

論 說 報 告

第21卷第1號 昭和10年1月

不静定構造の解法に應用したる撓角分配法

會員 工學博士 鷹 部 屋 福 平*

Method of Slope Distribution applied to Analysis of Statically Indeterminate Structures

By Fukuhei Takabeya, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

本文は、不静定構造の解法に、未知量を含む聯立方程式の解を用ふることなく、不静定構造物の圖形上に於て、計算尺を使用して簡單なる算術計算を行ひ、理論的に誘導したる撓角・撓度分配率なるものに比例して unbalanced slope 並に unbalanced deflection を逐次分配傳達して釣合に導く方法を述べたもので、ラーメン又は連続梁の實用解法として役立つものである。Hardy Cross 氏の unbalanced moment を逐次分配傳達せしむる方法は、1 個の節點にて其節點に集る部材の數だけの未知量を取扱ふこととなり、數個の部材が 1 節點に集る場合には複雑する。然るに本法は、各節點に於て、常に 1 個の不静定未知量を恰も静定量の如く直接に其場で一つ一つ決定して行くもので、不静定構造が複雑すればする程、其特徴たる簡易性を發揮するものである。

曩に著者の提案した機械的作表法は、聯立方程式を無計算により機械的に作ることを示すものであり、繰返し試索法は、其等の聯立方程式をイテラチオン法によつて、解くことを述べたものであつた。是等の方法は純理論的に問題を取扱ひ、それに正面から解決を與へたものであつたが、本法は之に反し同じ正確さを以て解法の立脚點を改變し、純實用的に問題を側面から解決する一つの簡易法を示すものである。而して兩者の關係、即ち理論と實際の兩面的一致を茲に説明したものが本文であつて、全然出發點を異にした兩解法の説明に一致點を見出したことに興味がある。

目 次

	頁
第 1 章 撓角分配法理論	2
緒 論	2
1. 不均衡性撓角の分配に依る理論	
2. 不均衡性撓角・撓度の分配に依る理論	
(1) 垂直荷重を有する場合, (2) 水平荷重を有する場合	
第 2 章 撓角分配法應用例題	10
1. 應用例題 (其 1)	
2. 應用例題 (其 2)	
3. 應用例題 (其 3)	
4. 應用例題 (其 4)	
5. 應用例題 (其 5)	
第 3 章 固定端ラーメン, 固定柱ラーメン並に鉸端ラーメンに關する理論	23
1. 固定端ラーメンに關する理論	24
(1) 固定端ラーメン	

* 北海道帝國大學教授

(2) 固定端ラーメンの1材端が鉸構造なる場合	
(3) 固定端ラーメンの1固定端に移動のみを與へたる場合	
(4) 固定端ラーメンの柱の下端を鉸構造とし、柱に撓度を與へたる場合	
(5) 固定端ラーメンの1固定端に移動と撓角を與へたる場合	
(6) 固定端ラーメンの固定端に撓角を與へ、柱には撓度を與へたる場合	
(7) 固定端ラーメンの梁の1端を鉸構造とし、其他の材端に撓角を與へ、且つ柱には撓度を與へたる場合	
2. 固定柱ラーメンに關する理論	29
(8) 垂直荷重に對する固定柱ラーメン	
(9) 垂直荷重を有する固定柱ラーメンの固定端に撓角を與へたる場合	
(10) 垂直荷重に對する固定柱ラーメンの柱の下端が鉸構造なる場合	
(11) 垂直荷重に對する固定柱ラーメンの柱の下端が鉸構造を有し、上端の總節點に撓角を與へたる場合	
3. 鉸端ラーメンに關する理論 (水平節點荷重の場合)	32
(12) 鉸端ラーメン	
(13) 鉸端ラーメンによる層方程式と撓度概算式	
(14) 鉸端ラーメンに依る撓角概算式	
(15) 奇數張間・偶數張間の對稱ラーメンに於ける撓角式	
4. 固定端ラーメンと鉸端ラーメンの併用 (一般水平荷重の場合)	36
(16) 撓度概算式の誘導	
結語	38

第1章 撓角分配法理論

緒論

不静定構造の解法には、弾性變形を不静定量に選ぶ種類のもの、反力又は内力を不静定量に選ぶ種類のもの、並に兩者を混用する種類のもの等があるが、茲に述べんとする撓角分配法は上記3者のうちで第1者に屬するものである。

普通、不静定構造の解法は、取扱ふ不静定量の数が少い場合には、如何なる方法に依つて計算するも計算努力には大差は無いが、多數の不静定量を取扱ふ場合には選ぶべき方法の如何によつて難易の別れるところ甚しい。

撓角分配法は、如何に多數なる不静定未知量を含む構造に對しても、常に1個の未知量を含む1個の式より其未知量を簡單に決定して行く方法で、この計算を構造物の圖上に於て計算尺を使用して行ふものである。

本法は斯くの如く構造物の圖面上に於て行ふ計算ではあるが、圖式計算ではなく、加減乗の3法によつて規則的な簡単な算術計算を行つて、釣合状態にない撓角・撓度を、理論的に誘導した撓角分配率と撓度分配率に比例して逐次分配傳達して釣合の状態に導いて行く方法である。

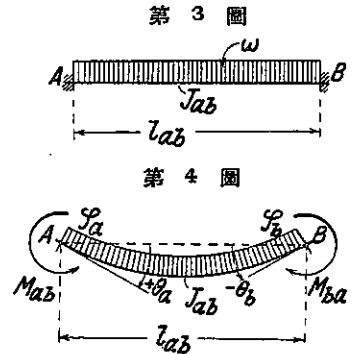
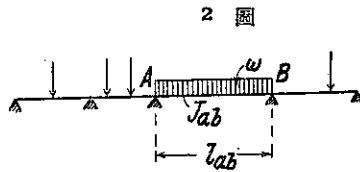
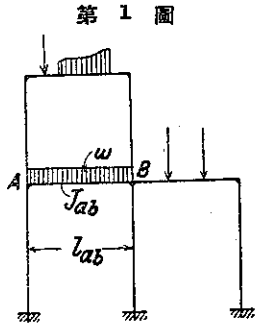
例へば n 個の未知撓角を含むラーメンの解法に對しても、其ラーメンの圖を描くことが既に計算上の意味を有することとなり、各節點にて1個づつ未知撓角を決定し得るのであるから n 個の聯立方程式を解くが如き複雑さは無く、而も構造全體が一體として働く關係上、弾性變形は遠近相互傳達して因果關係を有すべき性質のものであるが、この性質は逐次計算に依り傳達分布して充分に得られるのである。

今第1圖に示すラーメンと、第2圖に示す連続梁に於て、兩者より梁 AB を抜き出して考へて見るに、その

両端に働く曲げモーメント M_{ab} , M_{ba} は第 3 圖に示す両端固定梁の端部モーメントに類似して居る。

而して、兩者相異ところは、前者には節點 A, B に撓角が存在するが、後者には撓角が完全に零なることである。

従つてラーメンに於ける梁 AB の節點モーメント M_{ba} は両端固定梁の端部モーメント M_{ba} (普通これを撓角法に於ては C_{ba} で表はす) に何程かのモーメント ΔM_{ba} を附加したもので、或は減じたもので表すことが出来る理である。即ち $M_{ba} = C_{ba} + \Delta M_{ba}$



この式の中で ΔM_{ba} は節點 A, B に於ける撓角の函数として表され次式の如きものである (第 4 圖)。

$$\Delta M_{ba} = K_{ab}(2\varphi_b + \varphi_a)$$

此式中 $K_{ab} = J_{ab}/l_{ab}$, J_{ab} は部材 AB の慣性モーメント, l_{ab} は同部材の長さ, $\varphi_a = 2E\theta_a$, $\varphi_b = 2E\theta_b$, θ_a , θ_b は材端 A 及び B に於ける撓角, E は材料の弾性係数である。

従つて M_{ba} を決定する主要素は両端固定梁に対する端部モーメントの C_{ba} であり、撓角に因る補整の役目をつとめるものが ΔM_{ba} 即ち $K_{ab}(2\varphi_b + \varphi_a)$ の項である。

これが爲にはラーメン又は連続梁全體から算出した φ_a , φ_b の値を必要とするもので、本文の撓角分配法は、是等の撓角を決定する一解法である。

若し又 ΔM_{ba} を決定するに撓度も併せて必要とする場合には、撓度の決定方法も本法に述べてある。

C_{ab} , C_{ba} は両端固定梁に於ける端部モーメントなることは前記の如くで、種々の荷重に對して其等の解式は教科書又はポケット・ブックに掲載されて居り、撓角法に於て表示せらるゝところである。

之を要するに、撓角分配法は連続梁・ラーメン・トラスの 2 次應力等の計算に應用せらる可きもので、此方法を大別して

1. 不均衡性撓角 (unbalanced slope) の分配に依る理論
2. 不均衡性撓角・撓度 (unbalanced slope and deflection) の分配に依る理論

の二つとなし撓角分配法なる名稱の下に總括して述べんとするものである。

1. 不均衡性撓角の分配に依る理論

各節點に移動を生ずることなく、撓角のみの變化を取扱へば可なる如き構造に就て説明すれば次の如くである。

第 5 圖に示すラーメンは撓度を含まず撓角のみを有するラーメンである。今、このラーメンの節點 A, B, C に於ける撓角 φ_a , φ_b , φ_c を求む。

これが爲に第 5 圖に示すラーメンを第 6 圖に示す如く 3 個の固定端を有するラーメンに解體して考へて見る。

勿論、第 5 圖のラーメンに於ける $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ を求めるに、第 6 圖の固定端を有するラーメンから $\varphi_A^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)}$ を求めることは一見大差がある様に思はれる。

併し其等の $\varphi_A^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)}$ を決定することは極めて簡單で第 3 章 (1) に於ける (5) 式より

$$\varphi_A^{(0)} = \frac{P_A}{\rho_A}, \quad \varphi_B^{(0)} = \frac{P_B}{\rho_B}, \quad \varphi_C^{(0)} = \frac{P_C}{\rho_C}$$

茲に P は suffix の示す節點に於ける C (兩端固定梁の端部モーメント) の總和であり、 ρ は其 suffix の示す節點に集る K (即ち J/l) の和の 2 倍であること第 3 章 (5) 式に示すところである。

次に第 6 圖に示した個々のラーメンの代りに第 7 圖に示す如く節點 A, B, C に $\varphi_A^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)}$ を與へたラーメンを考へて見れば、之に對する $\varphi_A^{(1)}, \varphi_B^{(1)}, \varphi_C^{(1)}$ は第 3 章 (14) 式に於て $\mu=0$ と考ふれば得られる。

即ち第 7 圖 (A) に對して第 3 章 (14) 式より

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{P_A}{\rho_A} - \{\varphi_C^{(0)}\gamma_{CA} + \varphi_B^{(0)}\gamma_{AB}\}$$

茲に

$$P_A = C_{Aa} + C_{AB} - C_{AC}$$

$$\rho_A = 2(K_{Ca} + K_{AB} + K_{CA})$$

$$\gamma_{CA} = \frac{K_{Ca}}{\rho_A}, \quad \gamma_{AB} = \frac{K_{AB}}{\rho_A}$$

..... (A)

第 7 圖 (B) に對しては

$$\varphi_B^{(1)} = \frac{P_B}{\rho_B} - \{\varphi_A^{(0)}\gamma_{AB} + \varphi_C^{(0)}\gamma_{BC}\}$$

茲に

$$P_B = C_{Bb} - C_{BA} - C_{BC}$$

$$\rho_B = 2(K_{AB} + K_b + K_c + K_a + K_{BC})$$

$$\gamma_{AB} = \frac{K_{AB}}{\rho_B}, \quad \gamma_{BC} = \frac{K_{BC}}{\rho_B}$$

..... (B)

第 7 圖 (C) に對しては

$$\varphi_C^{(1)} = \frac{P_C}{\rho_C} - \{\varphi_A^{(0)}\gamma_{CA} + \varphi_B^{(0)}\gamma_{BC}\}$$

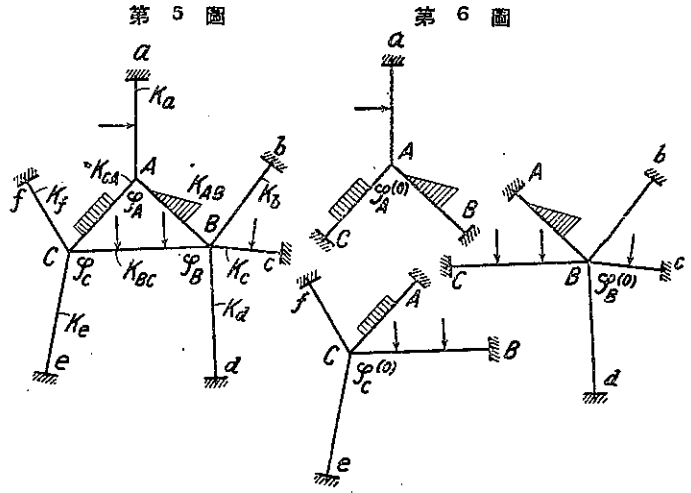
茲に

$$P_C = C_{Ca} + C_{CB}$$

$$\rho_C = 2(K_{Ca} + K_{BC} + K_c + K_f)$$

$$\gamma_{CA} = \frac{K_{Ca}}{\rho_C}, \quad \gamma_{BC} = \frac{K_{BC}}{\rho_C}$$

..... (C)



是等 (A), (B), (C) の 3 式を見るに、何れも方程式の右邊は既知量であるから $\varphi_A^{(1)}$, $\varphi_B^{(1)}$, $\varphi_C^{(1)}$ は決定せらる。

是等 $\varphi_A^{(1)}$, $\varphi_B^{(1)}$, $\varphi_C^{(1)}$ の數値を實際問題として考へて見るに、其等は $\varphi_A^{(0)}$, $\varphi_B^{(0)}$, $\varphi_C^{(0)}$ の數値に比較して眞値 φ_A , φ_B , φ_C に接近して居る。

上記の計算の場合に第 7 圖 (A) より $\varphi_A^{(1)}$ を決定した後、同圖 (B) より $\varphi_B^{(1)}$ を決定するのに、節點 A の撓角に對して $\varphi_A^{(0)}$ を用ふるよりも、それより一層眞値に近いところの今決定せられた $\varphi_A^{(1)}$ を使用した方が得策である。

斯くすれば (B) 式の代りに次式を用ふることとなる。

$$\varphi_B^{(1)} = \frac{P_B}{\rho_B} - \{ \varphi_A^{(1)} \gamma_{AB} + \varphi_C^{(0)} \gamma_{BC} \} \dots \dots (B)$$

同様な考察から第 7 圖 (C) より $\varphi_C^{(1)}$ を決定する場合に、節點 A, B の撓角として $\varphi_A^{(0)}$, $\varphi_B^{(0)}$ の値を用ふるよりも、既に算出せられて居る $\varphi_A^{(1)}$, $\varphi_B^{(1)}$ の値を使用する方が得策である。

斯くすれば (C) 式の代りに次式を用ふることとなる。

$$\varphi_C^{(1)} = \frac{P_C}{\rho_C} - \{ \varphi_A^{(1)} \gamma_{CA} + \varphi_B^{(1)} \gamma_{BC} \} \dots \dots (C)$$

以上の計算によつて撓角 $\varphi_A^{(1)}$, $\varphi_B^{(1)}$, $\varphi_C^{(1)}$ が決定したのである。是等の $\varphi^{(1)}$ の値よりも更に眞値に近いところの $\varphi_A^{(2)}$, $\varphi_B^{(2)}$, $\varphi_C^{(2)}$ を求むるには、第 7 圖 (A) に於て $\varphi_B^{(0)}$, $\varphi_C^{(0)}$ の代りに今計算した $\varphi_B^{(1)}$, $\varphi_C^{(1)}$ を用ふ。即ち式として之を表せば (A) 式より

$$\varphi_A^{(2)} = \frac{P_A}{\rho_A} - \{ \varphi_C^{(1)} \gamma_{CA} + \varphi_B^{(1)} \gamma_{AB} \} \dots \dots (A)a$$

同様に第 7 圖 (B) 對して $\varphi_A^{(0)}$ の代りに $\varphi_A^{(2)}$ を用ひ、 $\varphi_C^{(0)}$ の代りに $\varphi_C^{(1)}$ を用ふれば

$$\varphi_B^{(2)} = \frac{P_B}{\rho_B} - \{ \varphi_A^{(2)} \gamma_{AB} + \varphi_C^{(1)} \gamma_{BC} \} \dots \dots (B)a$$

同様に

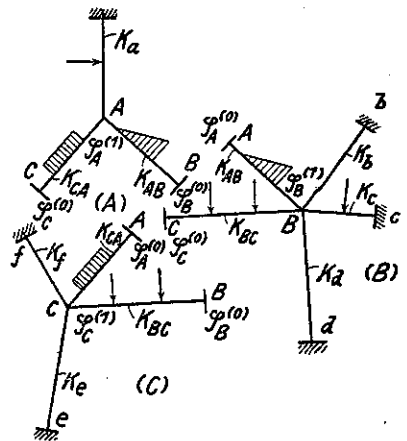
$$\varphi_C^{(2)} = \frac{P_C}{\rho_C} - \{ \varphi_A^{(2)} \gamma_{CA} + \varphi_B^{(2)} \gamma_{BC} \} \dots \dots (C)a$$

