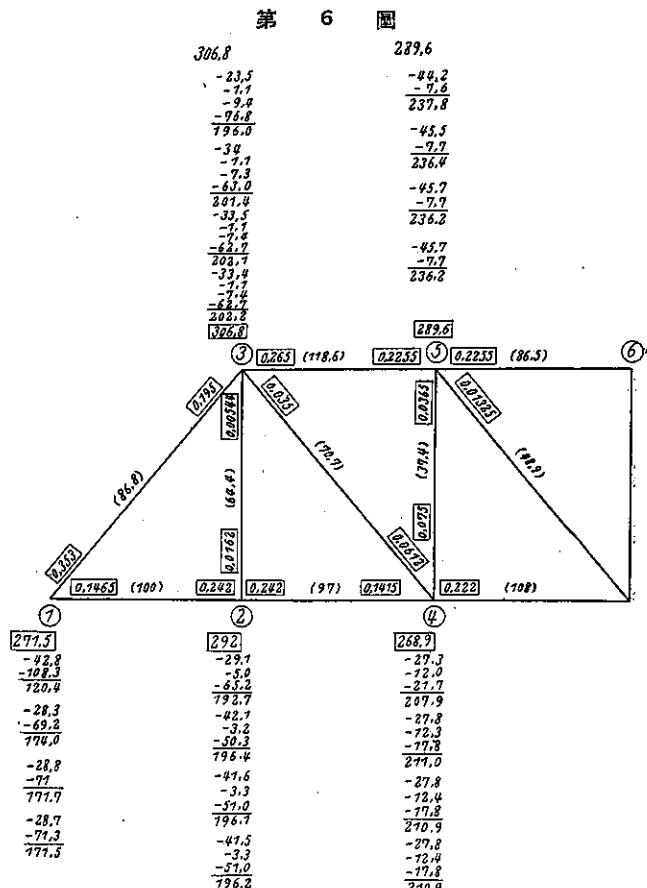
(D) 圖上計算 (第6圖に依る)

第6圖に於ける各節點に於て、計算尺使用の下に、(10)式に依り先づ $\varphi_m^{(1)}$ を求む。但し(10)式中の $\varphi^{(0)}$ の
値は(9)式によるものにして、第6圖の各節點に記入されたる A の値に他ならず。従つて第6圖に示す數値の
みにて各節點の撓角 φ_m を決定し得ること下の如し。

節點1に於ては

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= A_1 - \{ \varphi_2^{(0)} \gamma_{12} + \varphi_3^{(0)} \gamma_{13} \} \\ &= 271.5 - \{ (292)(0.1465) + (306.8)(0.353) \} = 120.4 \end{aligned}$$

此の計算は、第6圖に記入せられたる數値、例へば、上記節點1に於ける(292),(0.1465)を見つゝ、計算尺を以て兩者の積42.8を算出して之を圖中に記入し、次に同様(306.8),(0.353)を見つゝ、其の積108.3を計算尺にて算出して之を42.8の下に記入し、 A_1 の數値271.5より兩者を減じた120.4を圖上計算するものにして、以下同様の方法を各節點にて行ふものである(第6圖参照)。



即ち節點 2 に於ては

$$\begin{aligned}\varphi_2^{(1)} &= A_2 - \{\varphi_1^{(1)}\gamma_{21} + \varphi_3^{(0)}\gamma_{23} + \varphi_4^{(0)}\gamma_{24}\} \\ &= 292 - \{(120.4)(0.242) + (306.8)(0.0162) + (268.9)(0.242)\} = 192.7\end{aligned}$$

従つて本計算に見る如く、 $\varphi_1^{(0)}$ を用ふるよりも既算せられたる $\varphi_1^{(1)}$ を用ふるを利ありとする。

以下同様にして積のみを記入しつゝ 1 節點より次節點に移りて上記計算法を進める。即ち本計算法は上記の如く式を書いて計算するものにあらず、式により運算を示したる所以のものは、計算の原理を辿りたるに過ぎず。斯くて、全節點に對し $\psi^{(1)}$ を求め終りたる時は、前記同様の方法を繰返して $\psi^{(2)}$ を求む。

