

論 說 報 告

第 20 卷 第 11 號 昭和 9 年 11 月

長柱の挫屈と之に及ぼす弾性横抵抗の影響 竝に鐵道軌道の張出に關する新考察

會員 工學博士 稻 田 隆*

Theory of Buckling of Column, as applied to the Buckling of
Railway Track considered as a Long Fixed Column
elastically resisted by Ballast

By Takashi Inada, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

第 1 章に於ては長柱公式の一般的誘導法を示し、之によつて Euler 公式を誘導したる結果固定長柱の挫屈形には Euler の與ふる様式の外更にそれとは異りたる他の様式の存在することを明らかにした。

第 2 章に於ては弾性横抵抗を受くる固定長柱の挫屈に就て論じ、この場合には無數に多くの挫屈形あること、竝に柱の長さは如何に大となるも或る一定限度の軸壓力以下に於ては柱は最早挫屈しないこと等を明らかにした。

第 3 章に於ては近時長軌條の使用や軌條繼目の銲接が盛んに行はるゝに至つて以來急迫せる研究問題の一となつて居る暴熱による軌道の張出に就て述べた。即ち Euler の長柱公式に出發する從來の研究方法を以つてしては到底説明不可能であつた軌道挫屈の種々の形を第 2 章理論の應用によつて容易に説明し、且つ軌道の挫屈を起さないために必要なる横抵抗の大き及び與へられたる横抵抗に對して軌道の張出が起らないための長軌條の長さの限度等を明らかにした。

第 1 章 長柱公式の一般的誘導法

第 1 節 一般性を缺く從來の誘導法

從來 Euler の長柱公式は桁の彎曲に關する 2 次微分方程式から導かれて居る。元來桁の微分方程式には 2 次、3 次、4 次の 3 種があつて、その内 4 次のものが最も一般的である。故に一般的には 4 次微分方程式を用ふべきであるが、たゞ 2 次、4 次何れの微分方程式を用ふるも同一結果に到達する場合には一便法として 2 次微分方程式を用ふる方が簡易である。普通の桁の場合は即ちこれに屬するのであるが、長柱公式の誘導に於ては之がために一般性を失ふの結果となることがある。

第 2 節 4 次微分方程式より長柱公式の誘導

長柱が軸壓力 P を受けて挫屈する場合の 4 次微分方程式は、一般慣用の記號を用ひて、次の通りである。

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0^{**} \dots \dots \dots (1)$$

* 九州帝國大學教授

** K. Hayashi; Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, 1921, S. 35 の (61) 式に於て $-H=P$, $K=0$, $q=0$ と置いたものである。

4 次微分方程式 (1) の解は

$$y = A \cos mx + B \sin mx + Cx + D \left. \begin{array}{l} \\ \text{但し } m = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

この解を用ひて Euler の長柱公式を誘導すれば次の通りである。

I. 両端に鉸ある柱

長さ l なる柱の両端に鉸ある場合の端條件は

$$\left. \begin{array}{ll} x=0 \text{ に於て } y=0 & \therefore A+D=0 \\ & \frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \therefore A=0 \\ x=l \text{ に於て } y=0 & \therefore A \cos ml + B \sin ml + Cl + D = 0 \\ & \frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \therefore A \cos ml + B \sin ml = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

(3) は未知數 A, B, C, D に関する聯立 4 元 1 次同次方程式である。この方程式の一つの根 $A=B=C=D=0$ の場合には $y=0$ となり柱は挫屈しないことになる。故に柱の挫屈が起るためには A, B, C, D の内少くとも何れか一つが零ならざることが必要である。そのためには

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos ml & \sin ml & l & 1 \\ \cos ml & \sin ml & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

でなければならない。これが柱の挫屈を起すに必要な條件で、これより

$$\sin ml = 0 \quad \therefore ml = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\dots\dots(4)$$

然るに (2) より $P = m^2 EJ$ なる故

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \dots\dots\dots(5)$$

次に (3), (4) より $A=C=D=0$ なることが分る故 (2) は簡單となる。即ち

$$y = B \sin mx \quad \dots\dots\dots(6)$$

故にこの場合の挫屈形は正弦曲線となり、Euler 公式と同一である。

II. 一端が固定され他端に鉸ある柱

この場合の端條件は

$$\left. \begin{array}{ll} x=0 \text{ に於て } y=0 & \therefore A+D=0 \\ & \frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore Bm+C=0 \\ x=l \text{ に於て } y=0 & \therefore A \cos ml + B \sin ml + Cl + D = 0 \\ & \frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \therefore A \cos ml + B \sin ml = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