斯くして得たる $\varphi_A^{(2)}$, $\varphi_B^{(2)}$, $\varphi_C^{(2)}$ は前記 $\varphi_A^{(1)}$, $\varphi_B^{(1)}$, $\varphi_C^{(1)}$ よりも眞値に一層近いものであり實際問題としては $\varphi^{(2)}$ までを計算すれば實用上役立つものである。

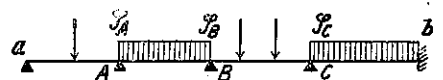
この方法は、其構造の如何に複雑なるに關せず常に、一樣に 1 個宛の未知量を逐次決定して行くものである。普通一般の方法に於ては未知量の數が 2 倍となれば、計算の手續は 2 倍となるにあらずして、數倍するものが多い。斯くの如くして、次章の例題に於て示す如く、多數の未知量を取扱ふに際しては本法は實用上最も取扱ひ易い方法の一つと考へられる。

若し又第 8 圖に示す様な連続梁の場合には、前記の方法と同様に第 9 圖の如き 3 つの連続梁に分解して先づ、 $\varphi_A^{(0)}$, $\varphi_B^{(0)}$, $\varphi_C^{(0)}$ を求め、次に第 10 圖に示す如く、其 $\varphi_B^{(0)}$ を用ひて $\varphi_A^{(1)}$

第 7 圖



第 8 圖



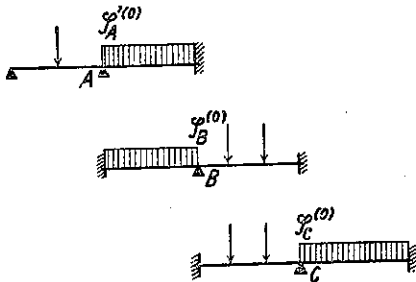
を求め (A 圖), 此 $\varphi_A^{(1)}$ と $\varphi_C^{(0)}$ を以つて $\varphi_B^{(1)}$ を決定する (B 圖)。

然る後此 $\varphi_B^{(1)}$ を用ひて $\varphi_C^{(1)}$ を求める (C 圖)。

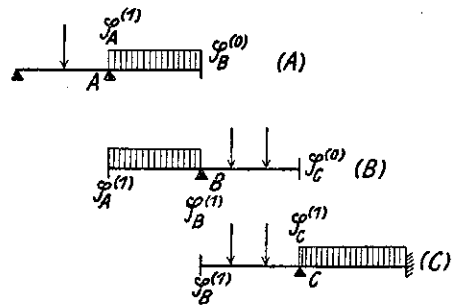
以下同様にして第 10 圖 (A) に於て $\varphi_B^{(0)}$ の代りに $\varphi_B^{(1)}$ を用ひて $\varphi_A^{(2)}$ を求む。第 10 圖 (B) に於て $\varphi_A^{(1)}$ の代りに $\varphi_A^{(2)}$ を用ひ、 $\varphi_C^{(0)}$ の代りに $\varphi_C^{(1)}$ を用ひて $\varphi_B^{(2)}$ を求む。

次に第 10 圖 (C) に於て $\varphi_B^{(1)}$ の代りに $\varphi_B^{(2)}$ を用ひて $\varphi_C^{(2)}$ を決定する。

第 9 圖



第 10 圖



實際問題としては、 $\varphi^{(2)}$ を求むれば既に充分なることが多い。此方法は次章の例題に於て詳説する。

2. 不均衡性撓角・撓度の分配に依る理論

前節に於て取扱つた構造は、支點又は節點に移動を生ぜず (即ち撓度を含まず)、撓角のみを生ずる場合であつたが本節に於ては、更に一層一般なる場合として、撓角・撓度を共に生ずる場合に就て述べる。

而して問題を二つに別ち、(1) 垂直荷重を有する場合、(2) 水平荷重を有する場合として説明する。

(1) 垂直荷重を有する場合

第 11 圖に示す如きラーメンは、各節點に撓角を生じ、上層・下層各 1 個宛の撓度を柱に生ずるものである。總て本法に於ては、撓度を生ずるラーメンに對しては、先づ柱の撓度 $\mu^{(0)}$ を決定するもので、第 3 章 (8). (17) 式によるに

$$\mu^{(0)} = 0 \dots \dots \dots (a)$$

である。

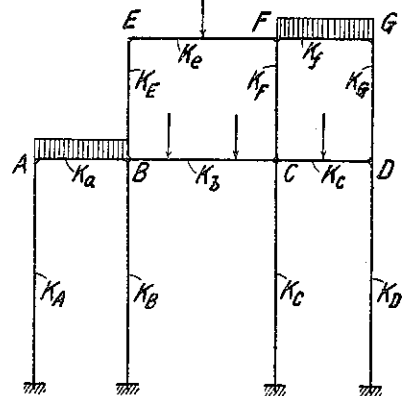
故に垂直荷重の場合には、各層の $\mu^{(0)} = 0$ として出發するもので、この結果は前節と同様に撓度が零なる固定端を有する個々のラーメンに分解して第 12 圖より $\varphi_A^{(0)}$ 、 $\varphi_B^{(0)}$ 、 $\varphi_C^{(0)}$ 等を求む。

次に是等の既知となつた $\varphi^{(0)}$ の中で、 $\varphi_B^{(0)}$ 、 $\varphi_C^{(0)}$ 、 $\varphi_D^{(0)}$ 、 $\varphi_E^{(0)}$ 、 $\varphi_F^{(0)}$ 、 $\varphi_G^{(0)}$ を用ひて第 13 圖に對し第 3 章 (9). (18) 式より $\mu_1^{(1)}$ を決定することが出来る。

即ち

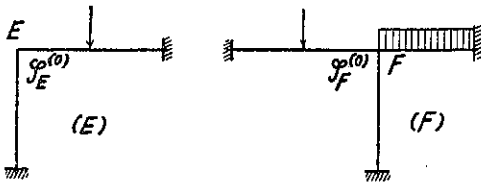
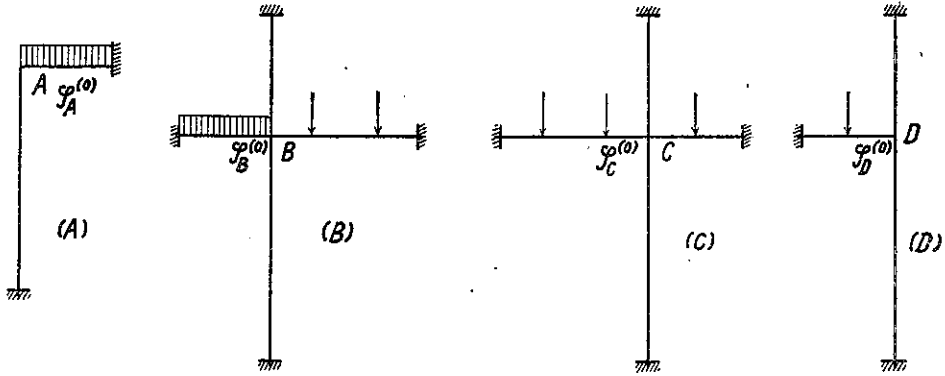
$$\left. \begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= - \{ (\varphi_B^{(0)} + \varphi_E^{(0)})t_E + (\varphi_C^{(0)} + \varphi_F^{(0)})t_F + (\varphi_D^{(0)} + \varphi_G^{(0)})t_G \} \\ \text{茲に} \quad t_E &= \frac{3K_E}{T_1}, \quad t_F = \frac{3K_F}{T_1}, \quad t_G = \frac{3K_G}{T_1} \\ T_1 &= 2(K_E + K_F + K_G) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

第 11 圖

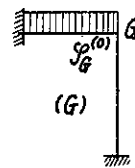


上式の右邊は總て既知量であるから $\mu_1^{(1)}$ を決定することを得るのである。

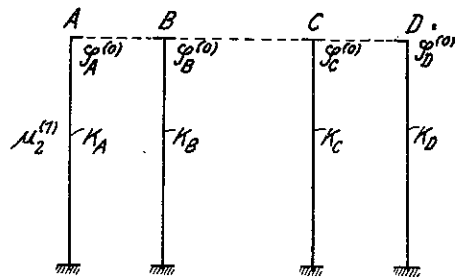
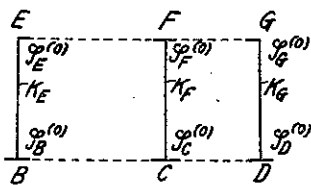
第 12 圖



第 13 圖



第 14 圖



同様に第 14 圖に對し $\mu_2^{(1)}$ を決定すれば次式が得られる。

$$\mu_2^{(1)} = - \{ \varphi_A^{(0)} t_A + \varphi_B^{(0)} t_B + \varphi_C^{(0)} t_C + \varphi_D^{(0)} t_D \}$$

茲に

$$t_A = \frac{3K_A}{T_2}, \quad t_B = \frac{3K_B}{T_2}, \quad t_C = \frac{3K_C}{T_2},$$

$$t_D = \frac{3K_D}{T_2}, \quad T_2 = 2(K_A + K_B + K_C + K_D)$$

}(c)

次に (b), (c) 兩式により第 1 層及び第 2 層の $\mu^{(1)}$ が決定し且つ各節點の $\varphi^{(0)}$ が決定して居るから、第 3 章 (6) に於ける (14) 式より $\varphi^{(1)}$ を決定することが出来る。

即ち $\varphi_A^{(1)}, \varphi_B^{(1)}, \varphi_C^{(1)}, \varphi_D^{(1)}, \varphi_E^{(1)}, \varphi_F^{(1)}, \varphi_G^{(1)}$ が決定する。

故に本節 (b) 式中の $\varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)} \dots \varphi_G^{(0)}$ の値の代りに上記の $\varphi_B^{(1)}, \varphi_C^{(1)} \dots \varphi_G^{(1)}$ を用ふれば、 $\mu_1^{(1)}$ よりも一層眞値 μ_1 に近い $\mu_1^{(2)}$ が決定せられる。

又同様に、本節 (c) 式中の $\varphi_A^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)}, \varphi_D^{(0)}$ の値に換ふるに上記の $\varphi_A^{(1)}, \varphi_B^{(1)}, \varphi_C^{(1)}, \varphi_D^{(1)}$ を用ふ

れば、 $\mu_2^{(1)}$ よりも一層眞値 μ_2 に近い $\mu_2^{(2)}$ が求められる。

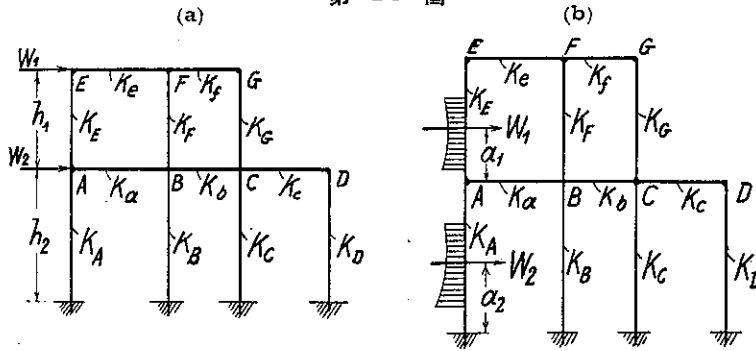
逐次同様の計算を圖上に於て繰返へし行ひ、實用上より見て unbalance の程度が支障なきに至つて計算を打ち切る。

後述の計算例題を参照せられたし。

(2) 水平荷重を有する場合

第 15 圖 (a), (b) に示す如き水平荷重を有するラーメンは、各節點に撓角を生じ、上層・下層各 1 個の撓度を生ずる。

第 15 圖



總て撓角分配法で問題を解くには、撓角・撓度の概算値を必要とする。而して其の計算法は種々あるが、本文に於ては水平荷重に對して下の様にして決定した。

(a) 水平節點荷重を有する場合 水平荷重を別けてラーメンの一侧の節點に集中するものと一般水平荷重との 2 種にした方が比較的正確値に近い數値が得られるかとの見解から 2 様に別けて述べることにした。

即ち第 15 圖 (a) の如く水平節點荷重を有する場合には、第 3 章 (31) 式に依り $\mu_1^{(0)}$ を決定する。

例へば上層に對しては

$$\left. \begin{aligned} \mu_1^{(0)} &= -\alpha_1 \frac{H_1}{T_1} \\ \text{茲に} \quad \alpha_1 &\doteq 2.0 \text{ (第 3 章 (13))}, H_1 = W_1 h_1 \\ T_1 &= 2(K_B + K_F + K_G) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (d)$$

下層に對しては

$$\left. \begin{aligned} \mu_2^{(0)} &= -\alpha_2 \frac{H_2}{T_2} \\ \text{茲に} \quad \alpha_2 &\doteq 1.3, \quad H_2 = (W_1 + W_2) h_2 \\ T_2 &= 2(K_A + K_B + K_C + K_D) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (e)$$

以上の計算により $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}$ が決定出来るから、次には第 3 章 (33) 式により各節點の撓角を概算する。

即ち (33) 式より

$$\varphi_A^{(0)} = -\beta_A (\mu_1^{(0)} + \mu_2^{(0)}) = -0.111(\mu_1^{(0)} + \mu_2^{(0)}) \dots\dots\dots (f)$$

$$\varphi_B^{(0)} = -0.083(\mu_1^{(0)} + \mu_2^{(0)}) \dots\dots\dots (g)$$

等。

即ち總ての節點に於ける $\varphi^{(0)}$ が決定せらる。

故に第 3 章 (29) 式より

$$\left. \begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= -\frac{H_1}{T_1} - \{(\varphi_A^{(0)} + \varphi_E^{(0)})t_E + (\varphi_B^{(0)} + \varphi_F^{(0)})t_F + (\varphi_C^{(0)} + \varphi_G^{(0)})t_G\} \\ \text{茲に} \quad H_1 &= W_1 h_1, \quad T_1 = 2(K_E + K_F + K_G) \\ t_E &= \frac{3K_E}{T_1}, \quad t_F = \frac{3K_F}{T_1}, \quad t_G = \frac{3K_G}{T_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (h)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2^{(1)} &= -\frac{H_2}{T_2} - \{\varphi_A^{(0)}t_A + \varphi_B^{(0)}t_B + \varphi_C^{(0)}t_C + \varphi_D^{(0)}t_D\} \\ \text{茲に} \quad H_2 &= (W_1 + W_2)h_2, \quad T_2 = 2(K_A + K_B + K_C + K_D) \\ t_A &= \frac{3K_A}{T_2}, \quad t_B = \frac{3K_B}{T_2} \\ t_C &= \frac{3K_C}{T_2}, \quad t_D = \frac{3K_D}{T_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (i)$$

上記の計算により各節點の $\varphi^{(0)}$ 及び各層の $\mu^{(1)}$ が決定したから、第 3 章 (34) 式より $\varphi^{(1)}$ を求む。

例へば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A^{(1)} &= -\{(\varphi_E^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_0 + \varphi_B^{(0)}\gamma_r + \mu_2^{(1)}\gamma_u\} \\ \text{茲に} \quad \gamma_0 &= \frac{K_E}{\rho_A}, \quad \gamma_r = \frac{K_a}{\rho_A} \\ \gamma_u &= \frac{K_A}{\rho_A}, \quad \rho_A = 2(K_E + K_u + K_A) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (j)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_B^{(1)} &= -\{\varphi_F^{(0)} + \mu_1^{(0)}\gamma_0 + \varphi_C^{(0)}\gamma_r + \mu_2^{(1)}\gamma_u + \varphi_A^{(1)}\gamma_i\} \\ \text{茲に} \quad \gamma_0 &= \frac{K_F}{\rho_B}, \quad \gamma_r = \frac{K_b}{\rho_B}, \quad \gamma_u = \frac{K_b}{\rho_B} \\ \gamma_i &= \frac{K_a}{\rho_B}, \quad \rho_B = 2(K_F + K_b + K_B + K_a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (k)$$

等。

次に (h), (i) 兩式に於ける $\varphi^{(0)}$ の代りに、今求めた $\varphi^{(1)}$ を用ひて $\mu^{(2)}$ を決定する。

$\mu^{(2)}$ が決定した時は、(j) 式に於て $\mu^{(1)}$ の代りに $\mu^{(2)}$ を用ひ、 $\varphi^{(0)}$ の代りに $\varphi^{(1)}$ を用ひて $\varphi_A^{(2)}$ を求む。

逐次この方法を繰返す。

上記の計算は、一見解式に入れて順次未知量を決定する様に見えるが、次章の例題により明かなる如く圖上に於て行はれ、一々解式によるものではなく、慣るれば簡単に計算の出来るものである。

(b) 一般水平荷重を有する場合 第 15 圖 (b) に示す如く、ラーメンの一侧にかゝる一般水平荷重に對しては、第 3 章 (46) 式に依り $\mu_r^{(0)}$ を決定する。

(46) 式中の α_r に對しては第 1 表を參考して上層に對しては、 $\alpha_1 \doteq 2.2$ 、下層に對しては $\alpha_2 \doteq 1.5$ とする。

$\mu_1^{(0)}$ 、 $\mu_2^{(0)}$ が決定出來た時は、(33)、(38)、(41) 式を用ひて各節點に於ける $\varphi_m^{(0)}$ を概算する。

次に $\varphi^{(0)}$ を用ひて (37) 式より $\mu_1^{(1)}$ 、 $\mu_2^{(1)}$ を求む。

$\mu_1^{(1)}$ 、 $\mu_2^{(1)}$ が決定出來た時は第 3 章 (14) 式を用ひて $\varphi_m^{(1)}$ を求む。

逐次、圖上に於て、此方法を繰返し行ふ。

第 2 章に於ける應用例題 (其 4) 參照。

第 2 章 撓角分配法應用例題

1. 應用例題 (其 1)

