講　　演

第20卷第12號　昭和9年12月

連弾性法則の平面剛矩形構解析への適用

（昭和9年10月27日土木學會創立20周年記念講演會に於て）

會員 工學士　重　松　　愿*

Application of the Continuous Elastic Theory to the Analysis of Plane Rectangular Frames

By Gen Shigematsu, C. E., Member.

內容梗概

本文は連弾性法則による一般彈節構造の應力解析法を，平面矩形構の主として剛節なるものに單獨に適用せる場合に就いて，簡單に說明するものである。

1. 連　彈　性　法　則

1. 連構材及び連彈性公式

連構材とは剛結構より適宜に採りたる任意數の連續構材であつて，其の線形は連直線，多角折線或はこれらの集成形であり得るが，解析に當り實際に適用せらるゝ連構材は2連直線或は一矩形線の範圍を出でない。連構材を一般的に表はすに其の格點列の記號 $abc....kmn$ を以てする。

連彈性公式とは連構材の各材に關する不定彈性變形を驅逐せる形式の彈性應力式であつて，この適用に對し關係構材の靜力學條件を與ふれば各構材應力が解かれ得る性質を有する。かくして後に揭ぐる連彈性公式と靜力學平衡式との適用により剛矩形構が解かれ得るのである。

玆に謂ふまでもなく剛矩形構に關する彈性主應力は曲力率であるから，以下この曲力率解法に就てのみ述べる。

2. 連彈性法則による解法の原理

剛矩形構に於ける任意構材の材端曲力率 M は其の構材に關する格點の彈性變形 δ 及び格間荷重 P の各項より成る函數の形式を以てこれを表はすことが出來る。即ち，

$$M=(\delta, P) \qquad \cdots\cdots(1)$$

このとき變形 δ が或る事情よりして既知となれば M の値が既知となることが明である。

今若し必要なる任意數の連構材に就いて其の曲力率群を不定彈性變形を含まず，單に格間荷重群及び他の既知項よりなる一定形式，

$$(M)=(P) \qquad \cdots\cdots(2)$$

を以て表はし考ふるに，この式は何等の計算準備もなく直接容易に書表はされ得る一つの公式即ち連彈性公式の形式であるが，或はこれを式 (1) の群より或數 i 個の不定變形を消去して得らるゝものと見做すことも出來る。この消去計算は實際に於て可能であるが，玆ではその說明を省略する。斯く (2) 式には i 個の條件が伏在されてあることになるから，これに必要にして適切なる i 個の條件を與ふれば總ての M の値が既知となる。そこで i 個の條件として簡單に靜力學條件，

---

* 京都帝國大學助教授

$$\left.\begin{array}{ll}\text{曲力率條件,} & \sum M=0 \\ \text{剪力條件,} & \sum Q=\sum(M,\ P)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

を與ふれば結局，(2) 式の群にて表はさるゝ M が總て解かれ得ることになる。而して任意の剛結構に就て或る應力領域に關する彈性變形の自由度數が其の靜力學條件數を超過せないと言ふ力學上の原則は (2) 式の解析に對し必要にして十分なる i 個の條件式 (3) が提供され得ることを疑はしめないのであつて，この連彈性公式の存在及び其の適用法を連彈性法則と稱する。

而して斯くの如き解法の原理はこれを實際に應用するも其の方法が可なり簡易であるので，連彈性法則に依る剛結構造解法が實用上十分の適用性を有することが言はれ得るのである。

2. 彈性基本式

載荷せる剛矩形構に就いて其の任意構材 ab の長さ，彈性率，斷面二次率，格間荷重及び其の作用距離を夫々 l, E, I, P 及び w にて表はし，其の彈性變形として材端なる格點の原位置より材軸に直角なる方向の變位 η_a, η_b 及び格點の廻りの變角 θ_a, θ_b を考へ，材軸方向の變位は曲力率に關する限りこれを不問にする。又 ab が矩形構の縱橫何れの構成材であるとも其の構成方向の正負はこれを適宜に假定しおけばよく，玆では解法の便宜上 ab を左右にする位置を其の正視位置とし，全構成に對しては，必要に應じ，直交座標に準ずる直交矢の方向によつて各構成材の正方向とする。

今 ab の彈性基本式として應力，變形何れを主，從とするものを表はしてもよいが，玆で從來より能く知られてある形式として曲力率を變形項にて表はせるものを求むるものとすれば，

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=\frac{2EI}{l}\left\{2\theta_a+\theta_b+\frac{3}{l}(\eta_a-\eta_b)\right\}-\frac{w(l-w)^2}{l^2}P\\ M_{ba}&=\frac{2EI}{l}\left\{2\theta_b+\theta_a+\frac{3}{l}(\eta_a-\eta_b)\right\}+\frac{w^2(l-w)}{l^2}P\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