故に柱の挫屈が起る條件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ \cos ml & \sin ml & l & 1 \\ \cos ml & \sin ml & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\tan ml = ml \quad \therefore ml = 4.4934, 7.7253, \dots \quad (8)$$

故に $P = m^2 EJ$ より

$$P = \frac{20.19 EJ}{l^2}, \frac{59.68 EJ}{l^2}, \dots \quad (9)$$

次に (7) 及び (8) より

$$D = -A, \quad C = -Bm, \quad \frac{A}{B} = -\tan ml = -ml$$

を得、これらの値を (2) に代入して

$$y = B \{ ml(1 - \cos mx) + \sin mx - mx \} \quad (10)$$

この式に於て $ml = 4.4934, 7.7253$ とおけば夫々第 1 圖 (a) (b) の挫屈形が得られる。又 (10) より

$$\frac{dy}{dx} = Bm(ml \sin mx + \cos mx - 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Bm^2(ml \cos mx - \sin mx)$$

であるから、 $dy/dx = 0, d^2y/dx^2 = 0$ となる位置は次の式によつて與へられる。

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{に對しては} \quad \sin \frac{mx}{2} \left(ml \cos \frac{mx}{2} - \sin \frac{mx}{2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{に對しては} \quad \tan mx = ml = \tan ml \quad (12)$$

(11) を満足する x の値は

$$(i) \quad \sin \frac{mx}{2} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{mx}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$$(ii) \quad \tan \frac{mx}{2} = ml = \tan ml \quad \text{より} \quad \frac{mx}{2} = ml, ml \pm \pi, ml \pm 2\pi, \dots$$

これを書きかへて

$$(i) \quad x = 0, \frac{2\pi}{ml}l, \frac{4\pi}{ml}l, \dots$$

$$(ii) \quad x = 2l, 2l \left(1 \pm \frac{\pi}{ml} \right), 2l \left(1 \pm \frac{2\pi}{ml} \right), \dots$$

故に $dy/dx = 0$ の位置は

$$ml = 4.4934 \quad \text{の場合には} \quad x = 0, x = 0.6l$$

$$ml = 7.7253 \quad \text{の場合には} \quad x = 0, x = 0.37l, x = 0.81l$$

次に (12) を満足する x の値は

$$mx = ml, ml \pm \pi, ml \pm 2\pi, \dots$$

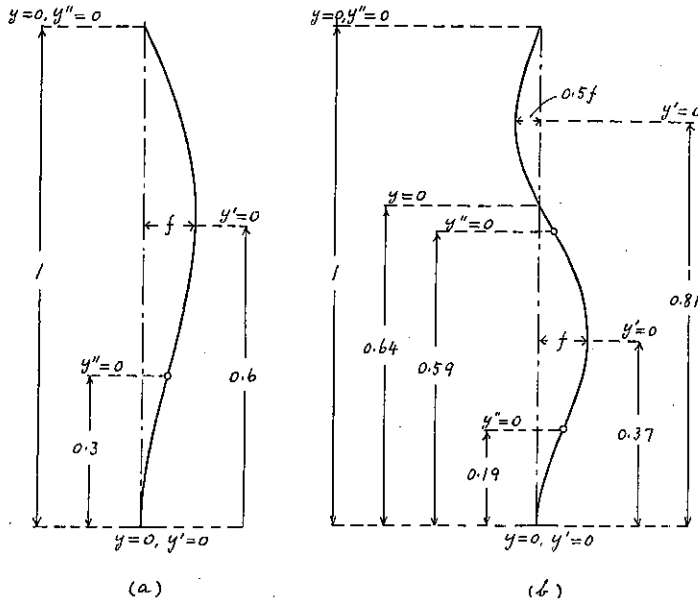
或は $x=l, l\left(1\pm\frac{\pi}{ml}\right), l\left(1\pm\frac{2\pi}{ml}\right), \dots\dots$

故に $d^2y/ds^2=0$ の位置は

$ml=4.4934$ の場合には $x=0.3l, x=l$

$ml=7.7253$ の場合には $x=0.19l, x=0.59l, x=l$

第 1 圖



III. 兩端が固定さるる柱

この場合の端條件は

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ に於て } y=0 & \therefore A+D=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 & \therefore Bm+C=0 \\ x=l \text{ に於て } y=0 & \therefore A \cos ml+B \sin ml+Cl+D=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 & \therefore -Am \sin ml+Bm \cos ml+C=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