撓角分配法の應用例題として第 16 圖に示す高架ラーメン橋の節點 B 及び C に於ける曲げモーメントを求む。

本例題は Hardy Cross 氏の moment distribution method により Wilson 氏^{*)}の取扱つたものであるが、茲には同じこの問題を筆者提案の撓角分配法 (method of slope distribution) に依り解くことにする。

(1) 準備計算

今、このラーメンの各部材に就て K を計算すれば $K = \frac{J}{l}$ 又は $\frac{J}{h}$ であるから

$$K_{ab} = \frac{1}{12} = 0.083 \quad K_{bc} = \frac{4}{24} = 0.167$$

$$K_{ca} = \frac{3}{18} = 0.167 \quad K_{be} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$K_{cf} = \frac{1}{24} = 0.0417$$

又荷重項を計算する爲に C を求むれば

$$C_{bc} = C_{cb} = \frac{wl^3}{12} = \frac{30\,000(24)}{12} = 60\,000 \text{ ft. lbs.}$$

$$C_{ba} = C_{ab} = \frac{wl^3}{12} = \frac{12\,000(12)}{12} = 12\,000 \text{ ft. lbs.}$$

$$C_{ca} = C_{ac} = \frac{wl^3}{12} = \frac{24\,000(18)}{12} = 36\,000 \text{ ft. lbs.}$$

是等の値をラーメンの圖に記入したものは第 17 圖である。

但し第 17 圖の中には

$$\rho_b = 2(K_{ab} + K_{bc} + K_{be}) = 2(0.083 + 0.167 + 0.083) = 0.666$$

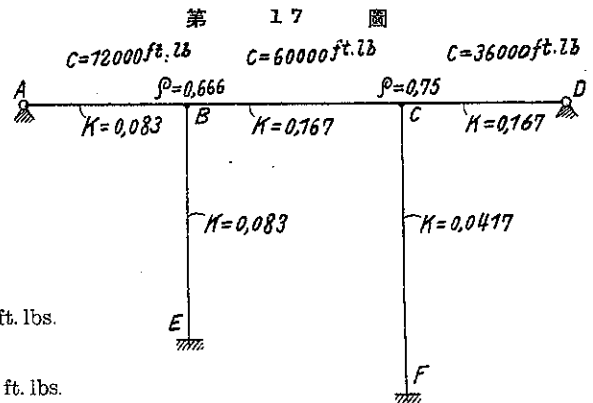
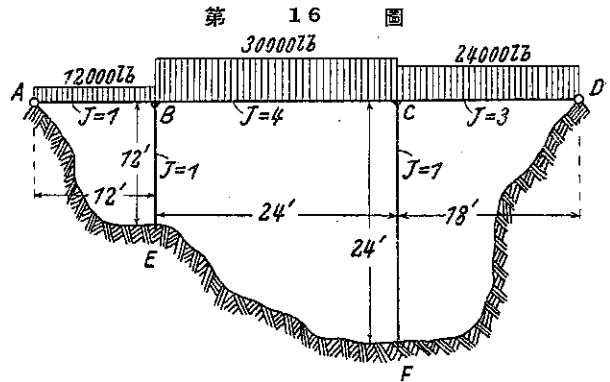
$$\rho_c = 2(K_{bc} + K_{ca} + K_{cf}) = 2(0.167 + 0.167 + 0.417) = 0.75$$

をも記入してある。

又荷重項並に ρ を算出すれば A 點並に D 點は鉸構造であるから第 3 章 (8) 式及び (9) 式に示す如く

$$P_b' = C_{bc} - H_{ba} = C_{bc} - \left(C_{ba} + \frac{1}{2} C_{ab} \right) = 60\,000 - (12\,000 + 6\,000) = 42\,000 \text{ ft. lbs.}$$

(鉸なる爲に C が H に變化)



* Wilson: Methods of Analyzing statically Indeterminate Structures, Proceedings of the World Engineering Congress (Tokyo), Vol. VII, p. 347.

$$P_c' = H_{ca} - C_{cb} = \left(C_{ca} + \frac{1}{2} C_{ac} \right) - C_{cb} = (36\,000 + 18\,000) - 60\,000 = -6\,000 \text{ ft. lbs.}$$

(絞なる爲に C が H に變化)

$$\rho_b' = \rho_b - \frac{1}{2} K_{ab} = 0.666 - \frac{1}{2} (0.083) = 0.625$$

(絞なる爲に ρ より $0.5 K_{ab}$ を減ず)

$$\rho_c' = \rho_c - \frac{1}{2} K_{ca} = 0.75 - \frac{1}{2} (0.167) = 0.666$$

今計算には、計算尺を使用するものとし、 $\varphi^{(0)}$ を求むれば、節點 B 及び C には絞構造の材端が存在する故に $\varphi^{(0)}$ を求むることとなり第 3 章 (8), (9) 兩式より

$$\varphi_b^{(0)} = \frac{P_b'}{\rho_b'} = \frac{43\,000}{0.625} = 67\,200 \text{ lbs/ft}^2$$

$$\varphi_c^{(0)} = \frac{P_c'}{\rho_c'} = \frac{-6\,000}{0.666} = -9\,000 \text{ lbs/ft}^2$$

又撓角分配率 γ は同様に絞構造の爲に γ' を求むることとなり次の如し (第 3 章 (7) 参照)。

$$\gamma_{bc}' = \frac{K_{bc}}{\rho_b'} = \frac{0.167}{0.625} = 0.267, \quad \gamma_{cb}' = \frac{K_{bc}}{\rho_c'} = \frac{0.167}{0.666} = 0.251$$

部材 AB, CD, BE, CF 等に對する γ' の値は其等部材の材端が絞構造又は固定構造なる爲、計算には不用である。

是等の $\varphi^{(0)}$ 及び γ' の値をラ－メンの圖に記入し (第 18 圖参照) 撓角決定の資料とするものである。

(2) 第 18 圖に於ける計算順序説明

第 18 圖に於て節點 B に 67 200 の値、節點 C に於て -9 000 の値を記入し、部材 BC に對し B 點に 0.267, C 點に於て 0.251 を記入し終れば、これより後の計算は機械的に算術計算により出来る

もので、先づ節點 B より始むるものとすれば (節點 C より始むるも可) 0.267 に -9 000 を掛けて其符號を逆にし 67 200 の下に書く。即ち $0.267 \times (-9\,000) = -2\,400$ より 2 400 を 67 200 の下に記入して其和を求む。これは第 3 章 (15) 式により $\varphi_b^{(1)}$ を求めたことを示す。

次に節點 C に移り 0.251 に 69 600 を掛けて符號を逆にし -9 000 の下に書く。即ち $0.251 \times 69\,600 = 17\,500$ より -17 500 を -9 000 の下に記入し其和を求む。これは第 3 章 (16) 式により $\varphi_c^{(1)}$ を求めたことを示す。

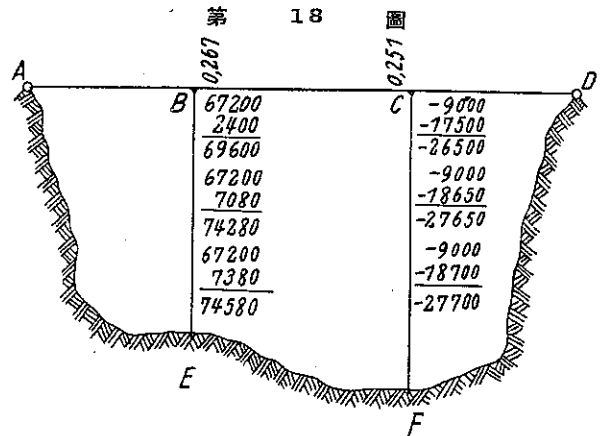
以下計算はこの兩點に於て、この手續きを繰返すに過ぎない。

即ち B 點にて $0.267 \times (-26\,500) = -7\,080$ より 7 080 を 67 200 の下に記入して其和を求む。

同様に C 點にて $0.251 \times (74\,280) = 18\,650$ より -18 650 を -9 000 の下に記入して其和を求む。

更に繰返して B 點にて $0.267 \times (-27\,650) = -7\,380$ より 7 380 を 67 200 の下に記入して其和を求む。

C 點にて $0.251 \times (74\,580) = 18\,700$ より -18 700 を -9 000 の下に記入して其和を求む。



(3) 節點モーメント計算

以上の計算より得られた $\varphi_b = 74\,580 \text{ lbs/ft}^2$, $\varphi_c = -27\,700 \text{ lbs/ft}^2$ を以つて節點に於ける曲げモーメントを算出すれば次の如し。

節點 B に於ては

$$M_{bc} = K_{bc}(2\varphi_b + \varphi_c) - C_{bc} = 0.167 \{2(74\,580) + (-27\,700)\} - 60\,000 = -39\,700 \text{ ft. lbs.}$$

$$M_{ba} = K_{ab}(2\varphi_b - \frac{1}{2}\varphi_b) + C_{ba} + \frac{1}{2}C_{ab} = 0.083 \{74\,580 \times 1.5\} + 12\,000 + \frac{1}{2} \times 12\,000 = 27\,300 \text{ ft. lbs.}$$

$$M_{be} = K_{be}(2\varphi_b) = 0.083 \{2(74\,580)\} = 12\,400 \text{ ft. lbs.}$$

而して $M_{bc} + M_{ba} + M_{be} = -39\,700 + 27\,300 + 12\,400 = 0$

となる。若し此程度の計算粗度に於て零とならぬ時は、上記計算を今 1 回繰返す。

又節點 C に於ては

$$\begin{aligned} M_{ca} &= K_{ca} \left(2\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c \right) - \left(C_{ca} + \frac{1}{2}C_{ac} \right) = 0.167 \{(-27\,700) \times 1.5\} - \left\{ 36\,000 + \frac{1}{2} \times 36\,000 \right\} \\ &= -60\,900 \text{ ft. lbs.} \end{aligned}$$

$$M_{cb} = K_{bc}(2\varphi_c + \varphi_b) + C_{cb} = 0.167 \{2(-27\,700) + 74\,580\} + 60\,000 = 63\,200 \text{ ft. lbs.}$$

$$M_{cf} = K_{cf}(2\varphi_c) = 0.0417 \{2(-27\,700)\} = -2\,300 \text{ ft. lbs.}$$

而して $M_{ca} + M_{cb} + M_{cf} = -60\,900 + 63\,200 - 2\,300 = 0$

故に上記計算にて満足する。

2. 應用例題 (其 2)

(1) 準備計算

第 19 圖に示す如き等しい 4 スパン連続梁の支點曲げモーメントを求む。

この連続梁は等スパン、等慣性モーメントを有するが故に K は總て等しくなり ρ は次の様になる。

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2(K+K) = 4K$$

$$\rho_1' = \rho_1 - \frac{1}{2}K = 4K - 0.5K = 3.5K$$

$$\rho_3' = \rho_3 - \frac{1}{2}K = 4K - 0.5K = 3.5K$$

又 C の存在するのはスパン 2-3 のみで

$$C_{23} = C_{32} = \frac{wl^2}{12}$$

従つて

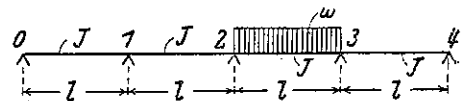
$$P_2 = C_{23} = \frac{wl^2}{12}, \quad P_3' = -C_{32} = -\frac{wl^2}{12}$$

$$P_1' = 0$$

$$\varphi_1'(0) = \frac{P_1'}{\rho_1'} = 0, \quad \varphi_2'(0) = \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{wl^2}{48K} = 0.0208 \frac{wl^2}{K},$$

$$\varphi_3'(0) = \frac{P_3'}{\rho_3'} = \frac{-wl^2}{42K} = -0.0238 \frac{wl^2}{K}.$$

第 19 圖



又撓角分配率は

$$\gamma'_{1-2} = \frac{K}{\rho_1'} = \frac{1}{3.5} = 0.286, \quad \gamma_{2-1} = \gamma_{2-3} = \frac{K}{\rho_2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\gamma'_{3-2} = \frac{K}{3.5K} = 0.286$$

是等の $\varphi^{(0)}$ 及び γ の値を連続梁の圖に記入すれば、第 20 圖が得られる。

第 20 圖 係数: $\frac{\omega l^2}{K}$

①	0,286	0,25	②	0,25	0,286	③	④
▲	0	▲	0,0208	▲	-0,0238	▲	▲
	-0,00595		0,0074		-0,0081		
	-0,00595		0,0282		-0,0319		
	0		0,0208		-0,0238		
	-0,0081		0,07		-0,0088		
	-0,0081		0,0308		-0,0326		
	0		0,0208		-0,0238		
	-0,0088		0,0104		-0,0089		
	-0,0088		0,0312		-0,0327		

(2) 第 20 圖に於ける計算順序説明

支點 1 に於て (計算尺使用, 係数 $\frac{\omega l^2}{K}$ 省略)

$$0 - 0.286 \times 0.0208 = -0.00595$$

これは (15) 式により $\varphi_1^{(1)}$ を求めたことを示す。

支點 2 に於て

$$0.0208 - 0.25 \times (-0.00595) - 0.25 \times (-0.0238) = 0.0282$$

これは (15) 式により $\varphi_2^{(1)}$ を求めたことを示す。

同様に支點 3 に於て

$$-0.0238 - 0.286 \times 0.0282 = -0.0319$$

再び支點 1 に歸つて

$$0 - 0.286 \times 0.0282 = -0.0081$$

これは (15) 式により $\varphi_1^{(2)}$ を求めたことを示す。

支點 2 に於て

$$0.0208 - 0.25(-0.0081 - 0.0319) = 0.0308$$

これは (15) 式により $\varphi_2^{(2)}$ を求めたことを示す。

同様に支點 3 に於て

$$-0.0238 - 0.286 \times 0.0308 = -0.0326$$

更に支點 1 に於て

$$0 - 0.286 \times 0.0308 = -0.0088$$

支點 2 に於て

$$0.0208 - 0.25(-0.0088 - 0.0326) = 0.0312$$

支點 3 に於て

$$-0.0238 - 0.286 \times 0.0312 = -0.0327$$

故に上記計算により

$$\varphi_1 = -0.0088 \frac{wl^2}{K}, \quad \varphi_2 = 0.0312 \frac{wl^2}{K}, \quad \varphi_3 = -0.0327 \frac{wl^2}{K}$$

(3) 支點モーメント計算

上記計算により φ が決定したから各支點モーメントは次の様に撓角式より求められる。

支點 1 に於て

$$M_{1-0} = K(2\varphi_1 - 0.5\varphi_1) = 1.5K \left(-0.0088 \frac{wl^2}{K} \right) = -0.013 wl^2$$

$$M_{1-2} = K(2\varphi_1 + \varphi_2) = K \left\{ 2 \left(-0.0088 \frac{wl^2}{K} \right) + 0.0312 \frac{wl^2}{K} \right\} = 0.013 wl^2$$

支點 2 に於て

$$M_{2-1} = K(2\varphi_2 + \varphi_1) = K \left\{ 2 \left(0.0312 \frac{wl^2}{K} \right) - 0.0088 \frac{wl^2}{K} \right\} = 0.054 wl^2$$

$$M_{2-3} = K(2\varphi_2 + \varphi_3) - C_{23} = K \left\{ 2 \left(0.0312 \frac{wl^2}{K} \right) - 0.0327 \frac{wl^2}{K} \right\} - \frac{wl^2}{12} = -0.054 wl^2$$

支點 3 に於て

$$M_{3-2} = K(2\varphi_3 + \varphi_2) + C_{32} = K \left\{ 2 \left(-0.0327 \frac{wl^2}{K} \right) + 0.0312 \frac{wl^2}{K} \right\} + \frac{wl^2}{12} = 0.049 wl^2$$

$$M_{3-4} = K(2\varphi_3 - 0.5\varphi_3) = 1.5K \left(-0.0327 \frac{wl^2}{K} \right) = -0.049 wl^2$$

3. 應用例題 (其 3)

(1) 準備計算

第 21 圖に示す 2 層ラーメンの節點モーメント

を求む。

このラーメンの解法は、第 3 章 (8) によるべきもので、垂直荷重に對する各層の柱の撓度 $\mu^{(0)}$ は (17) 式により

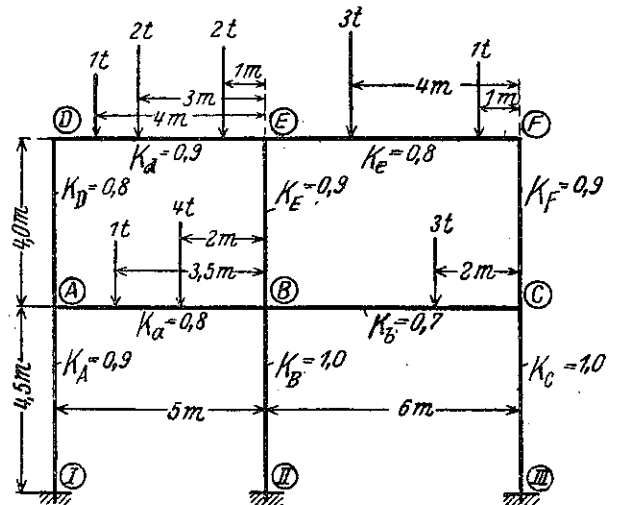
$$\mu^{(0)} = 0$$

であるから先づ總て撓度は零として、各節點の撓角 $\varphi^{(0)}$ を求む。

これが爲には、第 3 章 (7) 式より各節點に於て ρ と P とを計算する必要がある。

柱及び梁の慣性モーメントを夫々の長さにて除したるもの、即ち K の値は、第 21 圖に記入せられ居る如きものであるから ρ の値は次の様になる。

第 21 圖



$$\begin{aligned}\rho_A &= 2(0.8+0.8+0.9)=5.0 \text{ cm}^2, & \rho_B &= 2(0.9+0.7+1.0+0.8)=6.8 \text{ cm}^2 \\ \rho_C &= 2(0.9+1.0+0.7)=5.2 \text{ cm}^2, & \rho_D &= 2(0.9+0.8)=3.4 \text{ cm}^2 \\ \rho_E &= 2(0.8+0.9+0.9)=5.2 \text{ cm}^2, & \rho_F &= 2(0.9+0.8)=3.4 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

