THEORY OF INFLUENCE EQUATIONS.

（第 20 卷 第 9 號所載）

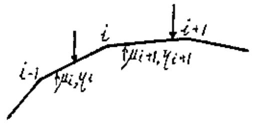
准員 工學士 横 道 英 雄

第 20 卷第 9 號の御厨氏の論文は，先に本誌第 18 卷第 9 號に於て，その原理及び式の誘導に就き述べられしもの丶應用例題であります。筆者は偶々この種の研究に就きましては多大の興味を有して居り，又最近剛節構造と云ふ事が大いに利用研究され，土木方面に取りても重要なる課題たらんとして居る譯でありますから，玆に些か氣付いた點を述べ討議の一端ともなしたいと考へます。

1. 概說 著者の誘導せる影響方程式は，撓角撓度法と同様の理論に基いたものと見られます。但し未知量の撰び方及びその符號に多少の差異は認められますが，質的には同じであります。而して著者は撓角撓度式中に未知量として含まる丶撓角 m 及び部材の廻轉角 φ を消去して，或る數の彎曲率と不靜定反力を未知量として含みその係數も比較的規則あるものたらしめたる影響方程式を誘導せられて居りますが，之は亦 3 曲能率式又は 4 曲能率式の理論を用ふる事に依りて，比較的簡單に求め得られるものであります。就中今囘著者の例述されし固定拱に關しては，後述の如く假りに未知量として著者案の M_L, H_L 及び V_L を採用するに，V_L は直ちに求め得られるのであります。蓋し著者の解法は未知量を撓角及び撓度に撰ばずして直接求めんとする應力に撰んだのでありますから，3 曲能率式又は 4 曲能率式の理論と軌を同ふするものと見られぬ事はないのであります。而して後者に於ては撓角及び撓度の 2 種の未知量の中，既に 1 個は消去されてあるのですから，之を用ひて所要の式を導く方がむしろ前者即ち著者の誘導法よりも勝つて居るものと云はれる可きでありませう。次に考へられる事は，かく未知量として應力を直接に撰ぶ結果，その解法は比較的簡單な架構に對してのみ有利となし得るも，1 點に 3 個以上の部材の集まるが如き架構に對しては未知量の數著しく增加し，而も之等の未知量の間に一定の消去法則を見出すに苦しみ勝ちな事であります。4 曲能率式がその理論に於ては總ての種類の架構にも適用され得るものであり乍ら而も未だ一般化されないのはか丶る理由の存してゐるからと存じます。假に一般架構の解法殊に多層多徑間架構に就いては撓角撓度法の機械的作表法に若くはないと思はれるのであつて，殊に筆者は山形，梯形及び弧形の特殊架構に對してその應用擴張をなしたのでありますから，我田引水の誹りは免かれぬも機械的作表法を以て剛節架構の最も一般的な解法と見做されるのであります。併し乍ら無論比較的簡單な特殊の場合に就いては 3 曲能率式等の理論に依りて應力を直接未知量とするも一良法でありまして，筆者もこの事に就いては他日詳述の機を得たいと考へて居ります。

2. 著者の固定拱の例題に就きて 著者は原著 Fig. 1 に示されし固定拱に就き懇切な例題を示され以て實驗値及び彈性理論に依る計算値と著者の影響方程式に依るものと比較し，その實用可能の程度に就き力說されたのでありますが，この例題を見るに當り筆者の最初の感想は何であつたかと申しますとその數値計算の余りにも細かすぎる事でありました。原著 Table 1 に於ては最大 6 桁，同じく Table 6 に於いては實に 8 桁の數値を取り扱つて居るのでありますが，果してかく迄の精度が必要であつたのでせうか。Table 10 の成果表を見ると之は最大 5 桁の數値であり，而も著者の値は 50% にも及ぶ誤差を有してゐるのであります。數値の計算に際して動もすれば徒らに桁數を多くして數字の羅列を喜ぶ傾向は從來の積弊と見られるものでありませう。