上式は撓度撓角法の Wilson 公式なることは說明の限りでない。而して M 等に關する符號規約も一般に知られてはあるが，參照のため次の如く與へる。

曲力率の符號規約： 構材端に於ける曲力率 M の値はこれに對向する外力率が**右廻轉に作用するものを正**とする。

亦これまでの各記號は一構材 ab に關するものであるが，以後構材群を取扱ふに至れば各記號を各構材每に接尾字などによつて區別して表はすを要する。然し接字を悉く羅列するは煩雜に堪えないから，各記號の所屬の不明ならざる限りこれを省略し，必要の度に應じ，例へば記號集團の主要なる項或は最後の項などに就てこれを附記して表はすものとする。

さて，(4) 式を次の如く簡單なる記號形式を以て表はす。

$$\left.\begin{aligned}&JM_{ab}=\frac{2}{3}\theta_a+\frac{1}{3}\theta_b+\eta_{ab}-s'_{ab}, \qquad JM_{ba}=\frac{2}{3}\theta_b+\frac{1}{3}\theta_a+\eta_{ab}+s''_{ab}\\ \text{但し}\quad &J=\frac{l}{6EI}, \qquad \eta_{ab}=\frac{1}{l}(\eta_a-\eta_b),\\ &s'_{ab}=\frac{w(l-w)^2}{l^2}JP_{ab}, \qquad s''_{ab}=\frac{w^2(l-w)}{l^2}JP_{ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

上の2つの式に就て θ_a 或は θ_b を消去せる形式を作れば，

$$\left.\begin{aligned} &JM_{ab}-2JM_{ba}=-q'_{ab}-\eta_{ab}-\theta_b \qquad \text{(i)}\\ &2JM_{ab}-JM_{ba}=-q''_{ab}+\eta_{ab}+\theta_b \qquad \text{(ii)}\\ \text{但し}\quad &q'_{ab}=\frac{w(l^2-w^2)}{l^2}JP_{ab},\qquad q''_{ab}=\frac{w(l-w)(2l-w)}{l^2}JP_{ab} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

更に構材 ab に連結せる任意構材 bc に就て上式(ii)と同一形式を準備し，これと (i) との間に θ_b を驅逐すれば，

$$JM_{ab}-2JM_{ba}+2JM_{bc}-JM_{cb}=-q'_{ab}-q''_{bc}-\eta_{ab}+\eta_{bc}\cdots\cdots(7)$$

上式が單一連續桁に對して表はされたる場合には Clapeyron の 3 曲力率法式になることは周知のことである。

以上の各式に示されある格間荷重係數 s, q の中，連彈性公式に對し最必要なるは q であり，s は計算の便宜上の係數であるが，この外に q に伴ふて係數 r の存するものとすれば便利であつて，これらを次に準備公式として記載する。

$$\left.\begin{aligned} &q'=\frac{w(l^2-w^2)}{l^2}JP,\qquad q''=\frac{w(l-w)(2l-w)}{l^2}JP,\qquad r=\frac{3w(l-w)}{l}JP\\ &s'=\frac{w(l-w)^2}{l^2}JP,\qquad s''=\frac{w^2(l-w)}{l^2}JP,\\ \text{照合}\quad &q'=2s''+s',\qquad q''=2s'+s'',\qquad r=q'+q''=3(s'+s'')\\ &3s'=2q''-q',\qquad 3s''=2q'-q'' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

任意形式の格間配賦荷重に關する係數に對しては集中荷重 P を單位配賦荷重に置換へたるものを各係數 q, r, s に與へて距離 w に關し積分して得らるゝが，一例として單位 p なる格間等賦荷重に就てこれを表はせば，

$$q'=\frac{J}{4}pl^2,\qquad q''=\frac{J}{4}pl^2,\qquad r=\frac{J}{2}pl^2,\qquad s'=\frac{J}{4}pl^2,\qquad s''=\frac{J}{4}pl^2$$

各種係數に屬する格間荷重の正負の符號は，彈性式が其の構材の左右位置即ち正視位置に於て誘導されあることよりして，各構材の正視位置に對する下向格間荷重に正號を，上向格間荷重には負號を與ふべきことは既に明かである。

3. 連 彈 性 公 式

1. 彈性剛格點に關する連彈性公式

彈性基本式 (7) の右邊に於ける相對變位 η の各項は 2 つの連構材 abc の左右翼に關して常に同一形の正負の序列に於て現はるゝが故に，構造の任意數 $n-1$ の連構材 $abc....kmn$ の兩端 a, n を除く他の總ての中間格點に就てこの基本式を作り，それを加合はすときは，これら相對變位項は連構材の兩翼材 ab, mn に關する項のみを殘して總て消失することは明であつて，其の結果形式は，

$$\left.\begin{aligned} &JM_{ab}-2JM_{ba}+3(JM_{bc}-JM_{cb}+\cdots\cdots+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=(P)+R\\ \text{但し}\quad &(P)=-q'_{ab}-r_{bc}-\cdots\cdots-r_{km}-q''_{mn}\\ &R=\mp\eta_{ab}\pm\eta_{mn}\\ &J=\frac{l}{6EI},\qquad q', q'', r:\ \text{公式 (8) の値} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