故に挫屈の起る條件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ \cos ml & \sin ml & l & 1 \\ -m \sin ml & m \cos ml & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\left. \begin{aligned} 1 - \cos ml - \frac{ml}{2} \sin ml = 0 \\ \text{これを書きかへて} \\ \sin \frac{ml}{2} \left(\sin \frac{ml}{2} - \frac{ml}{2} \cos \frac{ml}{2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

故に挫屈を起す條件は結局次の二つの場合に満足される。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \sin \frac{ml}{2} = 0 \quad \therefore \frac{ml}{2} = \pi, 2\pi, \dots \\
 \text{(ii)} \quad \tan \frac{ml}{2} = \frac{ml}{2} \quad \therefore \frac{ml}{2} = 4.4934, 7.7253, \dots
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

而して $P = m^2 EJ$ なる故

$$\text{(i) の場合には} \quad P = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \frac{16\pi^2 EJ}{l^2}, \dots, \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{(ii) の場合には} \quad P = \frac{80.76 EJ}{l^2}, \frac{238.72 EJ}{l^2}, \dots, \dots\dots\dots(17)$$

(16) は Euler 公式として一般に知らるゝもの、(17) はこゝに初めて導かれたもの、即ち固定長柱の挫屈には Euler の様式の外 (17) に相當する他の様式の存在することを知る。

(13) 及び (14) より

$$D = -A, \quad C = -Bm, \quad \frac{A}{B} = \frac{\cos ml - 1}{\sin ml} = -\frac{ml}{2}$$

故に (2) は次の形となる。

$$y = B \left\{ \frac{ml}{2} (1 - \cos mx) + \sin mx - mx \right\} \dots\dots\dots(18)$$

(18) は (10) 中の l を $l/2$ にておきかへた形である。これより挫屈形を求むれば

$$\text{(i) } \frac{ml}{2} = \pi \quad \text{即ち} \quad P = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{の場合には 第 2 圖 (a)}$$

$$\text{(ii) } \frac{ml}{2} = 2\pi \quad \text{即ち} \quad P = \frac{16\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{の場合には 第 2 圖 (b)}$$

が得られ、又

$$\text{(iii) } \frac{ml}{2} = 4.4934 \quad \text{即ち} \quad P = \frac{80.76 EJ}{l^2} \quad \text{の場合には 第 2 圖 (c)}$$

$$\text{(iv) } \frac{ml}{2} = 7.7253 \quad \text{即ち} \quad P = \frac{238.72 EJ}{l^2} \quad \text{の場合には 第 2 圖 (d)}$$

が得られる。

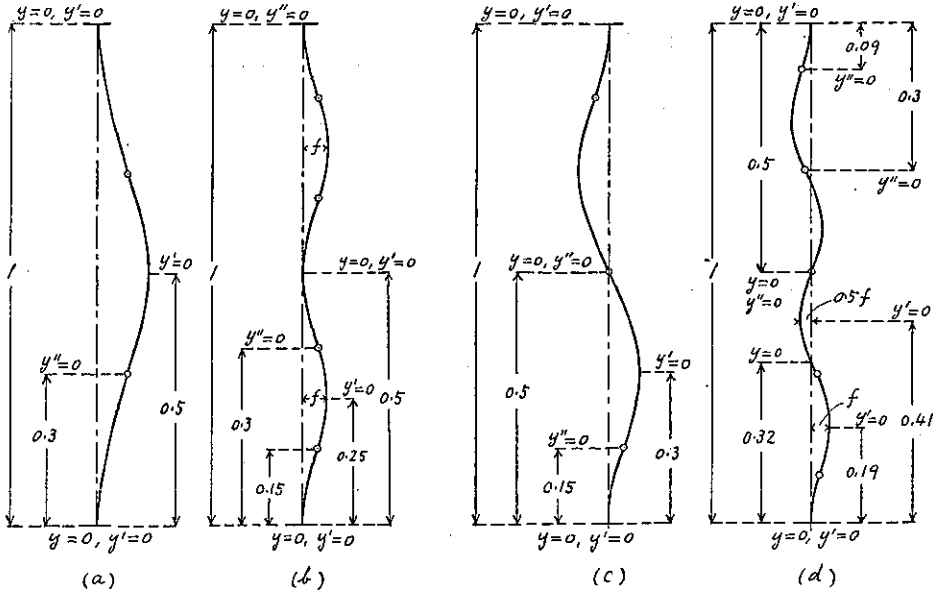
而して第 2 圖を觀察することにより、直に、固定長柱の挫屈形には判然たる區別を有する 2 種の様式あることを知る。即ち同圖 (a), (b) に於ける如く柱の兩端の彎曲方向相等しきもの及び (c), (d) に於ける如く之が相反するもの 2 種である。こゝには前者を第 1 様式、後者を第 2 様式と名づける。