即ち

$$\varphi_1^{(2)} = A_1 - \{\varphi_3^{(1)}\gamma_{13} + \varphi_3^{(1)}\gamma_{18}\} = 271.5 - 23.3 - 69.2 = 174.0$$

$$\varphi_2^{(2)} = A_2 - \{\varphi_1^{(2)}\gamma_{21} + \varphi_3^{(1)}\gamma_{23} + \varphi_4^{(1)}\gamma_{24}\} = 292 - 42.1 - 3.2 - 50.3 = 196.4$$

第 6 圖には、同様の計算が繰返し記入しあれども、4,5 同行へば前回の解答と今回の解答とは殆んど一致し、實用上正解と見て支障なき結果が得られる。

この計算に依り ϑ の値を下の如く決定する(第 6 圖参照)。

$$\varphi_1 = 171.5, \quad \varphi_2 = 196.2$$

$$\varphi_3 = 202.2, \quad \varphi_4 = 210.9$$

$$\varphi_5 = 236.2, \quad \varphi_6 = \varphi_7 = 0$$

(E) 2 次應力の算定

以上計算したる ϕ 及び Ed/l の値を用ひて曲げモーメントを計算すること下の如し。

(1) 式により

$$M_{ab} = K_{ab} \{2\varphi_a + \varphi_b + \mu_{ab}\} = \frac{I_{ab}}{l_{ab}} \left\{ 2\varphi_a + \varphi_b - 6 \frac{E d_{ab}}{l_{ab}} \right\}$$

従つて維應力 (fiber stress) は次式にて表さる。

茲に y_{ab} は部材 ab の断面に就て、其の中立軸 (neutral axis) より極繊維 (extreme fiber) までの距離である。而して各部材に就て、與へられたる断面より y/l の値を計算すれば、第 7 圖括弧内記入の數値の如し。

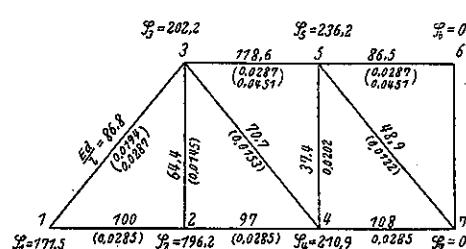
故に第 7 図より (11) 式に示す σ を計算すれば次に示す如く 2 次應力は算定せらる。但し下の計算結果に於て括弧内に示す數値は、前記 Johnson 氏による計算値にして、(+) (-) の符號は曲げモーメントの方向を示すもの、(+) は時針と同方向、(-) は時針と逆方向を示し、應力の正負を示すものにあらざることに注意を要する。

$$\sigma_{12} = \frac{y_{12}}{l_{12}} \left\{ 2\varphi_1 + \varphi_2 - 6 \left(\frac{Ed_{12}}{l_{12}} \right) \right\}$$

$$= 0.0285 \{ 2(171.5) + 196.2 - 6(100) \} \div (-)1.7 \quad (1.73)$$

$$\sigma_{22} = 0.0285 \{ 2(196.2) + 171.5 - 6(100) \} \div (-)1.0 \quad (1.01)$$