又荷重項 P を求むる爲に第 3 章 (7) 式に於ける $C_{AR}-C_{AL}$ を求むれば次の様になる。

$$\begin{aligned}P_A &= C_{AB} = \frac{1}{l^2} \sum Pab^2 = \frac{1}{5^2} \{1 \cdot (1.5)(3.5)^2 + 4(3)^2\} \\ &= 2.655 \text{ t.m} = 265.5 \text{ t.cm}, \\ P_B &= C_{BC} - C_{BA} = \frac{1}{6^2} \{3(4)^2\} - \frac{1}{5^2} \{1 \cdot (1.5)^2(3.5) + 4(3)^2\} \\ &= 133.3 - 319.5 = -186.2 \text{ t.cm} \\ P_C &= -C_{CB} = -\frac{1}{6^2} \{3(4)^2\} = -266.7 \text{ t.cm} \\ P_D &= C_{DE} = \frac{1}{5^2} \{1(1)^4 + 2(2)^3 + 2(4)1^2\} = 240 \text{ t.cm} \\ P_E &= C_{EF} - C_{ED} = 280.6 - 240 = 40.6 \text{ t.cm} \\ P_F &= -C_{FE} = -202.8 \text{ t.cm}\end{aligned}$$

従つて第 3 章 (7) 式より $\varphi^{(0)}$ を求むれば (計算尺使用)

$$\begin{aligned}\varphi_A^{(0)} &= \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{265.5}{5.0} = 53.1 \text{ (t/cm}^2\text{)}, & \varphi_B^{(0)} &= \frac{P_B}{\rho_B} = \frac{-186.2}{6.8} = -27.4 \\ \varphi_C^{(0)} &= \frac{P_C}{\rho_C} = \frac{-266.7}{5.2} = -51.3, & \varphi_D^{(0)} &= \frac{P_D}{\rho_D} = \frac{240}{3.4} = 70.6 \\ \varphi_E^{(0)} &= \frac{P_E}{\rho_E} = \frac{40.6}{5.2} = 7.8, & \varphi_F^{(0)} &= \frac{P_F}{\rho_F} = \frac{-202.8}{3.4} = -59.7\end{aligned}$$

次に第 3 章 (18) 式より $\mu^{(1)}$ を決定する爲に先づ t を求むれば下の如くなる。

$$\begin{aligned}t_A &= \frac{3K_A}{2(K_A+K_B+K_C)} = \frac{3(0.9)}{2(0.9+1.0+1.0)} = \frac{2.7}{5.8} = 0.466 \\ t_B &= \frac{3K_B}{2(K_A+K_B+K_C)} = \frac{3.0}{5.8} = 0.517 \\ t_C &= \frac{3K_C}{2(K_A+K_B+K_C)} = \frac{3.0}{5.8} = 0.517 \\ t_D &= \frac{3K_D}{2(K_D+K_E+K_F)} = \frac{3(0.8)}{2(0.8+0.9+0.9)} = \frac{2.4}{5.2} = 0.462 \\ t_E &= \frac{3K_E}{2(K_D+K_E+K_F)} = \frac{2.7}{5.2} = 0.519 \\ t_F &= \frac{3K_F}{2(K_D+K_E+K_F)} = \frac{2.7}{5.2} = 0.519\end{aligned}$$

又 $\mu^{(1)}$ が上下兩層の柱に對して求められたる後、第 3 章 (14) 式より $\varphi^{(1)}$ を求むる爲に γ を算出すれば節點 A に於ては

$$\begin{aligned}\gamma_{AD} &= \frac{K_D}{\rho_A} = \frac{0.8}{5.0} = 0.16, & \gamma_{AB} &= \frac{K_B}{\rho_A} = \frac{0.8}{5.0} = 0.16 \\ \gamma_{AI} &= \frac{K_A}{\rho_A} = \frac{0.9}{5.0} = 0.18\end{aligned}$$

節點 B に於ては

$$\begin{aligned} \gamma_{BE} &= \frac{K_B}{\rho_B} = \frac{0.9}{6.8} = 0.132, & \gamma_{BC} &= \frac{K_b}{\rho_B} = \frac{0.7}{6.8} = 0.103 \\ \gamma_{BII} &= \frac{K_B}{\rho_B} = \frac{1.0}{6.8} = 0.147, & \gamma_{BA} &= \frac{K_a}{\rho_B} = \frac{0.8}{6.8} = 0.118 \end{aligned}$$

節點 C に於ては

$$\begin{aligned} \gamma_{CF} &= \frac{K_F}{\rho_C} = \frac{0.9}{5.2} = 0.173, & \gamma_{CIII} &= \frac{K_C}{\rho_C} = \frac{1.0}{5.2} = 0.193 \\ \gamma_{CB} &= \frac{K_b}{\rho_C} = \frac{0.7}{5.2} = 0.135 \end{aligned}$$

節點 D に於ては

$$\gamma_{DE} = \frac{K_D}{\rho_D} = \frac{0.9}{3.4} = 0.265, \quad \gamma_{DA} = \frac{K_D}{\rho_D} = \frac{0.8}{3.4} = 0.235$$

節點 E に於ては

$$\begin{aligned} \gamma_{EF} &= \frac{K_E}{\rho_E} = \frac{0.8}{5.2} = 0.154, & \gamma_{EB} &= \frac{K_E}{\rho_E} = \frac{0.9}{5.2} = 0.173 \\ \gamma_{ED} &= \frac{K_D}{\rho_E} = \frac{0.9}{5.2} = 0.173 \end{aligned}$$

節點 F に於ては

$$\gamma_{FC} = \frac{K_F}{\rho_F} = \frac{0.9}{3.4} = 0.265, \quad \gamma_{FE} = \frac{K_E}{\rho_F} = \frac{0.8}{3.4} = 0.235$$

以上算出した $\varphi^{(0)}, t, \gamma$ の數値を該當節點並に該當部材に記入したものが第 22 圖で、 t の數値は 2 重枠の中に書き込み右方より横にして見る様になつて居る。

又 γ の數値は、1 重枠の中に書き込み、各部材に沿つて記入してある。 $\varphi^{(0)}$ の數値は、稍太字にて 1 重枠の中に書き込んである。以上を準備計算として次の本計算に入る。

(2) 第 22 圖に於ける計算順序説明

第 3 章 (18) 式より

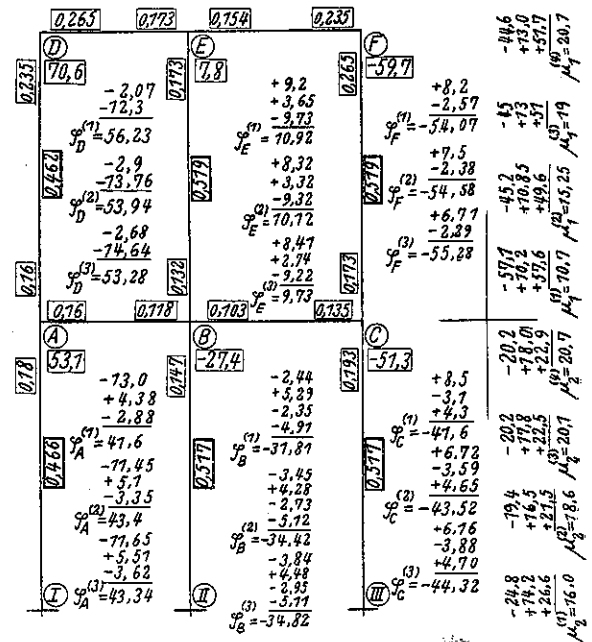
$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= -\{(\varphi_D^{(0)} + \varphi_A^{(0)})t_D + (\varphi_E^{(0)} + \varphi_B^{(0)})t_E \\ &\quad + (\varphi_F^{(0)} + \varphi_C^{(0)})t_F\} \\ &= -\{(70.6 + 53.1)0.462 + (7.8 - 27.4)0.519 \\ &\quad + (-59.7 - 51.3)0.519\} = 10.7 \dots (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2^{(1)} &= -\{\varphi_A^{(0)}t_A + \varphi_B^{(0)}t_B + \varphi_C^{(0)}t_C\} \\ &= -\{53.1)0.466 + (-27.4)0.517 \\ &\quad + (-51.3)0.517\} = 16.0 \dots (b) \end{aligned}$$

此計算は各層毎に各柱の上下端の $\varphi^{(0)}$ の和に其柱の t 即ち撓度分配率なるものを乘じて符號を逆にしたものを加へ合せたるものを示す。

この乘法は計算尺にてなし、ラーメンの圖の右方に横から見た位置に記入してある。(a) 式及び (b) 式の最後の計算値と第 22 圖の數値を對照し

第 22 圖



て其記入法を知ることが出来る。

$\mu_1^{(1)}$ 及び $\mu_2^{(1)}$ が既知量となり $\varphi^{(0)}$ も既知であるから、第 3 章 (14) 式より $\varphi^{(1)}$ を算出することが出来る。即ち節點 A に於ては

$$\begin{aligned}\varphi_A^{(1)} &= \frac{P_A}{\rho_A} - \{(\varphi_D^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_{AD} + \varphi_B^{(0)}\gamma_{AB} + \mu_2^{(1)}\gamma_{AI}\} \\ &= 53.1 - \{(70.6 + 10.7)0.16 + (-27.4)0.16 + (16.0)0.18\} = 41.6\end{aligned}$$

節點 B に於ては

$$\begin{aligned}\varphi_B^{(1)} &= \frac{P_B}{\rho_B} - \{(\varphi_E^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_{BE} + \varphi_C^{(0)}\gamma_{BC} + \mu_2^{(1)}\gamma_{BI} + \varphi_A^{(1)}\gamma_{BA}\} \\ &= -27.4 - \{(7.8 + 10.7)0.132 + (-51.3)0.103 + (16.0)0.147 + (41.6)0.118\} = -31.81\end{aligned}$$

節點 C に於ては

$$\begin{aligned}\varphi_C^{(1)} &= \frac{P_C}{\rho_C} - \{(\varphi_F^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_{CF} + \mu_2^{(1)}\gamma_{CI} + \varphi_B^{(1)}\gamma_{CB}\} \\ &= -51.3 - \{(-59.7 + 10.7)0.173 + (16.0)0.193 + (-31.81)0.135\} = -41.6\end{aligned}$$

以下同様にして

$$\text{節點 D に於ては} \quad \varphi_D^{(1)} = 70.6 - 2.07 - 12.3 = 56.23$$

$$\text{節點 E に於ては} \quad \varphi_E^{(1)} = 7.8 + 9.2 + 3.65 - 9.73 = 10.92$$

$$\text{節點 F に於ては} \quad \varphi_F^{(1)} = -59.7 + 8.2 - 2.57 = -54.07$$

是等の計算は計算尺を使用して乗法を行ひ、第 22 圖に示す如く、其積を順次圖中に書き込んで行く。

上記の計算に依つて $\varphi^{(0)}$ より $\varphi^{(1)}$ に一步進んだのであるが、更に $\mu^{(1)}$ より $\mu^{(2)}$ に進む爲に次の計算を行ふ。

上層の $\mu^{(2)}$ を求むる爲に各柱の上下端の $\varphi^{(1)}$ の數値を加へたるものに t の數値 (2 重秤を施したるもの) を乘じ逆符號を取つて加算する。

即ち第 22 圖を参照して

$$\mu_1^{(2)} = - \{(56.23 + 41.6)0.462 + (10.92 - 31.81)0.519 + (-54.07 - 41.6)0.519\} = 15.25$$

$$\mu_2^{(2)} = - \{(41.6)0.466 + (-31.81)0.517 + (-41.6)0.517\} = 18.6$$

次に $\varphi^{(2)}$ を決定する爲に $\varphi^{(1)}$ を求めたと同様な計算を行ふ。

節點 A に於ては

$$\varphi_A^{(2)} = 53.1 - \{(56.23 + 15.25)0.16 + (-31.81)0.16 + (18.6)0.18\} = 43.4$$

節點 B に於ては

$$\varphi_B^{(2)} = -27.4 - \{(10.92 + 15.25)0.132 + (-41.6)0.103 + (18.6)0.147 + (43.4)0.118\} = -34.42$$

節點 C に於ては

$$\varphi_C^{(2)} = -51.3 - \{(-54.07 + 15.25)0.173 + (18.6)0.193 + (-34.42)0.135\} = -43.52$$

節點 D に於ては

$$\varphi_D^{(2)} = 70.6 - \{(10.92)0.265 + (43.4 + 15.25)0.235\} = 53.94$$

節點 E に於ては

$$\varphi_E^{(2)} = 7.8 - \{(-54.07)0.154 + (-34.42 + 15.25)0.173 + (53.94)0.173\} = 10.12$$

節點 F に於ては

$$\varphi_F^{(2)} = -59.7 - \{(-43.52 + 15.25)0.265 + (10.12)0.235\} = -54.58$$

次に上層に對する $\mu_1^{(3)}$ を求む。

$$\mu_1^{(3)} = -\{(53.94 + 43.4)0.462 + (10.12 - 34.42)0.519 + (-54.58 - 43.52)0.519\} = 19$$

下層の $\mu_2^{(3)}$ を求むれば

$$\mu_2^{(3)} = -\{(43.4)0.466 + (-34.42)0.517 + (-43.52)0.517\} = 20.1$$

又各節點に對し $\varphi^{(3)}$ を決定し圖上に計算して行けば第 22 圖に示す如くである。

即ち

$$\begin{aligned} \varphi_A^{(3)} &= 43.34, & \varphi_B^{(3)} &= -34.82, & \varphi_C^{(3)} &= -44.32, \\ \varphi_D^{(3)} &= 53.28, & \varphi_E^{(3)} &= 9.73, & \varphi_F^{(3)} &= -55.28 \end{aligned}$$

更に今一度 $\mu^{(4)}$ を求むれば

$$\begin{aligned} \mu_1^{(4)} &= -\{(53.28 + 43.34)0.462 + (9.84 - 34.82)0.519 + (-55.28 - 44.32)0.519\} = 20.1 \\ \mu_2^{(4)} &= -\{(43.34)0.466 + (-34.82)0.517 + (-44.32)0.517\} = 20.7 \end{aligned}$$

上記の計算により次の φ, μ を採用するものとする。

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 43.3, & \varphi_B &= -34.8, & \varphi_C &= -44.3, \\ \varphi_D &= 53.3, & \varphi_E &= 9.7, & \varphi_F &= -55.3, \\ \mu_1 &= 20.1, & \mu_2 &= 20.7 \end{aligned}$$

(3) 節點モーメント計算

節點 A に於ける節點モーメントは次の如くなる。

$$\begin{aligned} M_{AD} &= K_D \{2\varphi_A + \varphi_D + \mu_1\} = 0.8 \{2(43.3) + 53.4 + 20.6\} = 128 \text{ t.cm} = 1.28 \text{ t.m} \\ M_{AB} &= K_A \{2\varphi_A + \varphi_B\} - C_{AB} = 0.8 \{2(43.3) - 34.8\} - 265.5 = -224 \text{ t.cm} = -2.24 \text{ t.m} \\ M_{AI} &= K_A \{2\varphi_A + \mu_2\} = 0.9 \{2(43.3) + 21.2\} = 97 \text{ t.cm} = 0.97 \text{ t.m} \end{aligned}$$

其他の各節點にてモーメントを計算しダイヤグラムを描けば第 23 圖の如くなる。

4. 應用例題 (其 4)

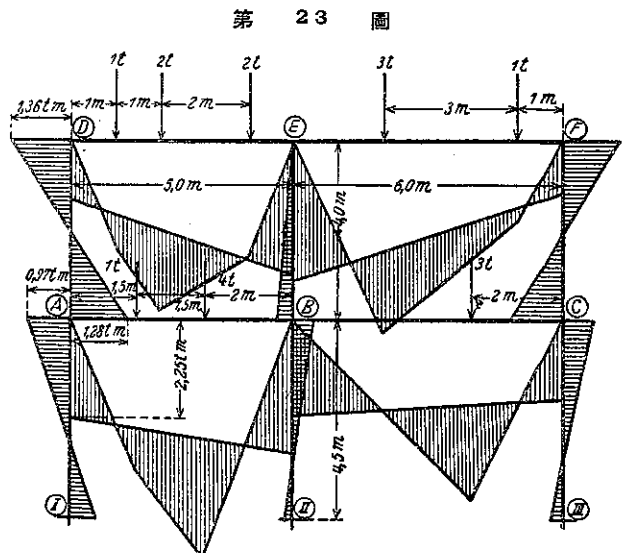
(1) 準備計算

第 24 圖に示す 2 層 3 張間のラーメンは Hartmann 氏 Statisch Unbestimmte Systeme 161 頁より引用した例題で各梁は一樣に $2EK = 2/3 \text{ t.m}$, 柱は一樣に $2EK = 1/3 \text{ t.m}$ とする。