さて，本例題に於て著者は先づ影響方程式として Table 2 を示して居りますが，之と同樣の式を筆者は3曲能率式の理論に依りて求めて見ます。



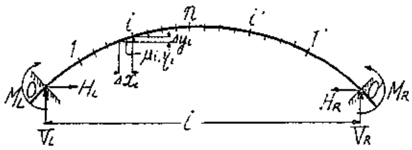
圖の如く相連續せる 2 部材 i 及 i+1 の節點を i−1, i, i+1 とすれば3曲能率式は一般に次の形にて與へられる。

$$\mu_i-\mu_{i+1}=\eta_i M_{i-1}+2(\eta_i+\eta_{i+1})M_i+\eta_{i+1}M_{i+1}+A_{i,i-1}+A_{i,i+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し　μ_i＝部材 i の廻轉角の $6E$ 倍

$\eta_i=\dfrac{l_i}{I_i}$＝剛率の逆數

$A_{i,i-1}=\eta_i(2C_{i,i-1}+C_{i-1,i})$＝荷重項



であつて，μ は時計樣廻轉に依り生ずるものを正量とし，M_i は拱の內側に張力を生ぜしむるものを正量とし，又荷重項の內容たる C は普通用ひられる撓角撓度式の荷重項であつて表示されてあるものである。

次に拱を假りに $2n$ 等分して左右の同位の點を i, i′ の如く命名すれば (1) 式より次の $2n+1$ 個の式を得。

$$\left.\begin{array}{l}
-\mu_1=2\eta_1 M_L+\eta_1 M_1 \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_i-\mu_{i+1}=\eta_i M_{i-1}+2(\eta_i+\eta_{i+1})M_i+\eta_{i+1}M_{i+1} \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_n-\mu_n'=\eta_n M_{n-1}+2(\eta_n+\eta_n')M_n+\eta_n' M_{n-1}' \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_{i+1}'-\mu_i'=\eta_{i+1}M_{i+1}'+2(\eta_{i+1}'+\eta_i')M_i'+\eta_i M_{i-1}' \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_1'=\eta_1 M_1'+2\eta_1' M_R
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但し荷重は各分格點に集中するものと見做して荷重項を省略した。上の (2) 式なる $2n+1$ 個の式の邊々相加ふる時は左邊は零となり右邊は次の如くなるべし。但し斷面左右對稱にして $\eta_i=\eta_i'$ とす。

$$\eta_i(M_L+M_R)+\sum_{i=1}^{n}(\eta_i+\eta_{i+1})(M_i+M_i')=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

次に撓度 μ の間には下の如き關係式あるべし。*

$$\sum \Delta x_i\mu_i-6E\sum \Delta l_i\frac{\Delta y_i}{l_i}=0$$

$$\sum \Delta y_i\mu_i+6E\sum \Delta l_i\frac{\Delta x_i}{l_i}=0$$

上式中 Δl_i は部材 i の材長 l_i の變化であつて伸びを正とし，Δx_i 及び Δy_i はその部材の材長 l_i の水平及び垂直射影長とします。故に右半分に於ては Δy_i は負符號を取る事になります。又直壓力に依りて全長に對し ΔH の壓縮ありとし支端の相互垂直變位を無視する時は

$$\sum \Delta x_i\mu_i+\sum \Delta x_i'\mu_i'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\sum \Delta y_i\mu_i-\sum \Delta y_i'\mu_i'=6E\Delta H \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