第 7 章



同様に

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}^{(1)} &= (+)0.7 (0.72), & \sigma_{13}^{(2)} &= (+)0.5 (0.49) \\
 \sigma_{31}^{(1)} &= (+)1.6 (1.65), & \sigma_{31}^{(2)} &= (+)1.1 (1.12) \\
 \sigma_{23} &= (+)3.0 (3.04), & \sigma_{32} &= (+)3.1 (3.14) \\
 \sigma_{24} &= (+)0.6 (0.6), & \sigma_{42} &= (+)1.0 (1.05) \\
 \sigma_{34} &= (+)2.9 (2.94), & \sigma_{43} &= (+)3.1 (3.07) \\
 \sigma_{35}^{(1)} &= (-)2.04 (2.07), & \sigma_{35}^{(2)} &= (-)3.2 (3.26) \\
 \sigma_{53}^{(1)} &= (-)1.1 (1.14), & \sigma_{53}^{(2)} &= (-)1.7 (1.78) \\
 \sigma_{45} &= (+)8.8 (8.75), & \sigma_{54} &= (+)9.3 (9.24) \\
 \sigma_{46} &= (-)6.4 (6.42), & \sigma_{74} &= (-)12.4 (12.44) \\
 \sigma_{56}^{(1)} &= (-)1.3 (1.3), & \sigma_{56}^{(2)} &= (-)2.1 (2.05) \\
 \sigma_{65}^{(1)} &= (-)8.1 (8.06), & \sigma_{65}^{(2)} &= (-)12.7 (12.65) \\
 \sigma_{57} &= (+)2.3 (2.17), & \sigma_{75} &= (-)0.7 (0.7)
 \end{aligned}$$

上記計算結果を見るに、本法に依るものと、Johnson に依るものとは、四捨五入の仕方にて全部一致を見るものにして、斯くの如くして上記の圖上計算法は 2 次應力の算定法として、簡易且つ正確解と思考せらるゝものである。

結 語

普通一般に廣く用ひらるゝ 2 次應力の算定法は、彈性變形を未知量に選び、それ等の未知量を含む聯立方程式を作り、それを聯立に解きて未知量を決定し、曲げモーメントに因る 2 次應力を算定するものである。詳説すれば、各節點に於て、節點モーメントの釣合の條件より 1 個の節點方程式を作り、斯くて節點と同數の聯立方程式を準備することが第 1 段の仕事である。而してこれ等の聯立方程式を聯立に解きて未知量を決定し、それ等の未知量を用ひて各節點に於ける曲げモーメントを算出し、維應力の決定をみることは第 2 段の仕事である。

然るに、それ等の方法は、第 1 段の仕事夫れ自身が簡単ならざるのみならず、第 2 段の仕事に計算労力を必要とすること極めて大なる爲に、計算者をして常に tedious であるの感を抱かしむること實に切なるものがある。殊に途中計算に於ける僅少なる誤算と雖も其の波及するところは實に大にして遠く、時としては、實用目的の爲に、故意に設けたる粗度の影響さへも致命的齟齬に導くことあり、實用計算法としては未だ縁遠きものである。

最近、それ等の方法と着限を異にしたる H. Cross の moment distribution method なるものあり、一特色を有するものではあるが、1 節點に集る部材の數が多き場合、即ちトラスの如き構造物に對しては、未だ甚だ簡単なりと云ふを得ず、連續梁の如きに對して、この方法は其の特徴を發揮するものと思考せらる。

筆者が茲に、提案應用したる撓角分配法は、聯立方程式を作るを要せず、從つて方程式を聯立に解く種類の手數より完全に解放せられて、機械的なる圖上計算に足るものである。詳言すれば、與へられたるトラスの圖を描き、各部材に所定の數値を記入して、計算尺と算盤とを使用して簡単なる算術計算を行ふことによりて未知量を決定し、節點 モーメント と維應力の算定に導くものであり、途中計算に於ける誤謬は常に氣付くの機會絶えず與へられ、且又、僅少なる計算の誤謬は次回の計算に依りて分配傳達せられて致命的結果を與ふることなし。この故に、此の種の計算が常に必要とするところの緊張を要する計算氣分の疲労より離脱して、終始“氣安さ”をもつて計算を續行し得るの長所を有し、「現在に於て吾々が認める正確程度」と同一結果に解答するを可能ならしむる一新解法である。

(昭和 9 年 10 月土木學會創立 20 周年を祝して)