此問題は水平節點荷重の場合と異り, 8 個の撓角と 2 個の撓度が未知量である。

今第 3 章 (37) 式により H, T を作れば

$$H_1 = W_1 \frac{h_1}{2} + C_{81} - C_{18}$$



然るに

$$W_1 = wh = 2(4) = 8 \text{ t}$$

$$h_1 = 4 \text{ m}, \quad C_{s1} = C_{1s}$$

故に

$$H_1 = 8(2) = 16 \text{ t.m}$$

$$H_2 = W_1 h_2 + W_2 \frac{h_2}{2} + C_{1r} - C_{1s}$$

$$= 8(4) + 8(2) = 48 \text{ t.m}$$

$$2ET_1 = 2ET_2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2.667 \text{ t.m}$$

又總ての t は相等しく

$$t = \frac{3(2EK)}{2ET} = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{2.667} = 0.375$$

以上求めたる H と T より

$$-\frac{2EH_1}{2ET_1} = -\frac{2E(16)}{2.667} = 2E(-6),$$

$$-\frac{2EH_2}{2ET_2} = -\frac{2E(48)}{2.667} = 2E(-18)$$

又第 3 章 (14) 式より

$$P_1 = C_{1s} - C_{1r} = \frac{wh^2}{12} - \frac{vh^2}{12} = 0$$

$$P_3 = -C_{s1} = -\frac{wh^2}{12} = -\frac{2(4)^2}{12} = -2.667 \text{ t.m}$$

其他の節點に於ては P は總て零である。

次に γ を計算する爲に先づ ρ を求む。

$$2E\rho_1 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2.667,$$

$$2E\rho_2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 4.0$$

$$2E\rho_3 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 4.0,$$

$$2E\rho_4 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 2.667$$

$$2E\rho_5 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 2.0,$$

$$2E\rho_6 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 3.333$$

$$2E\rho_7 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 3.333,$$

$$2E\rho_8 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2.0$$

故に節點 1 に於て

$$\gamma_0 = \frac{K_0}{\rho_1} = \frac{2EK_0}{2E\rho_1} = \frac{0.333}{2.667} = 0.125,$$

$$\gamma_r = \frac{2EK_r}{2E\rho_1} = \frac{0.6666}{2.667} = 0.25$$

$$\gamma_u = \frac{2EK_u}{2E\rho_1} = \frac{0.333}{2.667} = 0.125,$$

$$\text{又 } [\gamma_0] = [\gamma_u] = \frac{0.333}{2.667 + 0.667} = 0.1$$

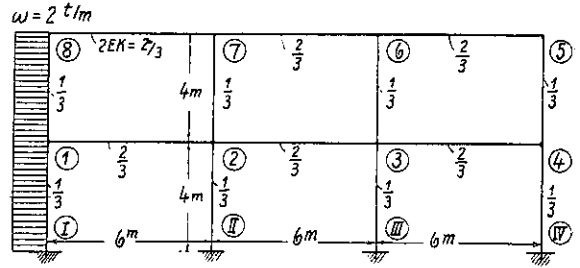
節點 2 に於て

$$\gamma_r = \gamma_u = \frac{0.333}{4.0} = 0.0832,$$

$$\gamma_r = \gamma_l = \frac{0.6666}{4.0} = 0.1667$$

節點 3 に於て

第 24 圖



$$\gamma_0 = \gamma_u = \frac{0.333}{4.0} = 0.0832, \quad \gamma_r = \gamma_t = \frac{0.6666}{4.0} = 0.1667$$

節點 4 に於て

$$\gamma_0 = \gamma_u = \frac{0.333}{2.667} = 0.125, \quad \gamma = \frac{0.6666}{2.667} = 0.25$$

節點 5 に於て

$$\gamma_u = \frac{0.3333}{2.0} = 0.1667, \quad \gamma = \frac{0.6666}{2.0} = 0.3333$$

節點 6 に於て

$$\gamma_u = \frac{0.3333}{3.333} = 0.1, \quad \gamma_r = \gamma = \frac{0.6666}{3.333} = 0.2$$

節點 7 に於て

$$\gamma_u = \frac{0.3333}{3.333} = 0.1, \quad \gamma_r = \gamma = \frac{0.6666}{3.333} = 0.2$$

節點 8 に於て

$$\gamma_u = \frac{0.3333}{2.0} = 0.1667 \quad \text{又は} \quad [\gamma_u] = \frac{0.333}{2+0.667} = 0.125$$

$$\gamma_r = \frac{0.6666}{2.0} = 0.3333$$

$$\text{又} \quad \frac{P_1}{\rho_1} = 0, \quad \frac{P_8}{\rho_8} = \frac{2EP_8}{2E\rho_8} = \frac{2E(-2.667)}{2} = 2E(-1.333)$$

次に撓度を概算する爲に (46) 式中の P 及び $[\rho]$ を求めれば節點 8 に對しては (41) 式より

$$P_8 = -C_{31} = -\frac{wh^3}{12} = -\frac{2(4)^3}{12} = -2.6667 \text{ t.m}$$

$$2E[\rho_8] = 2EP_8 + 2EK_r = 2.0 + 0.6667 = 2.6667$$

$$\text{故に} \quad \frac{P_8}{[\rho_8]} = \frac{2EP_8}{2E[\rho_8]} = \frac{2E(-2.6667)}{2.6667} = 2E(-1)$$

又節點 1 に對しては (38) 式より

$$P_1 = C_{18} - C_{11} = \frac{wh^3}{12} - \frac{wh^3}{12} = 0$$

$$\text{従つて} \quad \frac{P_1}{[\rho_1]} = 0$$

今上層に對しては第 3 章第 1 表より $\alpha_1 = 2.2$, 下層に對して $\alpha_2 = 1.5$ にとりて (46) 式より μ_r を求めれば次の如し。

$$\mu_1^{(0)} = -\alpha_1 \left\{ \frac{H_1}{T_1} + \left(\frac{P_8}{[\rho_8]} + \frac{P_1}{[\rho_1]} \right) t \right\} = -2.2 \{ 2E(6) + 2E(-1)(0.375) \} = 2E(-12.4)$$

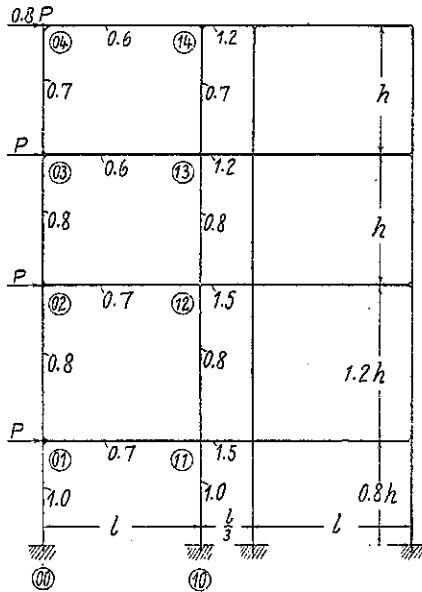
$$\mu_2^{(0)} = -\alpha_2 \left\{ \frac{H_2}{T_2} + \left(\frac{P_1}{[\rho_1]} \right) t \right\} = -1.5 \{ 2E(18) + 0 \} = 2E(-27)$$

以上の計算に依り $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}$ を知ることを得たから (38), (41), (33) 式により各節點に於ける $\varphi_m^{(0)}$ を概算することが出来る。

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= -\frac{H_1}{T_1} - \{\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} + \dots + \varphi_n^{(0)}\} t \\ &= -6 - \{3.9 + 3.3 + 3.3 + 4.4 + 2.1 + 1.4 + 1.4 + 0.24\} (0.375) \doteq -14 \\ \mu_2^{(1)} &= -\frac{H_2}{T_2} - \{\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)} + \varphi_4^{(0)}\} t = -18 - \{3.9 + 3.3 + 3.3 + 4.4\} (0.375) \doteq -24 \end{aligned}$$

次に第 3 章 (14) 式を用ひて $\varphi_m^{(1)}$ を求む。

第 26 圖



節點 1 に於て

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= \frac{P_1}{\rho_1} - \{(\varphi_a^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_0 + \varphi_2^{(0)}\gamma_r \\ &\quad + (\varphi_i^{(0)} + \mu_2^{(1)})\gamma_u\} = 0 - \{(0.24 - 14)0.125 \\ &\quad + (3.3)0.25 + (0 - 24)0.125\} = 3.9 \end{aligned}$$

節點 2 に於て

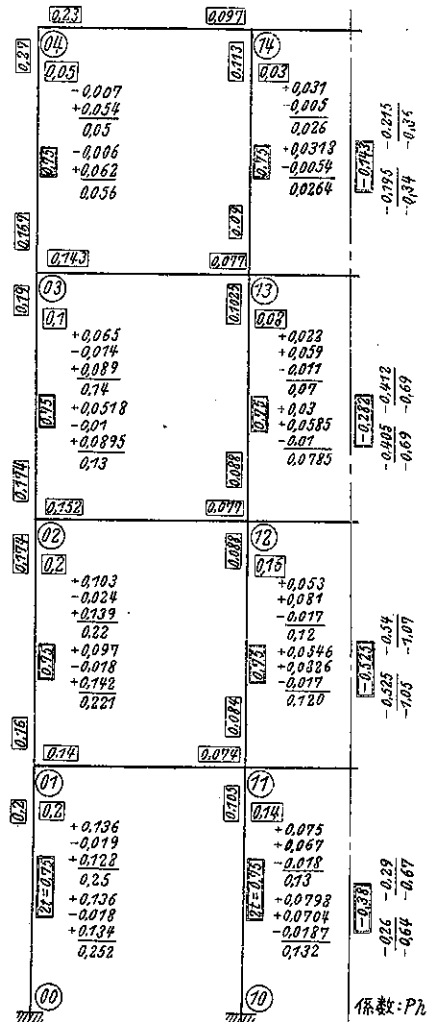
$$\begin{aligned} \varphi_2^{(1)} &= -\{(\varphi_r^{(0)} + \mu_1^{(1)})\gamma_0 \\ &\quad + \varphi_2^{(0)}\gamma_r + \mu_2^{(1)}\gamma_u + \varphi_1^{(1)}\gamma_i\} \\ &= -\{(1.4 - 14)0.0832 + (3.3)0.1667 \\ &\quad + (-24)0.0832 + (3.9)0.1667\} \doteq 1.8 \end{aligned}$$

以下同様にして此計算は第 25 圖の圖上に於て行はれ $\varphi^{(4)}, \mu^{(4)}$ までを算出した。

(3) 節點モーメント計算

上記の計算例題は各部材の $3EK$ に數値が用ひてある關係上一般理論に於て本來の撓角撓度に包含せしめた $2E$ を省略しなければならぬ理であるから、係數として附記した $2E$ だけを除去すればよいことになる。

第 27 圖



係數: Ph

従つて $\varphi^{(4)}$ 及び $\mu^{(4)}$ として第 25 圖に示す數値其儘を使用すればよいことになる。

即ち

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(4)} &= 3.728, & \varphi_2^{(4)} &= 1.743, & \varphi_3^{(4)} &= 1.816 \\ \varphi_4^{(4)} &= 3.528, & \varphi_5^{(4)} &= 1.033, & \varphi_6^{(4)} &= 0.516 \\ \varphi_7^{(4)} &= 0.888, & \varphi_8^{(4)} &= -0.45, & \mu_1^{(4)} &= -10.8 \\ \mu_2^{(4)} &= -22.07 \end{aligned}$$

を用ひて各節點モーメントを求む。

節點 1 に於ては

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0.6666 \{2(3.728) + (1.743)\} \div 6.13 \text{ t.m (6.13)} \\ M_{13} &= 0.3333 \{2(3.728) - 0.45 - 10.8\} - C_{13} \div -3.93 \text{ t.m (-3.93)} \\ M_{1r} &= 0.3333 \{2(3.728) - 22.07\} + 2.666 \div -2.20 \text{ t.m (-2.20)} \end{aligned}$$

括弧内の數値は Hartmann 氏の誘導したものである。其の他拙著“架構應力研究”頁 138~140 参照。

5. 應用例題 (其 5)

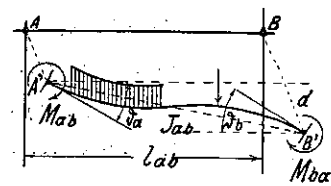
第 26 圖に示す 4 層 3 張間のラーメンが水平節點荷重を有する場合の各節點の撓角と各層の撓度とを撓角分配法により圖上計算を行へば第 27 圖に示す如くである。本例題は圖上計算の結果のみを示し準備計算其他を省略する。

第 3 章 固定端ラーメン, 固定柱ラーメン並に鉸端ラーメンに関する理論

不静定構造の問題を解く一つの方法として撓角法なるものがある。而して撓角法の應用とも看做さるべきものに諸種の解法があるが、茲に提案の撓角分配法も亦、其 1 法と考へらるべきもので、従つて本法は曲げモーメントの變形を主體とした不静定構造の解法である。

今第 28 圖に示す如く、部材 AB が荷重を受けて A'B' の位置をとつたものとすれば、撓角法によつて

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= K_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b + \mu_{ab}) - C_{ab} \\ M_{ba} &= K_{ab}(2\varphi_b + \varphi_a + \mu_{ab}) + C_{ba} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$



茲に

$$\left. \begin{aligned} K_{ab} &= \frac{J_{ab}}{l_{ab}}, & \varphi_a &= 2E\theta_a, & \varphi_b &= 2E\theta_b \\ \mu_{ab} &= -6E \frac{d}{l_{ab}} \\ C_{ab} &= \text{AB 部材を固定梁と考へた場合の A 端に於ける曲げモーメント} \\ C_{ba} &= \text{AB 部材を固定梁と考へた場合の B 端に於ける曲げモーメント} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(1) 式及び (2) 式に示した關係は、撓角法に於ける熟知のものであるから、茲には其説明を省略する。

而して基本式なる (1) 式より、次の 2 つの場合を誘導して置くことを便とする。

第 28 圖に於て A 端が鉸構造なる場合

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ 式に於て } M_{ab} &= 0 \text{ として } M_{ba} \text{ 式に入れば} \\ M_{ba} &= K_{ab}(1.5\varphi_b + 0.5\mu_{ab}) + H_{ba} \\ \text{茲に} & \quad H_{ba} = C_{ba} + 0.5C_{ab} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

同様に B 端が鉸構造なる場合

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= K_{ab}(1.5\varphi_a + 0.5\mu_{ab}) - H_{ab} \\ \text{茲に} \quad H_{ab} &= C_{ab} + 0.5C_{ba} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

以上 (1) 式より (4) 式に至るものは、撓角法の重要式としてよく知られて居るものゝ他形で、順序として記載する。

是等の諸式に於ける φ 及び μ は本來の撓角並に撓度と稱するものとは異なるものであるが、本文に於ては便宜上 φ を撓角と呼び、 μ を撓度と呼ぶこととする。

而して撓角分配法の基本的考察として考へられるものに、(1) 固定端ラーメン、(2) 固定柱ラーメン、(3) 鉸端ラーメンの 3 つがあり、(1) は支點又は節點に移動を生ぜず撓角のみを生ずる場合に應用せられ、(2) は支點又は節點の移動即ち撓度を生じ且つ撓角を生ずる場合に前者と共に併用せられ、(3) は (2) と同様の場合であるが水平荷重に際して應用せらるゝものである。

是等 3 つの基本的考察の中で、先づ固定端ラーメンに関する諸種の場合を述べ、次に固定柱ラーメン並に鉸端ラーメンに関する場合を説明し、然る後、實例に就て、最も簡單なる撓角のみを取扱ふ場合即ち、不均衡性撓角の分配に依る場合、並に更に一般的なる不均衡性撓角・撓度の分配に依る場合を述べんとするものである。

1. 固定端ラーメンに関する理論

(1) 固定端ラーメン

今第 29 圖に示す如き材端總て固定なるラーメンを考へ之を固定端ラーメンと呼ぶこととする。このラーメンは材端總て固定なるが故に、材端に移動なきものとすれば總ての部材の μ も零となり、中央節點 R に於ける撓角 $\varphi_r^{(0)}$ は下の如くして簡單に求められる。

中央節點 R に於て (第 29 圖参照)

$$M_{Ra} = K_a(2\varphi_r^{(0)}) - C_{Ra}$$

$$M_{Rb} = K_b(2\varphi_r^{(0)}) - C_{Rb}$$

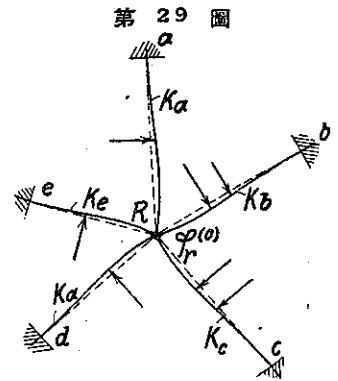
$$M_{Re} = K_e(2\varphi_r^{(0)}) - C_{Re}$$