* 横道英雄：“特殊架構に對する機械的作表法の應用擴張”建築雜誌第 47 輯 571 號，609 頁

次に(2) 式の $2n+1$ 個の式を順に (1),(2)$\cdots$(n),(n+1),(n'), $\cdots$(1') と命名すれば

$$\Sigma\Delta x_i\mu_i+\Sigma\Delta x_i'\mu_i'=-\sum_{i=1}^{n}\left[\Delta x_i\sum_{i=1}^{i}(i)\right]+\sum_{i'=1'}^{n'}\left[\Delta x_i'\sum_{i'=1'}^{i'}(i')\right]$$

$$=-\alpha_0(M_L-M_R)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(M_i-M_i')=0 \cdots\cdots(6)$$

$$\Sigma\Delta y_i\mu_i-\Sigma\Delta y_i'\mu_i'=-\sum_{i=1}^{n}\left[\Delta y_i\sum_{i=1}^{i}(i)\right]+\sum_{i'=1'}^{n'}\left[\Delta y_i'\sum_{i'=1'}^{i'}(i')\right]$$

$$=-\beta_0(M_L+M_R)-\sum_{1}^{n}\beta_i(M_i+M_i')=6E\Delta H \cdots\cdots(7)$$

但し

$$\alpha_i=\Delta x_i\eta_i+\Delta x_{i+1}(3\eta_i+2\eta_{i+1})+3(\eta_i+\eta_{i+1})\sum_{i+2}^{n}x_i \cdots\cdots(8)$$

$$\beta_i=\Delta y_i\eta_i+\Delta y_{i+1}(3\eta_i+2\eta_{i+1})+3(\eta_i+\eta_{i+1})\sum_{i+2}^{n}\Delta y_i \cdots\cdots(9)$$

又若し本例題の如く $\Delta x_i=\Delta x=$ 一定 なる時は

$$\alpha_i=\Delta x\bar{\alpha}_i=\Delta x[\eta_i(\overline{3n-i}+1)+\eta_{i+1}(\overline{3n-i}-1)] \cdots\cdots(8')$$

となりませう。次に

$$M_i=M_L+V_L x_i-H_L y_i-M_{0i}$$

$$M_i'=M_L+V_L x_i'-H_R y_i'-M_{0i}'$$

でありますから (3),(6) 及び (7) の 3 式は夫々次の如くなりませう。

$$\left[4\sum_{1}^{n}\eta_i\right]M_L+\left[\sum_{0}^{n}(\eta_i+\eta_{i+1})(x_i+x_i')\right]V_L$$

$$-\left[2\sum_{0}^{n}(\eta_i+\eta_{i+1})y_i\right]H_L=\Sigma(\eta_i+\eta_{i+1})(M_{0i}+M_{0i}') \cdots\cdots(10)$$

$$\left[\sum_{0}^{n}\bar{\alpha}_i(x_i'-x_i)\right]V_L=\Sigma\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i}) \cdots\cdots(11)$$

$$\left[2\sum_{0}^{n}\beta_i\right]M_L+[\Sigma\beta_i(x_i+x_i')]V_L-\left[2\sum_{0}^{n}\beta_i y_i\right]H_L$$

$$=\Sigma\beta_i(M_{0i}+M_{0i}')-6E\Delta H \cdots\cdots(12)$$

(11) 式より直ちに V_L を求める事が出來ます。卽ち

$$V_L=\frac{\Sigma\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i})}{\sum_{0}^{n}\bar{\alpha}_i(x_i'-x_i)} \cdots\cdots(11')$$