玆に翼材 ab 及び mn の格點の相對變位に關する項 η_{ab} 及び η_{mn} に附せる符號に關しては，其の變位の性狀が如何なるものにせよ，連構材として採りたる ab, mn の alphabetical 序列が構材の方向規定に關し正方向或は負方向に進むに從つて，上號或は下號を採るべきことになる。

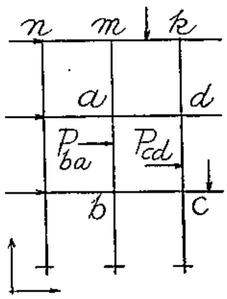
公式 (9) は連構材の各翼材の相對變位（嚴正に言へば其の彈性廻轉度）を翼條件とする彈性應力式であつて，式の左邊に於ける JM の符號は正負交互に ＋－‥‥＋－，其の數係數が 1 2 3....3 2 1 の連續排列であり，亦右

邊に於ける格間荷重式 (P) が $q'r....rq''$ の排列なることは何れも公式の形を容易に記憶し得るに足り，荷重係數 q, r の値は必要に應じ公式 (8) 等を參照すればよい譯である。

唯だ相對變位の項 R に就ては，公式適用の要求上よりして，それが公式中より驅逐され得る如く連構材の兩翼を選定すべきことになり，其の數値の吟味若くは記憶を要せないのである。

而して R を驅逐することの最簡なる手段は R 自らを零ならしむるにあり，斯かる事狀が任意の剛結構に於て常に充たされ得ることはこれを單純に說明し得るも，然しこの說明を待つまでもなく實用せらるゝ剛矩形構にありては，特に構材軸應力の彈性效果を無視する解析法が許され得る關係よりして，連構材の或る少數群毎に R の零なる事狀を容易に認識し得るのであつて，例へば第 1 圖の如き樹立矩形構の任意の 2 つの水平材或は同位層に於ける任意の 2 つの垂直材を兩翼材として公式を適用するとき常に $R=0$ なる條件が存するのみならず，其の構成及び載荷の對稱なる場合にありては任意の連構材に對して $R=0$ となし得るは明かである。

第 1 圖



斯くして本公式は剛矩形構に簡便に適用され且剛矩形構に對しては彈性公式としてこの公式のみの適用を以て其の解析が滿足さるゝを知るのである。

尙前述の如く公式適用に關し矩形構に對して $R=0$ の絕對的存在は構造の任意形の閉合せる經路の連構材を一周して $ab=mn$ なる如く兩翼材を重複せしめ，或は彈性固定若くは彈性固定と見做し得べき 2 つの格點を b 及び m ならしむる場合に起る。この彈性固定といふことは其の變形が零なることであるが故に，彈性固定の領域を應力の零なる 1 つの虛構材と假想すれば，本式に於てその兩翼材 ab, mn を虛構材と見做すことにより，上述の如くこれを 2 つの彈性固定點の間に適用して便利なるのみならず，亦 2 つの彈性固定點を挾んで或は一つの彈性固定部を一翼材として常に連續的にこれを取扱ひ得るのであつて，この性質は次の公式變形により一層明瞭に說明し得るのである。

例へば本公式の兩翼 ab, mn に對し基本式 (6) の (i) と (ii) の ab を mn に代へたるものとを適用して同類項を整理すれば

$$JM_{bc}-JM_{cb}+\cdots\cdots+JM_{km}-JM_{mk}=(P)+R$$

但し $$(P)=-\frac{1}{3}\left(r_{bc}+\cdots\cdots+r_{km}\right)$$

$$R=\frac{1}{3}\left(\theta_b-\theta_m\right)$$

上式を連構材を一周して $b=m$ ならしむるとき，或は彈性固定の 2 つの格點 b, m に適用するとき常に $R=0$ なるは一見して明かである。

更に基本式の取捨如何により變形條件 R に θ_b 或は θ_m 何れか 1 つを含むものも存するわけであつて，例へば基本式 (6) (i) を本公式の左翼に代置して θ_b を含むものを導けば，

$$3(JM_{bc}-JM_{cb}+\cdots\cdots+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=(P)+R$$