故に $M_{Ra} + M_{Rb} + \dots + M_{Re} = 0$ より

$$\varphi_r^{(0)} = \frac{P_r}{\rho_r} \dots\dots\dots(5)$$

茲に $P_r = C_{Ra} + C_{Rb} + \dots + C_{Re} = \text{荷重項}$

$$\left. \begin{aligned} \rho_r &= 2(K_a + K_b + \dots + K_e) = \text{節點 R に集る} \\ &K \text{ の和の 2 倍} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$



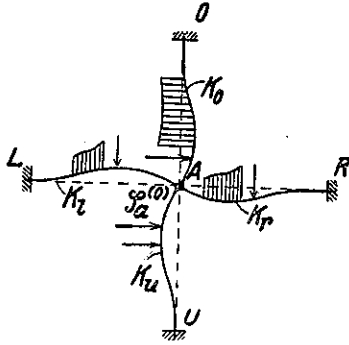
即ち P_r と ρ_r とは、ラーメンと荷重とが與へられる時は、數値として豫め計算し置くことの出来るもので、従つて (5) 式より $\varphi_r^{(0)}$ は簡單に算出される。普通の場合にはラーメンは柱と梁の結合であり、荷重も第 30 圖に示す如き場合を考ふるもので、斯くの如き場合に對しては、(5) 式及び (6) 式は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(0)} &= \frac{P_a}{\rho_a} \\ P_a &= (C_{AR} - C_{AL}) + (C_{AO} - C_{AV}) \\ \rho_a &= 2(K_r + K_l + K_o + K_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

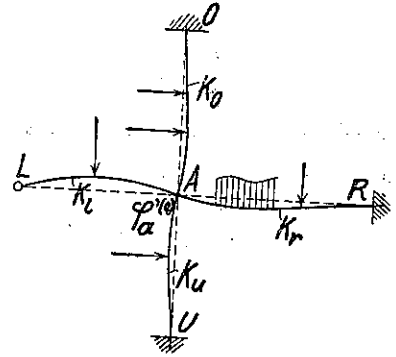
(2) 固定端ラーメンの L 材端が鉸構造なる場合

第 31 圖に示す如く、固定端ラーメンの材端 L を鉸構造とすれば (7) 式に相當するものは次式の様になる。

第 30 圖



第 31 圖



$$\varphi_a^{(0)} = \frac{P_a'}{\rho_a'}$$

茲に

$$P_a' = (C_{AR} - H_{AL}) + (C_{AO} - C_{AU})$$

$$\rho_a' = 2(K_r + K_l + K_o + K_u) - 0.5K_l$$

$$H_{AL} = C_{AL} + 0.5C_{LA}$$

(8)

若し又材端 L が鉸構造なる代りに、材端 R を鉸構造とし、材端 L は固定とする時は (8) 式に相當するものは次の様になる。

$$\varphi_a^{(0)} = \frac{P_a'}{\rho_a'}$$

茲に

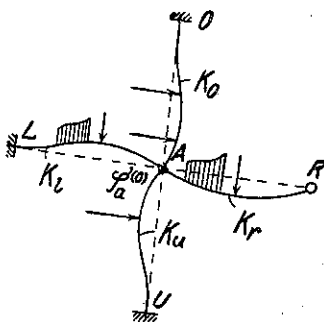
$$P_a' = (H_{AR} - C_{AR}) + (C_{AO} - C_{AU})$$

$$\rho_a' = 2(K_r + K_l + K_o + K_u) - 0.5K_r$$

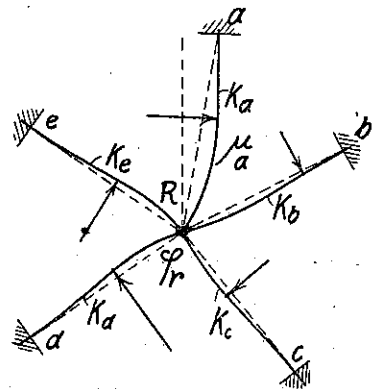
$$H_{AR} = C_{AR} + 0.5C_{RA}$$

(9)

第 32 圖



第 33 圖



(3) 固定端ラーメンの 1 固定端に移動のみを與へたる場合

第 33 圖に示す如く、材端 a に時計と同方向の移動を與ふるものとすれば、部材 R_a には撓度を生ずべく、之を μ_a にて表す。即ち μ_a は既知量の撓度である。然る時は (5) 式を得たると同様に、この場合の φ_r は次の如く與へられる。

$$\varphi_r = \frac{P_r}{\rho_r} - \mu_a \frac{K_a}{\rho_r} \dots\dots\dots (10)$$

普通の場合には、ラーメンは柱と梁の連結であり、固定端ラーメンの柱のみに撓度を與へたる場合を考ふれば第 34 圖に對し次式が得られる。

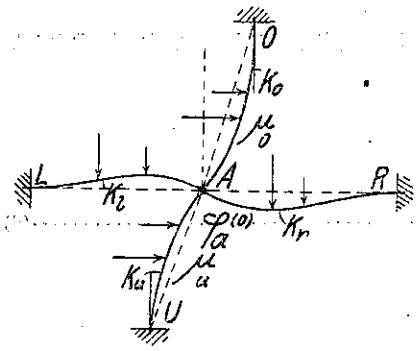
$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(0)} &= \frac{P_a}{\rho_a} - (\mu_o \gamma_o + \mu_u \gamma_u) \\ \text{茲に } \gamma_o &= \frac{K_o}{\rho_a}, \quad \gamma_u = \frac{K_u}{\rho_a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

即ち柱 AO に対して撓度 μ_o を既知とし、柱 AU に対して撓度 μ_u を既知として與ふれば、(11) 式の右邊は總て既知量なるが故に $\varphi_a^{(0)}$ は直に求められる。

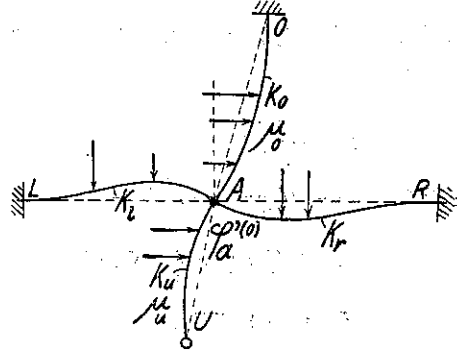
(4) 固定端ラーメンの柱の下端を鉸構造とし、柱に撓度を與へたる場合

第 35 圖に示す如く、柱 AU の下端を鉸構造とし、柱 AO 及び柱 AU に夫々 μ_o, μ_u なる撓度を與ふる時は (11) 式に相當するものは次の様になる。

第 34 圖



第 35 圖



$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(0)} &= \frac{P_a}{\rho_a} - (\mu_o \gamma_o' + 0.5 \mu_u \gamma_u') \\ \text{茲に } \gamma_o' &= \frac{K_o}{\rho_a}, \quad \gamma_u' = \frac{K_u}{\rho_a} \\ P_a' &= (C_{AR} - C_{AL}) + (C_{AO} - H_{AV}) \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \text{右} \\ \text{左} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{上} \\ \text{下} \end{array} \right) \quad \text{(鉸)} \\ \rho_a' &= \rho_a - 0.5 K_u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(5) 固定端ラーメンの 1 固定端に移動と撓角を與へたる場合

第 36 圖に示す如く、材端 a に時計と同方向の移動並に角變化を與ふるものとすれば、部材 R_a には撓度を生ずべく、之を μ_a にて表し、材端 a に於ける撓角を φ_a とする。斯くすれば (5) 式を得たると同様に次式が得られる。

$$\varphi_r = \frac{P_r}{P_r} - (\varphi_a + \mu_a) \frac{K_a}{P_r} \dots \dots \dots (13)$$

茲に P_r 及び P_r は (5) 式に與へたと同じものである。

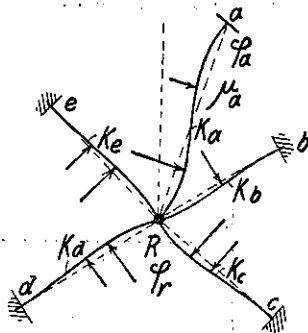
(13) 式は次の様な力學的意味をもつて居る。

- (イ) 撓角が零であつた材端に、正量の撓角を與へる時は、中央節點の撓角 φ_r に及ぼすこの撓角の影響は負量のもので K_a/P_r の割合を以て φ_a が分配傳達される。
- (ロ) 撓度が零であつた部材に、 μ_a を與へると、中央節點の撓角 φ_r には、之と逆符號の影響を與へ、 K_a/P_r の割合で μ_a を分配傳達する*。
- (ハ) φ_a と μ_a とは同一に取扱ふことが出来る。
例へば、 $\varphi_a=1, \mu_a=0$ を與へると、 $\varphi_a=0, \mu_a=1$ を與へると撓角 φ_r に及ぼす影響は同じである。
又 $\varphi_a=2, \mu_a=0$ を與へると $\varphi_a=0, \mu_a=2$ を與へるとは等影響であり、且又これは $\varphi_a=1, \mu_a=1$ を同時に與へる時と等しい結果になる。

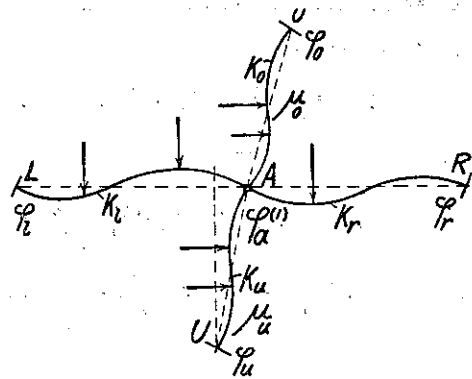
(6) 固定端ラーメンの固定端に撓角を與へ柱には撓度を與へたる場合

第 37 圖に示す如く、材端 O, R, U, L に夫々 $\varphi_o, \varphi_r, \varphi_u, \varphi_l$ の撓角を與へ、柱 AO, AU に夫々 μ_o, μ_u の撓度を與へたる場合には前同様にして中央節點の撓角 $\varphi_a^{(1)}$ は次の様になる。

第 36 圖



第 37 圖



$$\varphi_a^{(1)} = \frac{P_a}{\rho_a} - \{(\varphi_o + \mu_o)\gamma_o + \varphi_r\gamma_r + (\varphi_u + \mu_u)\gamma_u + \varphi_l\gamma_l\}$$

茲に $\gamma_o = \frac{K_o}{\rho_a} = \frac{K_o}{2(K_r + K_l + K_o + K_u)}$

$$\gamma_r = \frac{K_r}{\rho_a} = \frac{K_r}{2(K_r + K_l + K_o + K_u)}$$

$$\gamma_u = \frac{K_u}{\rho_a} = \frac{K_u}{2(K_r + K_l + K_o + K_u)}$$

$$\gamma_l = \frac{K_l}{\rho_a} = \frac{K_l}{2(K_r + K_l + K_o + K_u)}$$

$$P_a = (C_{AB} - C_{AL}) + (C_{AO} - C_{AU})$$

$$\rho_a = 2(K_r + K_l + K_o + K_u)$$

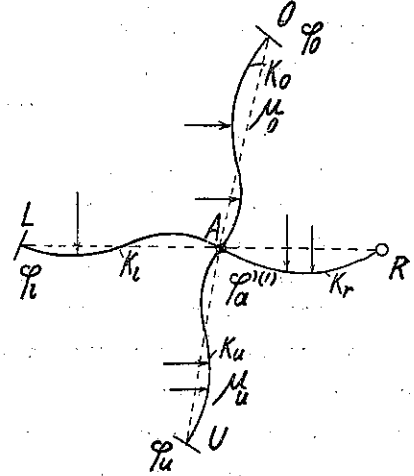
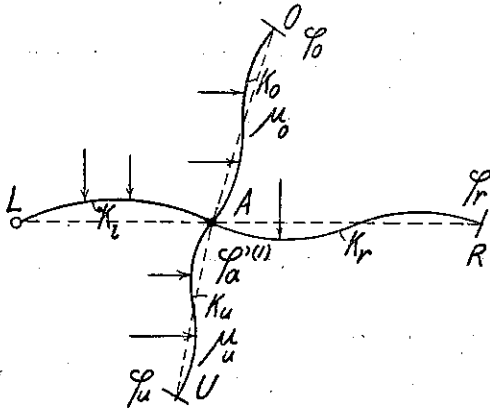
(14)

* (2) 式から知られる如く、 $\mu = -6E \frac{d}{l}$ であるから μ と d/l とは反對符號のものなることに注意すれば常識的にも μ_a と φ_r との関係は知られることである。

(7) 固定端ラーメンの梁の1端を鉸構造とし、其他の材端に撓角を與へ、且つ柱には撓度を與へたる場合

第 38 圖

第 39 圖



今若し第 38 圖に示す如く、材端 L を鉸構造とし、其他の材端には $\varphi_0, \varphi_r, \varphi_u$ を與へ、柱 AO, AU に夫々撓度 μ_0, μ_u を與へる時は

$$\varphi_a^{(1)} = \frac{P_a'}{\rho_a'} \{ (\varphi_0 + \mu_0)\gamma_0' + \varphi_r \gamma_r' + (\varphi_u + \mu_u)\gamma_u' \}$$

茲に

$$P_a' = (C_{AR} - H_{AL}) + (C_{AO} - C_{AU})$$

$$\rho_a' = 2(K_r + K_l + K_o + K_u) - 0.5 K_l$$

$$\gamma_0' = \frac{K_o}{\rho_a'}, \quad \gamma_r' = \frac{K_r}{\rho_a'}, \quad \gamma_u' = \frac{K_u}{\rho_a'}$$

(15)

又第 39 圖に示す如く、材端 R を鉸構造とし、其他の材端には $\varphi_0, \varphi_u, \varphi_l$ を與へ、柱 AO, AU には夫々撓度 μ_0, μ_u を與へる時は

$$\varphi_a^{(1)} = \frac{P_a'}{\rho_a'} \{ (\varphi_0 + \mu_0)\gamma_0' + (\varphi_u + \mu_u)\gamma_u' + \varphi_l \gamma_l' \}$$

茲に

$$P_a' = (H_{AR} - C_{AL}) + (C_{AO} - C_{AU})$$

$$\rho_a' = 2(K_r + K_l + K_o + K_u) - 0.5 K_r$$

$$\gamma_0' = \frac{K_o}{\rho_a'}, \quad \gamma_u' = \frac{K_u}{\rho_a'}, \quad \gamma_l' = \frac{K_l}{\rho_a'}$$

(16)

(14), (15) 及び (16) 式に於ける γ 及び γ' を撓角分配率と呼び、撓角・撓度共にこの分配率に比例して分配傳達せらる。

(14) 式を單なる式と考ふることなく、分配率の考察を以て眺め味ふ時、其包含する意味は深長なるものがある。*

* 機械的作表法によつて聯立方程式を確立し、これをイテラテオン法によつて聯立に解いて行つたことに、今や力學的の意味を有せしむることが出来たもので、(14) 式を記憶する上からも撓角分配率の考察は効果多いものである。

2. 固定柱ラーメンに関する理論

撓度を含む矩形ラーメンの計算に對しては、本解法は次に述べんとする固定柱ラーメンなる第2の基本的構造を考へる。

固定柱ラーメンの理論は主として非對稱的な垂直荷重を有するラーメンに就て應用せらる。

(8) 垂直荷重に對する固定柱ラーメン

第40圖に示す如き任意の矩形集合のラーメンが、任意の垂直荷重を有するものとすれば、節點 A, B, C, D, a, b, c, d に於ては、撓角を生じ、又是等の節點は水平移動を生ずるもので、其結果として柱 Aa, Bb, Cc, Dd には等値の撓度を生ずる。

今、この實際の變形を離れて、假想的な變形状態のラーメンを考へ、撓角は零にして恰も兩端固定の柱の如く作用し、唯撓度のみを生ずるものを考へ、この特殊のラーメンを固定柱ラーメンと呼ぶこととする。

斯くすれば柱 Aa に對する釣合條件より

$$M_{aA} + M_{Aa} + X_A h = 0$$

或は
$$X_A = -\frac{1}{h}(M_{aA} + M_{Aa}) \dots\dots\dots (a)$$

同様に

$$X_B = -\frac{1}{h}(M_{bB} + M_{Bb}) \dots\dots\dots (b)$$

$$X_C = -\frac{1}{h}(M_{cC} + M_{Cc}) \dots\dots\dots (c)$$

$$X_D = -\frac{1}{h}(M_{dD} + M_{Dd}) \dots\dots\dots (d)$$

然るに

$$X_A + X_B + X_C + X_D = 0$$

であるから (a), (b), (c), (d) 式より

$$\sum_{\substack{r=a \\ R=A}}^{r=d \\ R=D} (M_{rR} + M_{Rr}) = 0 \dots\dots\dots (e)$$