從て M_L 及び H_L も求める事が出來ます。以上は之を表に依つて行へば一層簡明に理解されます。

今 (11') 式に依り V_L を本例題の data を用ひて計算して見ますに次の如くであります。

先づ注意を促すために著者の記號と筆者のとを對照して見るに

$$\eta_i \equiv 2EA \text{ or } 2EB \text{ or} \cdots = \frac{l_i}{I_i},$$

$$\Delta y_i \equiv y_i, \qquad \Delta x_i \equiv x_i,$$

$$y_i \equiv \sum^{i} y_i, \qquad x_i \equiv \sum^{i} x_i$$

と云ふ具合であります。

次に (11) 式の分母を計算します。下表の中で * 印あるは原著より四捨五入して用ひたものであります。

i	η_i	Δy_i	y_i	$\bar{\alpha}_i$	$x_i'-x_i$	$\bar{\alpha}_i(x'_i-x_i)$
0	0*	0*	0	3.900	324″	1 264
1	0.0150	20.87″	20.87″	7.522	288	2 166
2	0.0164	16.15	37.02	7.288	252	1 837
3	0.0184	12.77	49.77	7.100	216	1 534
4	0.0212	10.11	59.88	6.878	180	1 238
5	0.0249	7.87	67.75	6.515	144	938
6	0.0298	5.90	73.65	5.892	108	636
7	0.0364	4.11	77.76	4.848	72	349
8	0.0456	2.43	80.19	2.411	36	87
9	0.0587	0.80	80.99	0.587	0	0
						$\sum\bar{\alpha}_i(x_i'-x_i)=10\,049$

次に分子を計算しますに原著の如く右半分の4點に荷重ある場合に就いて求める。從て M_{0i} は零である。括弧内の數字は原著の記號に依るものであります。

點	點 8′(10) に $P=1$		點 6′(12) に $P=1$		點 4′(14) に $P=1$		點 2′(16) に $P=1$	
	$M_{0i}'-M_{0i}$	$\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i})$	$M_{0i}'-M_{0i}$	$\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i})$	$M_{0i}'-M_{0i}$	$\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i})$	$M_{0i}'-M_{0i}$	$\bar{\alpha}_i(M_{0i}'-M_{0i})$
0′(18)	144	562	108	421	72	281	36	130
1′(17)	126	948	90	677	54	406	18	136
2′(16)	108	787	72	525	36	262	0	0
3′(15)	90	639	54	383	18	128		$\sum=266$
4′(14)	72	495	36	248	0	0		
5′(13)	54	352	18	117		$\sum=1\,076$		
6′(12)	36	212	0	0				
7′(11)	18	87		$\sum=2\,371$				
8′(10)	0	0						
		$\sum=4\,082$						

從て V_L の影響式は次の如くなりませう。

荷重點	8′(10)	6′(12)	4′(14)	2′(16)
筆者値 V_L	0.4062	0.2359	0.1071	0.0265
著者値 V_L	0.4054 1	0.2355 9	0.1070 8	0.0274 3

筆者値と著者値の間に存する多少の誤差は全く計算上の精度に起因せるにすぎない。

3. 結 論 之を要するに著者が架構一般に對する解法の捷徑として提案せられし影響方程式は3曲能率式の理論の如く，未知量として直接之を求めんとする應力に撰ぶものであるを以て，一面に於ては甚だ便利でありま

すが又他の一面に於ては，架構條件が複雜となるに從ひ未知量の增加となり又その消去も複雜となる爲その都度工夫を要する事も生じ延いてはその應用の一般性を失せしむる事となり易いのであります。之はこの種の解法の短所でありまして今後の研究を要する問題でありませう。

併し乍ら建築架構と異なり土木方面に於て實際に遭遇するものは比較的簡單な架構が多いのでありますから著者案を用ひて利ある場合もありませう。只惜しむらくはかゝる簡單な架構に對しては從來相當研究されてあり，從つて便利な解法が多いのでありますから，之等を排して著者案を賞用すると云ふ事は相當困難な場合もあるのであります。

例へば arch や ring 等に關しましても，その目的が單に解くと云ふ丈けにあるならば色々な方法もあるのであつて，殊に上述の如く3曲能率式を用ひて尙一層簡單に解き得る事もあり，その中いづれが果して最も早く，簡單に，而も精確な眞値を與へるかと云ふ事になりますと相當考へを要するのであります。著者案は拱を數多の小部分に分ちて之を剛節架構と假定するため，先に會員庄野氏の討議の中に於て指摘されし如くその變形に或る癖を與へる事になり眞値を得る事が出來ないのであつて，計算過程の簡易さに大差なしとすれば普通法に先んぜられる虞なしとしないのであります。

擱筆するに當り拙文中或は禮を失する所あらば御海容を乞ひ，不明の點に對し宜敷御啓發を希ふ次第であります。