但し $$(P)=-(r_{bc}+\cdots\cdots+r_{km})-q''_{mn}$$

$$R=\theta_b+\eta_{mn}$$

これら各式の內容は總て本公式 (9) に含まれてあるから，それを準備し置く必要はないが，唯構造支點の彈性度が假定せらるゝ場合などに直ちに本公式の代用として便利であり，何れも本公式が彈性固定の格點に對し連續性を有することを明示するものである。

連彈性公式を $abc....kmn$ に對し適用することを便宜上 $M_{abc.....kmn}$ を適用すると言ふことにする。

2. 鉸格點及び彈性軟格點に關する連彈性公式

剛結構造中の特別なる格點が鉸結なることは其の點に於ける構材曲力率が零なること及び其の點に關する構材變角が不定なることであるが故に,連構材の中間格點が剛結なる條件の下に誘導されたる連彈性公式 (9) は鉸格點を通じて連續性を有せざるは勿論であつて,其の點に於て公式適用に關し中斷せらるべきことになる。即ち連構材 $abc....kmn$ は其の翼端 a, n に於てのみ鉸格點を採ることが許されるのであつて,この場合に對する連彈性公式は M_{ab} を零とし θ_a に無條件なる式,或は M_{nm} を零とし θ_n に無條件なる式,或はこの2條件が同時に存する式となり且これらの條件は構材の載荷係數に無影響であるから,例へば a 端鉸なる連彈性公式は

$$-2JM_{ba}+3(JM_{bc}-JM_{cb}+\cdots\cdots+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=(P)+R$$

亦 n 端鉸なれば單に $M_{nm}=0$ を與ふればよい。斯く鉸格點に對しても異なる他の形式を準備するの必要なきことは解法上便利な點である。唯だ注意すべきは連構材の各端 a, n が鉸點ならざる條件の下に一般に誘導されたる解式に對し誤つて $M_{ab}=0$ 或は $M_{nm}=0$ を與ふる如き過失を犯すべがらざることである。

亦軟格點即ち格點に關する構材端の彈性度が剛,鉸の中間性なるものに對しては,言ふまでもなく其の彈性度に關して實驗的に定められたる彈性變角係數の値が與へらるべきであつて,今材端の單位曲力率による其の彈性變角度を μ を以て表はせば,任意格點 b の變角 θ_b に對する構材 ab 及び bc の各端 b の相對變角は夫々 $\theta_b-\mu M_{ba}$ 及び $\theta_b-\mu M_{bc}$ なるが故に,この關係を與へて連彈性公式を誘出すれば,

$$\left.\begin{array}{l}JM_{ab}-(2J+\mu)M_{ba}+(3J+\mu)M_{bc}-(3J+\mu)M_{cb}+\cdots\cdots \\ \qquad\cdots\cdots+(3J+\mu)M_{km}-(3J+\mu)M_{mk}+(2J+\mu)M_{mn}-JM_{nm}=(P)+R \\ \text{但し}\quad (P), R, J:\ \text{公式(9)と同様} \\ \qquad\qquad \mu:\ \text{格點に對する構材端の彈性變角係數}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(10) 式の適用に對しては兩翼端 a, n に關する彈性度は無關係であるが,唯それが鉸端 ($\mu=\infty$ なる極限の場合) なるときに於ては $M_{ab}=0$, $M_{nm}=0$ を與へて計算を簡易ならしむることは上述と異らない。

彈性係數 μ の値が假定され得ざる限り (10) 式の適用は無用なるも,この式の內容に視て (9) 式の適用を考ふれば,其の剛曲係數 J の値はこれを寧ろ過大に秤價するとも過小にせざることの實際に近きことを知るであらう。

4. 解 法 の 要 領

本解法の要領は既に述べし如く,連彈性公式と曲力率及び剪應力に關する靜力學平衡式とを構造の各應力領域に適用し,其の任意一翼側より他翼側に連繫的に逐次計算を進むるにあり。

例へば第 1 圖の如き矩形構に對しては縱橫何れの方向に解法を進めてもよいが,今其の進路を下側より上側に採るものとし,任意層に於ける單區劃 $abcd$ に於て b, c に關する材端曲力率が前計算により既知なりとするとき其の直上の a, d に關する材端曲力率が算定され得るならば,それに依つて更に其の上方格點に關する曲力率が定まるから,これを各層毎に順を逐ふて進めば結局全構が解かれ得ることになる。

i. $M_{a'}$, M_{dc} の算定

連彈性公式 $M_{ab'a}$ 中に含まる2未知量 M_{ab}, M_{ac} に對しこの層に關する剪力平衡式を與ふれば2つの未知量が既知となる。多格間にして計算すべき曲力率數が i 個なるときには,連繫せる $i-1$ 個の連彈性公式と 1 個の剪力平衡式により i 個の曲力率が定まる。蓋しこの計算は解法中最も煩はしき部分であるが,構成及び載荷の對稱なる場合にありては公式 M_{abc} 及び M_{acb} の適用が夫々直ちに未知量を提供するから計算が極めて平易になる。