而して (1) 式より

$$M_{aA} + M_{Aa} = K_a(\mu^{(0)}) + K_a(\mu^{(0)}) = 2K_a\mu^{(0)},$$

$$M_{bB} + M_{Bb} = 2K_b\mu^{(0)},$$

$$M_{cC} + M_{Cc} = 2K_c\mu^{(0)},$$

$$M_{dD} + M_{Dd} = 2K_d\mu^{(0)}.$$

であるから (e) 式に是等を入るれば

$$2\mu^{(0)}(K_a + K_b + K_c + K_d) = 0$$

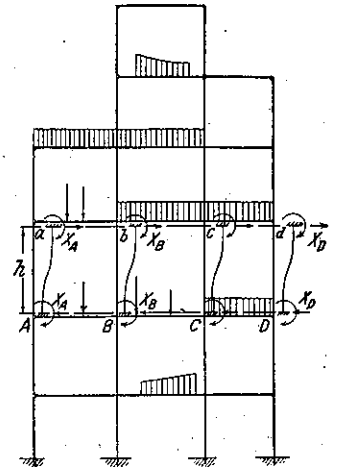
然るに $2(K_a + K_b + K_c + K_d) \neq 0$ であるから

$$\mu^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

即ち垂直荷重に對する固定柱ラーメンの撓度は零である。

従つて垂直荷重の場合に一般ラーメンが撓度を生ずる原因は各節點に生ずる撓角に因るものであることを知る。

第 40 圖



(9) 垂直荷重を有する固定柱ラーメンの固定端に撓角を與へたる場合

前節に於ける柱端 A, B, C, D; a, b, c, d に既知の撓角

$$\varphi_A^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_C^{(0)}, \varphi_D^{(0)};$$

$$\varphi_a^{(0)}, \varphi_b^{(0)}, \varphi_c^{(0)}, \varphi_d^{(0)}$$

を與ふれば、これにより撓度 $\mu^{(1)}$ を生ずべく、其値は前節同様に

(e) 式より求められる。

即ち (e) 式中

$$\begin{aligned} M_{aA} + M_{Aa} &= K_a(2\varphi_a^{(0)} + \varphi_A^{(0)} + \mu^{(1)}) \\ &\quad + K_a(2\varphi_A^{(0)} + \varphi_a^{(0)} + \mu^{(1)}) \\ &= K_a\{3(\varphi_a^{(0)} + \varphi_A^{(0)}) + 2\mu^{(1)}\} \\ M_{bB} + M_{Bb} &= K_b\{3(\varphi_b^{(0)} + \varphi_B^{(0)}) + 2\mu^{(1)}\} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

であるから (e) 式に入れば

$$\mu^{(1)} = -\{(\varphi_a^{(0)} + \varphi_A^{(0)})t_a + (\varphi_b^{(0)} + \varphi_B^{(0)})t_b + (\varphi_c^{(0)} + \varphi_C^{(0)})t_c + (\varphi_d^{(0)} + \varphi_D^{(0)})t_d\}$$

茲に $t_a = \frac{3K_a}{2(K_a + K_b + K_c + K_d)}, t_b = \frac{3K_b}{2(K_a + K_b + K_c + K_d)}, \text{etc.}$ }.....(18)

又此結果より次の性質を知り得る。即ち $\varphi_a^{(0)}, \varphi_A^{(0)}$ のみを存置し、 $\varphi_b^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \varphi_c^{(0)}, \varphi_C^{(0)}, \varphi_d^{(0)}, \varphi_D^{(0)}$ を零に置き固定状態ならしむれば

$$\mu^{(1)} = -(\varphi_a^{(0)} + \varphi_A^{(0)})t_a \dots\dots\dots(19)$$

となる。従つて (19) 式より知り得ることは、節點 a, A のみに撓角 $\varphi_a^{(0)}, \varphi_A^{(0)}$ を與ふれば、前記假想的ラーメンの撓度は (19) 式にて與へらるゝだけ生じ、(a). $\varphi_a^{(0)}=1, \varphi_A^{(0)}=1$ を與へた場合、(b). $\varphi_a^{(0)}=2, \varphi_A^{(0)}=0$ を與へた場合、(c). $\varphi_a^{(0)}=0, \varphi_A^{(0)}=2$ を與へた場合に於て總て撓度 $\mu^{(1)}$ は等値である。

この際、既知量の $\varphi_a^{(0)}$ を $\mu^{(1)}$ として受持たしむる量即ち $\varphi_a^{(0)}$ の分配量は $\varphi_a^{(0)}$ の t_a 倍であり、 $\varphi_A^{(0)}$ に對しても其の t_a 倍である。 t_a 即ち (18) 式にて與へられる係数を吾々は茲に撓度分配率と呼ぶこととする。

即ち(1)に於て示した固定端ラーメンに就て(7)式より $\varphi_a^{(0)}, \varphi_A^{(0)}, \varphi_b^{(0)}, \varphi_B^{(0)}, \text{etc.}$ を求め(但し水平荷重項を除く)、(18)式より $\mu^{(1)}$ を算出することが出来る。

各層に於ける $\mu^{(1)}$ を算出することを得、各節點に於ける $\varphi^{(0)}$ を求め得れば、(6)に於ける(14)式より $\varphi^{(1)}$ を算定するに於て出来る。

總ての節點にて $\varphi^{(1)}$ を決定し得れば、其等の $\varphi^{(1)}$ の數値を既知量として (18) 式より $\mu^{(2)}$ を總ての層に對して算出し得る。逐次、此方法により圖上に於て簡單に未知量 φ, μ を常に 1 個宛決定して行くことが出来る。

(10) 垂直荷重に對する固定柱ラーメンの柱の下端に鉸構造なる場合

第 42 圖に示す如く固定柱ラーメンの柱 Aa, Da の下端に鉸構造なる場合を考ふれば

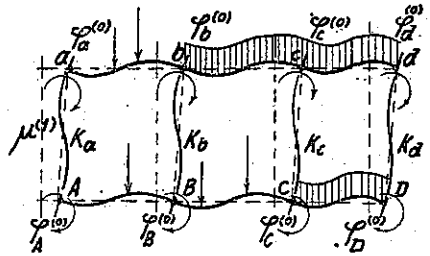
$$M_{aA} = K_a(2\varphi_a + \mu^{(0)}) = 0$$

より $\varphi_a = -\frac{1}{2}\mu^{(0)}$

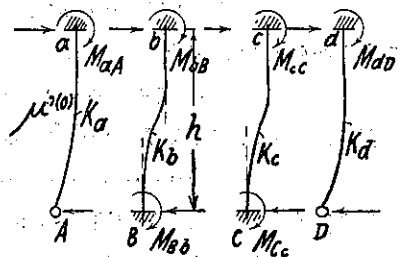
又同様に $\varphi_d = -\frac{1}{2}\mu^{(0)}$

故に $M_{aA} = K_a(\varphi_a + \mu^{(0)}) = K_a(0.5\mu^{(0)})$

第 41 圖



第 42 圖



$$M_{bB} + M_{Bb} = 2K_b \mu^{(0)}, \quad M_{cC} + M_{Cc} = 2K_c \mu^{(0)}$$

$$M_{aD} = K_a(\varphi_D + \mu^{(0)}) = K_a(0.5\mu^{(0)})$$

従つて (8) に於ける (e) 式に $M_{aA} = M_{Da} = 0$ を入れて上記の式を用ふれば、

$$\{0.5K_a + 2(K_b + K_c) + 0.5K_a\} \mu^{(0)} = 0$$

或は $0.5(K_a + K_a) + 2(K_b + K_c) \neq 0$

であるから $\mu^{(0)} = 0$ (20)

(20) 式より知り得ることは何れの柱の下端が鉸構造なるも垂直荷重のみの場合には固定柱ラーメンには撓度を生ぜずといふことである。

(11) 垂直荷重に対する固定柱ラーメンの柱の下端が鉸構造を有し上端の總節點に撓角を與へたる場合

第 43 圖に示す如く、柱 Aa, Db の下端が鉸構造にして上端に總て $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ なる撓角を與ふる時は

$$M_{aA} = K_a(2\varphi_a + \mu^{(1)}) = 0$$

より $\varphi_a = -\frac{1}{2}(\varphi_a + \mu^{(1)})$

同様に $\varphi_D = -\frac{1}{2}(\varphi_d + \mu^{(1)})$

故に $M_{aA} = K_a(2\varphi_a + \varphi_a + \mu^{(1)}) = K_a(2\varphi_a - 0.5\varphi_a + 0.5\mu^{(1)})$

$$M_{bB} + M_{Bb} = K_b(3\varphi_b + 2\mu^{(1)})$$

$$M_{cC} + M_{Cc} = K_c(3\varphi_c + 2\mu^{(1)})$$

$$M_{dD} = K_d(2\varphi_d - 0.5\varphi_d + 0.5\mu^{(1)})$$

従つて (8) の (e) 式に $M_{aA} = M_{Da} = 0$ を入れて上記の式を用ふれば、

$$\mu^{(1)} = -\{\varphi_a \bar{a}' + \varphi_b \bar{b}' + \varphi_c \bar{c}' + \varphi_d \bar{d}'\}$$

茲に

$$\bar{a}' = \frac{1.5K_a}{0.5K_a + 2K_b + 2K_c + 0.5K_a}$$

$$\bar{b}' = \frac{3K_b}{0.5K_a + 2K_b + 2K_c + 0.5K_a}$$

$$\bar{c}' = \frac{3K_c}{0.5K_a + 2K_b + 2K_c + 0.5K_a}$$

$$\bar{d}' = \frac{1.5K_d}{0.5K_a + 2K_b + 2K_c + 0.5K_a}$$

(21)

若し第 43 圖に於て固定端 B 及び C を共に鉸構造ならしむれば

$$\mu^{(1)} = -\{\varphi_a t_a' + \varphi_b t_b' + \varphi_c t_c' + \varphi_d t_d'\}$$

茲に

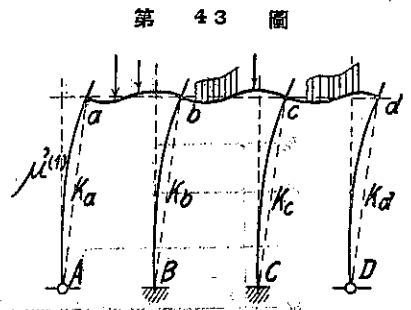
$$t_a' = \frac{3K_a}{K_a + K_b + K_c + K_a}$$

$$t_b' = \frac{3K_b}{K_a + K_b + K_c + K_a}$$

$$t_c' = \frac{3K_c}{K_a + K_b + K_c + K_a}$$

$$t_d' = \frac{3K_d}{K_a + K_b + K_c + K_a}$$

(22)



第 43 圖

(18) 式と (22) 式を比較すれば

$$t_a = \frac{t_a'}{2}, \quad t_b = \frac{t_b'}{2}, \quad t_c = \frac{t_c'}{2}, \quad t_d = \frac{t_d'}{2}$$

なることを知る。

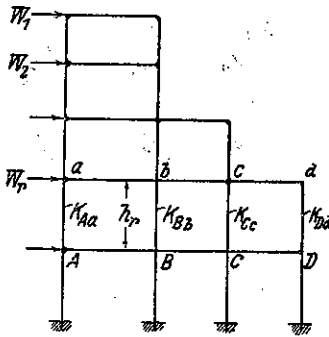
3. 鉸端ラーメンに関する理論 (水平節點荷重の場合)

(12) 鉸端ラーメン

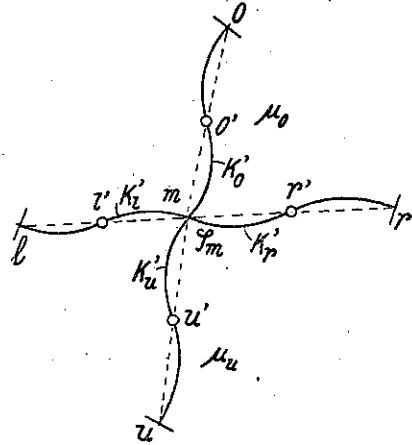
第 44 圖に示すラーメンは水平節點荷重を受くるものであるが、此種のラーメンに於ては、各層の柱は、各層毎に同一なる撓度を生じ、總ての節點に於ては撓角を生じて釣合を保ち、各部材の反曲點は大體として柱及び梁の中央附近に生ずる。

今實状態を離れて假想的なる變形を考へ、或る節點 m の上下に於ける柱の撓度を夫々 μ_o, μ_u にて表し、柱及び梁の中央に反曲點を有し、恰も其點にて鉸構造をなす如きラーメンを想像して見る。

第 44 圖



第 45 圖



斯くすれば、第 45 圖に示すラーメンの中央節點 m に於ける節點方程式は次の様になる。

$$3\varphi_m(K_o' + K_r' + K_u' + K_i') + \mu_o K_o' + \mu_u K_u' = 0$$

上式中 K' は柱及び梁の半分の長さに就てであるが全長に對しては $K' = 2K$ なる關係があるから上式より次式が得られる

$$\varphi_m = \frac{-(\mu_o K_o + \mu_u K_u)}{3(K_o + K_r + K_u + K_i)}$$

今第 1 章 (1) に用ひた撓角分配率 γ を上式に用ふれば

$$\varphi_m = -\frac{2}{3}(\mu_o \gamma_o + \mu_u \gamma_u)$$

茲に

$$\gamma_o = \frac{K_o}{2(K_o + K_r + K_u + K_i)}$$

$$\gamma_u = \frac{K_u}{2(K_o + K_r + K_u + K_i)}$$

$$\dots\dots\dots (23)$$

従つて各部材の K を總て等値と考へ $\mu_o = \mu_u = \mu$ と考ふれば

2 梁 2 柱より成る節點に於ては

$$\varphi_m = -0.167 \mu \dots\dots\dots (24)$$

2 梁 1 柱より成る節點 (上層節點) にては

$$\varphi_m = -0.111 \mu \dots\dots\dots (25)$$

1 梁 2 柱より成る節點 (側面節點) にては

$$\varphi_m = -0.222 \mu \dots\dots\dots (26)$$

1 梁 1 柱より成る節點 (上層隅節點) にては

$$\varphi_m = -0.167 \mu \dots\dots\dots (27)$$

一般に (23) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &= -\lambda_m \mu \\ \text{茲に} \quad \lambda_m &= \frac{2}{3}(\gamma_o + \gamma_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

故に柱及び梁の中央に反曲點を假定すれば、其等の反曲點により取圍まれたる節點の撓角は、柱に與へたる撓度の λ_m 倍にて表はさる。

斯くの如く、1 節點の上下に於ける柱の撓度相等しく、柱及び梁の中央に鉸構造を假定したる特殊のラーメンを鉸端ラーメンと呼ぶことにする。

(13) 鉸端ラーメンに依る層方程式と撓度概算式

第 44 圖に示すラーメンの上層より第 r 番目の層に對する層方程式は次式より與へらる。

$$\begin{aligned} \mu_r &= -\frac{H_r}{T_r} - \{\varphi_A + \varphi_a\}t_{Aa} + \{\varphi_B + \varphi_b\}t_{Bb} + \{\varphi_C + \varphi_c\}t_{Cc} + \{\varphi_D + \varphi_d\}t_{Dd} \dots\dots\dots (29) \\ \text{茲に} \quad H_r &= (W_1 + W_2 + \dots + W_r)h_r, \\ T_r &= 2(K_{Aa} + K_{Bb} + K_{Cc} + K_{Dd}) \\ t_{Aa} &= \frac{3K_{Aa}}{T_r}, \quad t_{Bb} = \frac{3K_{Bb}}{T_r} \\ t_{Cc} &= \frac{3K_{Cc}}{T_r}, \quad t_{Dd} = \frac{3K_{Dd}}{T_r} \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

然るに (28) 式より

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\lambda_A \mu_r, & \varphi_a &= -\lambda_a \mu_r \\ \varphi_B &= -\lambda_B \mu_r, & \varphi_b &= -\lambda_b \mu_r \text{ 等。} \end{aligned}$$

是等の φ を (29) 式に入れ斯くして得られる μ_r を $\mu_r^{(0)}$ とすれば

$$\mu_r^{(0)} = -\alpha_r \frac{H_r}{T_r} \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{茲に} \quad \alpha_r = \frac{1}{1 - \{(\lambda_A + \lambda_a)t_{Aa} + (\lambda_B + \lambda_b)t_{Bb} + (\lambda_C + \lambda_c)t_{Cc} + (\lambda_D + \lambda_d)t_{Dd}\}}$$

若し第 r 層に於ける總ての柱の K を等値と考ふれば

$$\alpha_r = \frac{1}{1 - t(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d)} \dots\dots\dots (32)$$

$$\text{茲に} \quad t = \frac{3}{2f}, \quad f = \text{第 } r \text{ 層に於ける全柱の數}$$

λ は一般には (28) 式

2 梁 2 柱より成る節點にては 0.167 (24) 式

2 梁 1 柱の節點にては 0.111 (25) 式

1 梁 2 柱の節點にては 0.222 (26) 式

1 梁 1 柱の節點にては 0.167 (27) 式

今 1 張間 n 層のラーメンに對して最上層の α_r を計算すれば

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_a + \lambda_b)} = \frac{1}{1 - \frac{1.5}{2}(0.222 + 0.222 + 0.167 + 0.167)} = 2.4$$

又最下層の α_n を求むれば

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - \frac{1.5}{2}(0.222 + 0.222)} = 1.5$$

最上層と最下層の途中に於ける任意層 (中間層) に於ては

$$\alpha_r = \frac{1}{1 - \frac{1.5}{2}(0.222 + 0.222 + 0.222 + 0.222)} = 3$$

同様に 2 張間 n 層のラーメンに於ては

$$\alpha_1 = 2.12, \quad \alpha_r = 2.57, \quad \alpha_n = 1.44$$

10 張間 n 層のラーメンに於ては

$$\alpha_1 = 1.81, \quad \alpha_r = 2.135, \quad \alpha_n = 1.362$$

100 張間 n 層のラーメンに於ては

$$\alpha_1 = 1.725, \quad \alpha_r = 2.02, \quad \alpha_n = 1.337$$

無限張間, 無限層数のラーメンに於ては

$$\alpha_1 = 1.715, \quad \alpha_r = 1.996, \quad \alpha_n = 1.334$$

即ち上記の計算結果により, 係数 α の概算値は, 如何に張間数を増加しても

最上層に於ては 2.4 より 1.7 の間に變化し,

中間層に於ては 3 より 2 の間に變化し,

最下層に於ては 1.5 より 1.3 の間にある

といふ實用上便利なる α の性質を知ることが出來た。この α を撓度係數と呼び (31) 式を撓度概算式と云ふ。

(14) 鉸端ラーメンに依る撓角概算式

撓度概算式により各層の撓度 $\mu_r^{(0)}$ を算出した時は, (24), (25), (26), (27) 式 (一般には (28) 式) より撓角を概算する。