かくの如く相異なる 2 様式の挫屈形が同時に誘導せられたのは全く 4 次微分方程式の一般性に基くものである。従つて従來用ひられたる 2 次微分方程式

$$-EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M = Py - M_0 \dots\dots\dots(19)$$

を見るに、 $y=0$ に對しては曲げモーメント M は常に $-M_0$ である。即ち立式の當初に於て既に $y=0$ なる柱の兩端の彎曲方向が一定方向に限られ、無言の裡に第 1 様式が約束されてゐたのである。

第 2 圖

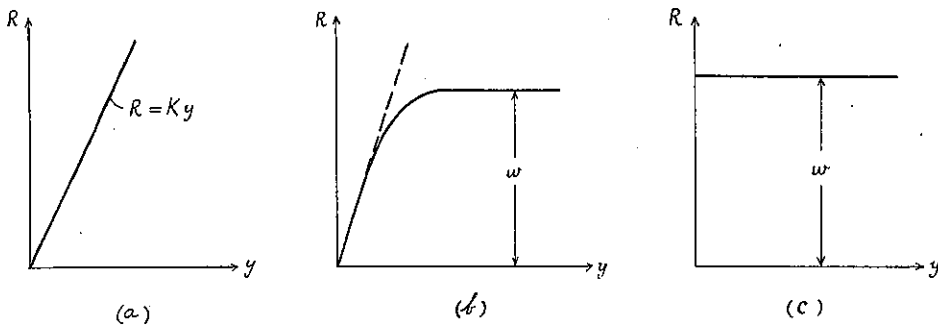


第 2 章 固定長柱の挫屈に及ぼす弾性横抵抗の影響

第 1 節 長柱の挫屈と横抵抗

長柱の挫屈を起すべき危険荷重の大きさは柱の長さの 2 乗に逆比例する。従つて長柱が非常に長い場合には極僅かの軸壓力が加へられても挫屈が起る筈である。今こゝに非常に長い鐵道線路を想像し、その軌條が悉く銲接してあつたとすれば、軌條の長さは如何程でも大と考へることが出来るから、極端に云へば、温度が僅か 1°C 上つてもそれから、惹き起さるゝ軸壓力のために軌條は挫屈しなければならないこととなる。然るに常識的には僅かそれ位の方で軌條が挫屈するとは考へられない。これは恐らく道床が抵抗を與へて軌條の挫屈を防止して居るからであらう。この様な問題は橋梁や建築や飛行機などの構造にも屢起ることと思はれ、相當重要な研究價值あるものと思はるゝが、從來これに関する研究としては、著者の知る範圍に於ては、僅かに Zimmermann* あるのみである。

第 3 圖



* H. Zimmermann; Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1906, S. 251-255.

次にかくの如き横抵抗の性質については種々のものが考へられる。例へば第 3 圖 (a) に示す如く抵抗 R が挫屈による柱の撓み y に比例するもの、又 (c) の如く挫屈が起ると共に急激に一定値 w に達するもの及びこの 2 者の中間に位する (b) の如きもの等である。これ等の中 (a) が最も數學的取扱に容易である。本章に於て論ずる弾性横抵抗とはこの (a) 型の抵抗を指すのである。

第 2 節 微分方程式及びその解

長柱が軸壓力 P を受けて挫屈せんとするに對し Ky なる弾性横抵抗が作用する場合には次の微分方程式が成立する。

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{K}{EJ} y = 0 \dots\dots\dots (20)$$

今簡單のために

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{4KEJ}{P^2}, & \mu &= \sqrt[4]{\frac{K}{EJ}}, & \xi &= \frac{x}{l}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}}, & \gamma &= \sqrt{\frac{n+1}{2n}}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}}, & \delta &= \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