ii. M_{ad}, M_{da} の算定

この場合は曲力率に關して矩形の３邊が既知なるとき他の１邊を見出すことであり，公式 M_{adcb} 及び M_{dabc} の排列より M_{ad} 及び M_{da} を次の形式として抽出すれば便利である。即ち公式 (9) よりは，

$$\left.\begin{aligned} M_{ad}&=\frac{1}{J_{ad}}\left\{2J(M_{ab}-M_{ba})+JM_{bc}+J(M_{dc}-M_{cd})-\frac{1}{3}\left(2r_{ba}+r_{cd}\right)\right\} \\ M_{da}&=\frac{1}{J_{ad}}\left\{2J(M_{dc}-M_{cd})+JM_{cb}+J(M_{ab}-M_{ba})-\frac{1}{3}\left(r_{ba}+2r_{cd}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

上式は水平格間荷重 P_{ba}, P_{cd} の存することを假定せる場合である。

iii. M_{am}, M_{dk} の算定

これに對しては簡單に曲力率平衡式 $\Sigma M_a=0$, $\Sigma M_d=0$ が直ちに解決を與へる。

斯くして計算が滿足されるが，然し解法の出發點なる最下端の曲力率に對してはこれを既知件を以て表はし得ないから，これを既知件の如く假定し其の直上に計算を及ぼす。即ちこの最下端曲力率はこの場合の暫定的の未知量であつて，これを**暫定未知量**と稱する。實計算に當つてはこれを荷重と同樣に取扱ふて未知量なる觀念なしに計算を進むれば考へ方が單純に行くであらう。而してこの暫定未知量の値は構造の計算終端に於て其の構成の環境條件よりこれを確定することが出來る。この場合には上記３種の解式の存在に對し１種の解式を**終結條件**として暫定未知量算定に利用し得ることを知る。

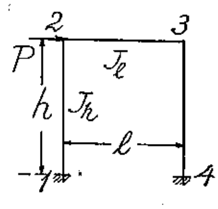
横方面に解法を進むる場合に於ても暫定未知量及び終結條件の性狀が異なり，計算の難易が存するとも計算の要領は全く同樣である。

簡單なる矩形構に於ては暫定未知量及び終結條件の指示を特に必要とせないことが多いのである。

5. 簡 單 な る 構 造 の 例 解

例解に引用せる構造各材の斷面形狀及び載荷狀態などに關しては特に記載するものを除き總て圖示し，又各構材の正負方向の標示は，既に明なる如く，單に相對變位條件 R を驅逐し或は格間荷重 P 其の他の符號を統制せんための理論的指示法に過ぎず，實際に當つてはこの方向指示を缺くとも連彈性公式適用の經路，格間載荷の方向規定及び他の規約に對し背馳するが如き虞なきが故にこれを省略することにする。

第 2 圖



例　解 1.

第２圖　固定支點の單矩形構を水平格點載荷に對して解くこと。

支點 1, 4 が彈性固定なるとき公式 M_{4123} の適用は $R=0$ なるが故に，

$$3J_hM_{12}-3J_hM_{21}+2J_lM_{23}-J_lM_{32}=0$$

格點 2 に對する曲力率平衡條件及び構造が彈性對稱軸を有する關係，

$M_{21}=-M_{23}=-M_{32}$ を上式に與へて，

$$3J_hM_{12}-3(J_h+J_l)M_{21}=0 \quad \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

水平層に關する剪力平衡式の適用は，

$$M_{12}+M_{21}+\frac{1}{2}Ph=0 \quad \cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

(i) 及び (ii) より，　$M_{12}=-\dfrac{3K+1}{6K+1}\cdot\dfrac{Ph}{2}$,　　$M_{21}=-\dfrac{3K}{6K+1}\cdot\dfrac{Ph}{2}$,　　但し　$K=\dfrac{J_h}{J}$

例　解 2.

第３圖，鉸支點を有する單矩形構の $J_h/J_l=1$ なるものに對して垂直載荷による各材端曲力率を求むること。

M_{1234}の適用，$0-2M_{21}+3M_{23}-3M_{32}+2M_{34}-0=-r_{23}$ に曲力率平衡條件 $M_{21}+M_{23}=0$ 及び $M_{32}+M_{34}=0$ を與へて，

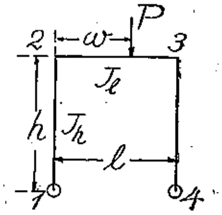
$$-5M_{21}+5M_{34}=-r_{23},\qquad 但し\quad r_{23}=\frac{3w(l-w)}{l}P\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

水平層に關する剪力平衡條件を適用して，

$$M_{21}+M_{34}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

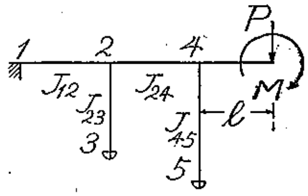
(i) に (ii) を代入して，　$M_{21}=\frac{1}{10}r_{23}=\frac{3}{10}\frac{w(l-w)}{l}P,\qquad M_{34}=-M_{21}$

第 3 圖



例　解　3.