即ち

(イ) 2 部材 (柱 1, 梁 1) より成る節點の撓角は, 其の柱の撓度の -0.167 倍にとる。

(ロ) 3 部材 (柱 1, 梁 2, 又は柱 2, 梁 1) より成る節點の撓角は, 其の柱の撓度の和 (柱 1 本の時は其の柱の撓度) に -0.111 を乗ず。

(ハ) 4 部材 (柱 3, 梁 2) より成る節點の撓角は, 2 部材の場合 (即ち(イ)の場合) の半分 (-0.083) にとる。

故に撓角係数を β とし n を其節點 m に於ける柱と梁の合計數とすれば、この場合の撓角 $\varphi_m^{(0)}$ は次式より求められる。

$$\varphi_m^{(0)} = -\beta_m(\mu_0^{(0)} + \mu_u^{(0)})$$

$$\left. \begin{aligned} n=2 \text{ なる時は } \beta_m &= 0.167 \\ n=3 \quad \quad \quad \beta_m &= 0.111 \\ n=4 \quad \quad \quad \beta_m &= 0.083 \\ n &= \text{節點 } m \text{ に於ける柱梁の合計數} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

(15) 奇數張間・偶數張間の對稱ラーメンに於ける撓角式

水平節點荷重の場合に於て一般節點 m に於ける節點方程式は (14) 式に於て $P_a=0$ としたものより得らる。即ち

$$\varphi_m = -\{(\varphi_0 + \mu_0)\gamma_0 + \varphi_r\gamma_r + (\varphi_u + \mu_u)\gamma_u + \varphi_l\gamma_l\} \dots\dots\dots (34)$$

然るに奇數張間の對稱ラーメンにあつては、ラーメンの中心線は中央張間の中心を通る。

その結果として、この中心線の兩側に於ては等大同方向なる撓角を生ずる。

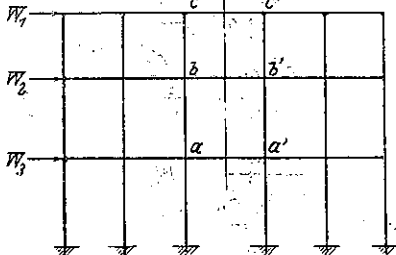
従つて第 46 圖に示す如く、節點 a, b, c に於ては、節點 a', b', c' に於ける撓角と等大同方向の撓角を生ずる關係上、(34) 式に於て $\varphi_r = \varphi_m$ となり次式の様になる。

$$\varphi_m = -\{(\varphi_0 + \mu_0)[\gamma_0] + (\varphi_u + \mu_u)[\gamma_u] + \varphi_l[\gamma_l]\}$$

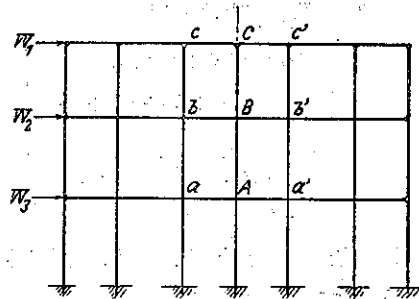
$$\left. \begin{aligned} \text{茲に} \quad [\gamma_0] &= \frac{K_0}{\rho_m + K_r}, \quad [\gamma_u] = \frac{K_u}{\rho_m + K_r}, \quad [\gamma_l] = \frac{K_l}{\rho_m + K_r} \\ \rho_m &= 2(K_0 + K_r + K_u + K_l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

偶數張間の對稱ラーメンの場合には、ラーメンの中心線は常に中央節點の上に重り、其の左右に於て等大同方向の撓角を生ず。

第 46 圖



第 47 圖



従つて第 47 圖に示す如く、節點 A, B, C に於て節點方程式を作る場合には (34) 式に於て $\varphi_r = \varphi_l, \gamma_r = \gamma_l$ と置くこととなり次式が得らる。

$$\varphi_m = -\{(\varphi_0 + \mu_0)\gamma_0 + (\varphi_u + \mu_u)\gamma_u + 2\varphi_l\gamma_l\} \dots\dots\dots (36)$$

4. 固定端ラーメンと鉸端ラーメンの併用 (一般水平荷重の場合)

第 48 圖

(16) 撓度概算式の誘導

第 48 圖に示す如き任意の矩形集成のラーメンが、其の左側の柱に任意の水平荷重を有するものとし、上層より数へて第 1 層の柱にかかる水平荷重の合成力を W_1 、第 2 層に於ける同様の合成力を W_2 、第 r 層の合成力を W_r とし、柱の高さを夫々 h_1, h_2, h_r とする。

斯くすれば第 r 層に對する層方程式より第 r 層の撓度 μ_r は次式より與へらる

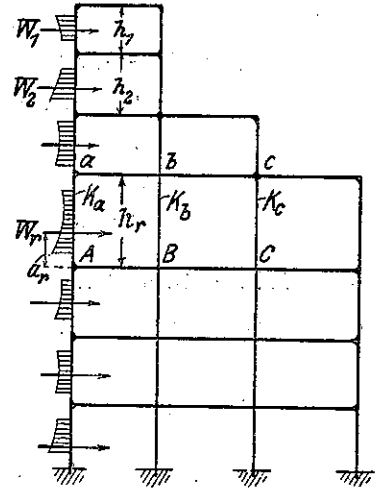
$$\mu_r = -\frac{H_r}{T_r} - \left\{ (\varphi_a + \varphi_A)ta + (\varphi_b + \varphi_B)tb + (\varphi_c + \varphi_C)tc + \dots \right\}$$

茲に

$$H_r = h_r(W_1 + W_2 + \dots + W_{r-1}) + a_r W_r + C_{aA} - C_{Aa}$$

$$T_r = 2(K_a + K_b + K_c + \dots)$$

$$ta = \frac{3K_a}{T_r}, \quad tb = \frac{3K_b}{T_r}, \quad tc = \frac{3K_c}{T_r}, \quad \text{etc.} \quad (37)$$



(37) 式に於て $a_r = h_r$ とすれば荷重は節點荷重となり $C_{aA} = C_{Aa} = 0$ となる。即ち (37) 式に於て

$$H_r = (W_1 + W_2 + \dots + W_r)h_r$$

となり (37) 式は (29) 式並に (30) 式と一致する。

今 (37) 式より第 r 層に於ける撓度 μ_r を概算せんとするに H_r/T_r の項は、荷重とラーメンとが與へられる時は既知のものであり、 ta, tb, tc も亦既知項なるが故に $\varphi_a, \varphi_A, \varphi_b, \varphi_B$ 等を求むればよいのである。

其の 1 法として次の如き特種ラーメンを考へる。

(1) 荷重を有する柱上の撓角に就て (37) 式に於て荷重を有する柱上の節點に於ける撓角は φ_a, φ_A の 2 つである。是等兩者の概算値を次の如き假定のラーメンより求む。

即ち節點 a に於ける節點方程式より次式が得られる (第 49 圖参照)。

$$\varphi_a^{(0)} = \frac{P_a}{[\rho_a]} - \mu_0[\gamma_0] - \mu_u[\gamma_u]$$

茲に

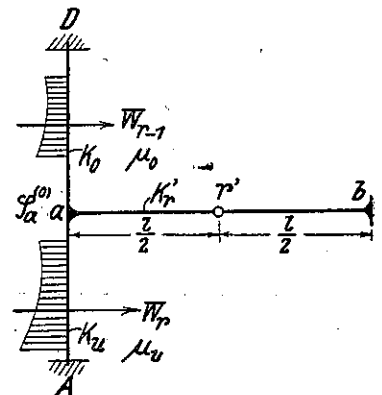
$$[\rho_a] = 2(K_0 + K_u) + 1.5 K_r'$$

$$= 2(K_0 + K_u + K_r) + K_r$$

$$[\gamma_0] = \frac{K_n}{[\rho_a]}, \quad [\gamma_u] = \frac{K_u}{[\rho_a]}$$

$$P_a = C_{aD} - C_{Aa} \quad \dots \dots \dots (38)$$

第 49 圖



上式中 K_r' は梁 ab の半分の長さ $a r'$ に對するものであり、 K_r は梁 ab の全長に就てのものである。

若し $\mu_0 = \mu_u = \mu_r$ とすれば (38) 式より、

$$\varphi_a^{(0)} = \frac{P_a}{[\rho_a]} - \mu_r([\gamma_0] + [\gamma_u]) \quad \dots \dots \dots (39)$$

更に又 $K_0 = K_u = K_r$ なる時は

茲に

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(0)} &= \frac{P_a}{[\rho_a]} - 0.3\mu_r \\ P_a &= C_{aD} - C_{aA} \\ [\rho_a] &= \rho_a + K_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

又第 50 圖に示す如く上層隅節點に於ては

茲に

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(0)} &= \frac{P_a}{[\rho_a]} - \mu_r[\gamma_u] \\ P_a &= -C_{aA} \\ [\rho_a] &= \rho_a + K_r \\ &= 2(K_u + K_r) + K_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

$K_u = K_r$ なる時は

$$\varphi_a^{(0)} = \frac{P_a}{[\rho_a]} - 0.2\mu_r \dots\dots\dots (42)$$

故に (40), (42), の 2 式は一般的に次式で表さる。

茲に

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m^{(0)} &= \frac{P_m}{[\rho_m]} - k_m\mu_r \\ k_m &= \text{係數} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

(ロ) 荷重を有せざる柱上の撓角に就て (37) 式に於て荷重を有せざる柱上の節點に於ける撓角は, $\varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ である。

故に例へば節點 b を中央節點とする鉸端ラーメンを考ふれば, 第 45 圖と同様にして (23) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_b^{(0)} &= -\frac{2}{3}(\mu_o\gamma_o + \mu_u\gamma_u) \\ \gamma_o &= \frac{K_o}{2(K_o + K_r + K_u + K_l)} \\ \gamma_u &= \frac{K_u}{2(K_o + K_r + K_u + K_l)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

従つて各部材の K を總て等値と考へ, $\mu_o = \mu_u = \mu_r$ とし, 梁と柱の數を種々變化して考ふれば (24), (25), (26), (27) 式は茲に役立つ。而して一般には (28) 式にて表され φ に對して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_b^{(0)} &= -\lambda_b\mu_r, & \varphi_c^{(0)} &= -\lambda_c\mu_r \\ \varphi_d^{(0)} &= -\lambda_d\mu_r, & \varphi_e^{(0)} &= -\lambda_e\mu_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

故に (37) 式の φ の代りに (43) 式及び (45) 式を用ひて整理し μ_r を $\mu_r^{(0)}$ とすれば

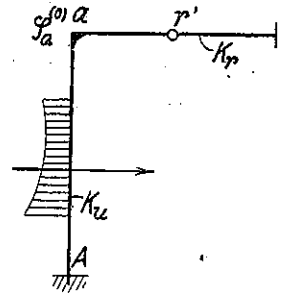
$$\mu_r^{(0)} = -\alpha_r \left\{ \frac{H_r}{T_r} + \left(\frac{P_a}{[\rho_a]} + \frac{P_A}{[\rho_A]} \right) t_a \right\} \dots\dots\dots (46)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{1 - \{(k_a + k_A)t_a + (\lambda_b + \lambda_B)t_b + (\lambda_c + \lambda_C)t_c + \dots\}} \\ t_a &= \frac{3K_a}{T_r}, \quad t_b = \frac{3K_b}{T_r}, \quad \dots \\ T_r &= 2(K_a + K_b + K_c + \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

若し第 r 層に於ける總ての柱の K を等値と考ふれば

第 50 圖



$$\alpha_r = \frac{1}{1 - \frac{3}{2f}(k_A + \lambda_B + \lambda_C + \dots + k_a + \lambda_b + \lambda_c + \dots)} \quad \dots (48)$$

$f =$ 第 r 層に於ける全柱の數

今 1 張間 n 層のラーメンに對して最上層の α_r を計算すれば (26), (27), (40), (42) 式を参照して

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \frac{3}{2f}(k_A + \lambda_B + k_a + \lambda_b)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}(0.3 + 0.222 + 0.2 + 0.167)} \quad \dots (a)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = \frac{1}{1 - 0.75(0.3 + 0.222 + 0.3 + 0.222)} = 4.61 \quad \dots (b)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - 0.75(0.3 + 0.222)} = 1.64 \quad \dots (c)$$

同様に、2 張間、3 張間、4 張間等に對して α_r の値を概算すれば次表に示す如くである。

	張 間 數									
	1	2	3	4	5	6	8	10	100	∞
最上層	3	2.4	2.18	2.07	2.0	1.95	1.9	1.87	1.73	1.72
中間層	4.63	3.22	2.8	2.52	2.47	2.38	2.3	2.23	2.22	2.00
最下層	1.64	1.52	1.47	1.44	1.425	1.41	1.39	1.38	1.34	1.33

上表中に示された α の數値を見るに、大體として最上層に於ては張間數が無限に大となるも 1.7 より小となることなく、3 と 1.7 の間に在り、中間層に於ては 4.6 と 2 との間にあり又最下層に於ては 1.64 と 1.33 との間にあることを知る。

故に上記の α_r に對する概算數値を用ひて (46) 式より各層に於ける $\mu_r^{(0)}$ を計算することが出来る。

又 $\mu_r^{(0)}$ が求まれば (38), (41), (33) 式に依り各節點に於ける $\varphi_m^{(0)}$ を概算することが出来る。

結 語

本文に取扱つた撓角分配法は、不均衡性撓角・撓度 (unbalanced slope and deflection) を夫々の分配率に應じて分配傳達せしめ、balance に持つて行く方法を述べたもので、往年筆者が提案した反復試索法(イテラチオン法)に力學的意味を附與したものと考へることが出来る。

撓角分配法の計算操作は 2 つに大別される。其の第 1 は撓角・撓度の概算値を求めることで、其の第 2 は概算値より生ずる unbalance に在る撓角・撓度を分配率に應じて分配傳達せしむることを圖上で行ふ操作である。

概算値を計算するには、イテラチオン法を説明する際に假定値の算出法として述べた方法によつてもよいし、或は又解決すべきラーメンと類似なる他のラーメンの既算結果を使用してもよいのであるが、茲には聯立方程式といふ様なものを用ひず全然獨立した算出法を述べたのである。

それには、大體次の様な 4 種類を考ふれば先づ普通の矩形ラーメンの場合には役立つものである。

- (1) 撓角のみを生ずる様なラーメン又は連續梁の場合
- (2) 垂直荷重を荷せられ、撓角・撓度を生じたる場合
- (3) 水平集中荷重をラーメンの一侧の節點に有する場合 (耐風耐震計算に對するもの)
- (4) 任意の水平荷重をラーメンの一侧に有する場合

この中 (1) に對しては固定端ラーメンの考察は簡單に撓角の概算値を與へることが出来る。又 (2) に對しては

固定端ラーメンと固定柱ラーメンの考察は簡単に撓角と撓度の概算値を與へる。筆者は(3)に對しても當初、この固定柱ラーメンの考察を試みたのであるが、結果は面白くなかつた。

それは概算値が眞値から相當に離れて居た爲に良い結果を得る迄には手數がかゝつた。即ち

(3)に對しては、鉸端ラーメンの考察を用ひて良結果を収めることが出來たのである。

(4)に對しては固定端と鉸端の併用考察から概算値を決定することにした。

併し概算値の決定方法は前にも述べた通り、如何なる方法によつて求めてもよく、既に解決した類似のラーメン又は連続梁の問題を用ひてもよい。是等は計算操作の中の第1に屬するものである。

次に第2の計算操作たる撓角分配法は、之を(1)準備計算と、(2)圖上計算の2つに分けて例題を以て説明した。

この中、準備計算に屬する部分は、正確値を決定するに、常に關係して來る數値を與へるものであるから、詳しい計算を必要とする。併し圖上計算の初めの間は、四捨五入を成るべく數値の頭の方で行つて、増加して行く傾向のものは大膽に増加せしめ、粗雑な計算を良しとする。

この方針を以て1回又は2回通り所定の計算を行へば、粗雑な數字に於て前回の計算結果と今回の計算結果と大差なきに至るから、最後に1回精細な計算を行へば迅速に良結果が得られる。

上記の方法は、弧形ラーメン・山形ラーメン・函形ラーメン等の問題にも應用せられる。

第51圖に示すものは撓角分配法の基本を成す數値の種類と記入位置を示すもので撓角・撓度を含むものに對してであるが、撓角のみを含むものに對しては H/T が消失する。

斯くして、ラーメンの圖形其のものを一群の解式の綜合表現として考察することは、解法の簡易性以外に深い興味を潜在することを思はしむるものである。

終りに、本計算部分の査定に對して助力されたる北海道帝國大學工學部助手 三澤芳雄君竝に圖面の作製に援助されたる 同助手小野壽惠吉君に對し深甚なる謝意を表するものである。

(昭和9年10月土木學會創立20周年を祝して)

第 51 圖