第 4 圖



第 4 圖，Gerber 式架構に於ける脚支點の彈性廻轉係數が μ にて與へられ，各構材の剛曲係數 J の比が何れも 1 なる場合，吊構載荷の影響 M 並に P による各材端曲力率を算定すること。又脚支點が緊定或は鉸結ならば其の解答如何。

M_{12} を暫定未知量とする。

1)　$2M_{12}-M_{21}=0,\quad M_{21}=2M_{12}$ ……………(9) 式 M_{312} 適用

i)　$\begin{cases} M_{12}-2M_{21}+2M_{23}-M_{32}=0 \cdots\cdots\cdots〃\ M_{123}\ 〃 \\ M_{23}-(2+\mu_3)M_{32}=0,\quad 但し\quad \mu_3=\mu/J_{23}\cdots\cdots(10)\ 式\ M_{231}\ 〃 \end{cases}$

2)　$M_{23}=\lambda_3(2+\mu_3)(2M_{21}-M_{12})=\lambda_3\ (6+3\mu_3)M_{12},\quad 但し\quad \lambda_3=1/(3+2\mu_3)$ ……i), 1)　〃

3)　$M_{32}=M_{23}/(2+\mu_3)=3\lambda_3M_{12}$ ……i), 2)　〃

4)　$M_{24}=-(M_{21}+M_{23})=-\lambda_3(12+7\mu_3)M_{12}$ ……$\sum M_2=0$　〃

5)　$M_{12}-2M_{21}+2M_{24}-M_{42}=0,\quad M_{42}=-\lambda_3(33+20\mu_3)$ ……(9) 式 M_{124}　〃

ii)　$\begin{cases} M_{24}-2M_{42}+2M_{45}-M_{54}=0 \cdots\cdots(9)式\ M_{245}\ 〃 \\ M_{45}-(2+\mu_5)M_{54}=0,\quad 但し\quad \mu_5=\mu/J_{45}\cdots\cdots(10)式\ M_{453}\ 〃 \end{cases}$

6)　$M_{45}=\lambda_5(2+\mu_5)(2M_{42}-M_{24})=-\lambda_3\lambda_5(2+\mu_5)(54+33M_3)M_{12}$ 但し $\lambda_5=1/(3+2\mu_5)$ ..ii), 4), 5)　〃

7)　$M_{54}=M_{45}/(2+\mu_5)=-\lambda_3\lambda_5(54+33\mu_3)M_{12}$ ……ii),　6)　〃

終結條件として $\sum M_4=0$ を與ふれば，

$$M_{42}+M_{45}=M+Pl$$

8)　$-\lambda_3\lambda_5(207+126\mu_3+120\mu_5+73\mu_3\mu_5)M_{12}=M+Pl$ ……5),　6)　〃

依つて次の解答を得る。

	$M+Pl$		$M+Pl$
8)	$M_{12}=-\lambda/\lambda_3\lambda_5$,	1)	$M_{21}=-2(\lambda/\lambda_3\lambda_5)$
2)	$M_{23}=-(6+3\mu_3)(\lambda/\lambda_5)$,	3)	$M_{32}=-3(\lambda/\lambda_5)$
4)	$M_{24}=+(12+7\mu_3)(\lambda/\lambda_5)$,	5)	$M_{42}=+(33+20\mu_3)(\lambda/\lambda_5)$
6)	$M_{45}=+(54+33\mu_3)(2+\mu_5)\lambda$,	7)	$M_{54}=+(54+33\mu_3)\lambda$

但し　　$\lambda=1/(207+126\mu_3+120\mu_5+73\mu_3\mu_5)$

支　點　緊　定

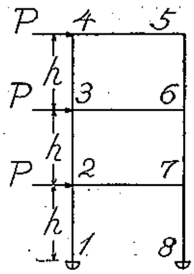
$\mu=0$　卽ち　$\mu_3=\mu_5=0$　の場合なるが故に　$M_{12}=-(1/23)(M+Pl)$,

$M_{21}=-(2/23)(M+Pl),\ldots\ldots M_{54}=+(6/23)(M+Pl)$ となるを知る。

支 點 鉸 結

$\mu=\infty$ 卽ち $\mu_3=\mu_5=\infty$ を與へて $M_{12}=-(4/73)(M+Pl)$, $M_{21}=-(8/73)(M+Pl)\dots\dots M_{54}=0$ を得。

第 5 圖



例 解 4.

第 5 圖, 3 層架構の水平格點荷重による構材曲力率を支點の彈性廻轉係數が μ, 各構材の剛曲係數 J の比が何れも 1 なる場合に就て計算し, 且支點が緊定或は鉸結なるときに對して吟味すること。

本例に於ては上方より下方に解き, M_{43} を暫定未知量に假定すれば便利である。

1) $M_{34}+M_{43}+\frac{1}{2}Ph$, $M_{34}=-M_{43}-\frac{1}{2}Ph$ ……………… 剪力式適用

$M_{48}=-M_{43}$, $M_{48}=M_{34}$, $M_{37}=M_{73}$ を記憶して

2) $M_{73}-2M_{37}+3M_{34}-3M_{43}+2M_{48}-M_{84}=0$, $M_{37}=-7M_{43}-\frac{3}{2}Ph$ ……… M_{7348} 〃

3) $M_{32}=-(M_{34}+M_{37})=8M_{43}+2Ph$ ……………… $\sum M_3=0$ 〃

4) $M_{23}+M_{32}+Ph=0$, $M_{23}=-8M_{43}-3Ph$ ……………… 剪 力 式 〃

5) $M_{62}-2M_{26}+3M_{23}-3M_{32}+2M_{37}-M_{73}=0$, $M_{26}=-55M_{43}-16.5Ph$ ……… M_{2637} 〃

6) $M_{21}=-(M_{23}+M_{26})=63M_{43}-19.5\,Ph$ ……………… $\sum M_2=0$ 〃

7) $M_{12}+M_{21}=1.5\,Ph$, $M_{12}=-63M_{43}-21Ph$ ……………… 剪 力 式 〃

終結條件として (10) 式 M_{5126} を適用すれば,

8) $(3+\mu_1)M_{12}-3M_{21}+2M_{26}-M_{62}=0$, $(433-63\mu_1)M_{43}+136.5-21\mu_1)Ph=0$, 但し $\mu_1=\mu/J_{12}$

依つて上の各計算式より

8) $M_{43}=-\lambda_1(136.5-21\mu_1)Ph$, 但し $\lambda_1=1/(433-63\mu_1)$

1) $M_{34}=-\lambda_1(80-10.5\mu_1)\,Ph$ 2) $M_{37}=+\lambda_1(306-52.5\mu_1)Ph$

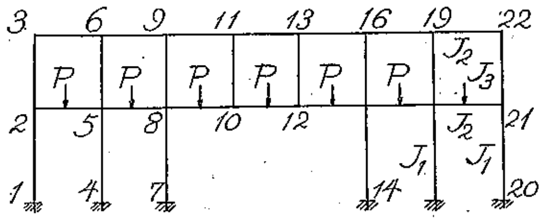
3) $M_{32}=-\lambda_1(226-42\mu_1)Ph$ 4) $M_{23}=-\lambda_1(207-21\mu_1)Ph$

5) $M_{26}=+\lambda_1(363-115.5\mu_1)Ph$ 6) $M_{21}=-\lambda_1(156-94.5\mu_1)Ph$

7) $M_{12}=-\lambda_1(493.5)Ph$

これらに $\mu=0$ 或は $\mu=\infty$ を代置して得る結果は夫々支點緊定或は鉸結の場合の解答なることは前例解と同様である。

第 6 圖



例 解 5.

第 6 圖の如き中空式架構の第 2 層各格間に中心荷重 P を有するとき各構材の剛曲係數 J の比を 1 として其の各曲力率を算定すること。但し脚支點は總て彈性固定なりとす。

構造の中央 3 格間を除く各側の 2 格間には彈性變位の起らざるを知り M_{12} 及び M_{23} を暫定未知量に選ぶ。

1) $M_{21}=2M_{12}$ M_{214} 適用

2) $M_{32}=2M_{32}-2M_{21}+M_{12}=-3M_{12}+2M_{23}$ M_{321}

3) $M_{25}=-(M_{21}+M_{23})=-2M_{12}-M_{23}$ $\sum M_2=0$

4) $M_{36}=-M_{32}=3M_{12}-2M_{23}$ $\sum M_3=0$

5) $M_{52}=2M_{25}-2M_{21}+M_{12}+q=-7M_{12}-2M_{23}+q$ M_{521}

但し $q=3/8\,Pl$ (以下 M_{12}, M_{23}, q を省略して書く)

		M_{12}	M_{23}	q	
6)	$M_{63}=2M_{36}-2M_{32}+M_{23}$	$=12$	-7	0	M_{632}
7)	$M_{45}=M_{12}+(M_{52}-M_{25})-r/3$	$=-4$	-1	$1/3$	(11)式
	但し $r=2q=3/4Pl$				
8)	$M_{54}=2M_{45}$	$=-8$	-2	$2/3$	M_{541}
9)	$M_{56}=2(M_{52}-M_{25})+M_{23}+(M_{63}-M_{36})-2r/3$	$=-1$	-6	$2/3$	(11)式
10)	$M_{65}=2(M_{63}-M_{36})+M_{32}+(M_{52}-M_{25})-r/3$	$=10$	-9	$1/3$	(11)式
11)	$M_{58}=-(M_{54}+M_{52}+M_{56})$	$=16$	10	$-7/3$	$\sum M_5=0$
12)	$M_{69}=-(M_{65}+M_{63})$	$=-22$	16	$-1/3$	$\sum M_6=0$
13)	$M_{85}=2M_{58}-2M_{52}+M_{25}+2q$	$=44$	23	$-14/3$	M_{853}
14)	$M_{96}=2M_{69}-2M_{63}+M_{36}$	$=-65$	44	$-2/3$	M_{963}
15)	$M_{78}=M_{45}+(M_{85}-M_{58})-r/3$	$=24$	12	$-8/3$	(11)式
16)	$M_{87}=2M_{78}$	$=48$	24	$-16/3$	M_{874}
17)	$M_{89}=2(M_{85}-M_{58})+M_{56}+(M_{96}-M_{69})-2r/3$	$=12$	48	$-17/3$	(11)式
18)	$M_{98}=2(M_{96}-M_{69})+M_{65}+(M_{85}-M_{58})-r/3$	$=-48$	60	$-10/3$	〃
19)	$M_{810}=-(M_{87}+M_{85}+M_{89})$	$=-104$	-95	$47/3$	$\sum M_8=0$
20)	$M_{911}=-(M_{98}-M_{96})$	$=113$	-104	$12/3$	$\sum M_9=0$

$$\begin{cases} M_{119}-2M_{911}+3M_{98}-3M_{89}+2M_{810}-M_{108}+q=0 & M_{119310} \\ M_{119}+M_{911}+M_{108}+M_{810}+Pl=0, \quad \text{但し} \quad Pl=8q/3 & \text{剪力式} \end{cases}$$

21)	$M_{119}=1/2M_{911}+3/2(-M_{98}+M_{89}-M_{810})-11q/6$	$=605/2$	$145/2$	$-161/6$	
22)	$M_{108}=1/2M_{810}+3/2(-M_{89}+M_{98}-M_{911})-5q/6$	$=-623/2$	$253/2$	$27/6$	
23)	$M_{1011}=2(M_{108}-M_{810})+M_{89}+(M_{119}-M_{911})-2r/3$	$=-427/2$	$1\,335/2$	$-361/6$	(11)式
24)	$M_{1110}=2(M_{119}-M_{911})+M_{98}+(M_{108}-M_{810})-r/3$	$=247/2$	$1\,269/2$	$-461/6$	〃
25)	$M_{1012}=-(M_{108}+M_{1011})$	$=1\,050/2$	$-1\,588/2$	$334/6$	$\sum M_{10}=0$
26)	$M_{1113}=-(M_{119}+M_{1110})$	$=-852/2$	$-1\,414/2$	$622/6$	$\sum M_{11}=0$

對稱軸に關して相對する彈性變位が等しく，又曲力率の絕對値が等しく正負相反することより終結條件として M_{101113} 及び M_{111012} を適用すれば，

$$\begin{cases} M_{1011}-2M_{1110}+3M_{1113}=0 \\ M_{1110}-2M_{1011}+3M_{1012}=-q \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\,477M_{12}+5\,445M_{23}=809q \\ 4\,251M_{12}-6\,165M_{23}=-423q \end{cases}$$

27) $M_{12}=0.06021q$ 28) $M_{23}=0.11013q$

この値を代入して，

	$q\ (=3/8Pl)$		q		q		q
1)	$M_{21}=+0.12$	2)	$M_{32}=+0.04$	3)	$M_{25}=-0.23$	4)	$M_{36}=-0.04$
5)	$M_{52}=+0.358$	6)	$M_{63}=-0.058$	7)	$M_{45}=-0.018$	8)	$M_{54}=-0.035$
9)	$M_{56}=-0.054$	10)	$M_{65}=-0.056$	11)	$M_{58}=-0.269$	12)	$M_{69}=+0.104$

13) $M_{85}=+0.405$ 14) $M_{96}=+0.265$ 15) $M_{78}=+0.10$ 16) $M_{87}=+0.20$

17) $M_{89}=-0.458$ 18) $M_{98}=+0.385$ 19) $M_{810}=-1.057$ 20) $M_{911}=-0.65$

21) $M_{119}=-0.636$ 22) $M_{103}=-0.324$ 23) $M_{1011}=+0.49$ 24) $M_{1110}=+0.48$

25) $M_{1012}=-0.166$ 26) $M_{1113}=+0.156$