とすれば、微分方程式 (20) の解は次の通りである。

(i) $n^2 < 1$ の場合

$$y = A \cos \alpha\mu\xi + B \sin \alpha\mu\xi + C \cos \beta\mu\xi + D \sin \beta\mu\xi \dots\dots\dots (22)$$

(ii) $n^2 = 1$ の場合

$$y = \cos \mu\xi(A + B\xi) + \sin \mu\xi(C + D\xi) \dots\dots\dots (23)$$

(iii) $n^2 > 1$ の場合

$$y = \cos \gamma\mu\xi(Ae^{\delta\mu\xi} + Be^{-\delta\mu\xi}) + \sin \gamma\mu\xi(Ce^{\delta\mu\xi} + De^{-\delta\mu\xi}) \dots\dots\dots (24)$$

第 3 節 固定長柱の挫屈條件

(i) $n^2 < 1$ の場合

固定長柱の端條件は

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{ に於て } y=0 & \therefore A+C=0 \\ \frac{dy}{d\xi}=0 & \therefore B\alpha+D\beta=0 \\ \xi=1 \text{ に於て } y=0 & \therefore A \cos \alpha\mu + B \sin \alpha\mu + C \cos \beta\mu + D \sin \beta\mu = 0 \\ \frac{dy}{d\xi}=0 & \therefore -A\alpha \sin \alpha\mu + B\alpha \cos \alpha\mu - C\beta \sin \beta\mu + D\beta \cos \beta\mu = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

故に挫屈の起る條件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \cos \alpha\mu & \sin \alpha\mu & \cos \beta\mu & \sin \beta\mu \\ -\alpha \sin \alpha\mu & \alpha \cos \alpha\mu & -\beta \sin \beta\mu & \beta \cos \beta\mu \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\frac{\sin \alpha \mu \sin \beta \mu}{1 - \cos \alpha \mu \cos \beta \mu} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

或は α, β を n にて表はせば

$$\frac{\sin \mu \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}} \sin \mu \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}}}{1 - \cos \mu \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}} \cos \mu \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}}} = n \quad \dots (26)$$

即ち n, μ の値が (26) の關係を満足する場合に挫屈が起る。而してかくの如き n, μ の値が決定されるれば柱が挫屈する時の軸壓力 P と挫屈長 l とは (21) より夫々

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{2}{n} \sqrt{KEJ} = \frac{I}{n} \Phi \\ l &= \mu \sqrt{\frac{EJ}{K}} = \mu l \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

によつて與へられる。こゝに $\Phi = 2\sqrt{KEJ}$ は力の單位を示し $l = \sqrt{EJ/K}$ は長さの單位である。又 (26) を満足する n, μ は何れも常數であつて、これによつて挫屈を起すべき荷重及びそれによつて挫屈する柱の長さが決定せられる。故に

n を挫屈荷重係數、
 μ を挫屈長係數

と名づけ又

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\sqrt{KEJ} \quad \text{を挫屈基本荷重} \\ I &= \sqrt{\frac{EJ}{K}} \quad \text{を挫屈基本長} \end{aligned}$$

と名づけることとする。

次に (25) の第 1, 第 2 式より $C = -A, D = -(\alpha/\beta)B$ であるから (22) 式は次の形となる。

$$y = B \left\{ \lambda (\cos \alpha \mu \xi - \cos \beta \mu \xi) + \sin \alpha \mu \xi - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \mu \xi \right\}$$

但し $\lambda = \frac{A}{B} = \frac{\alpha \sin \beta \mu - \beta \sin \alpha \mu}{\beta (\cos \alpha \mu - \cos \beta \mu)}$ } \dots (28)

この式中 λ の値は (25) の第 3 式より得らるゝものである。

(28) より柱の挫屈形は決定せらるゝのであるが、尙 $y=0, dy/d\xi=0, d^2y/d\xi^2=0$ の位置を求めれば

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ の位置は } & \frac{\alpha \sin \beta \mu \xi - \beta \sin \alpha \mu \xi}{\beta (\cos \alpha \mu \xi - \cos \beta \mu \xi)} = \lambda \\ \frac{dy}{d\xi}=0 \text{ の位置は } & \frac{\alpha (\cos \alpha \mu \xi - \cos \beta \mu \xi)}{\alpha \sin \alpha \mu \xi - \beta \sin \beta \mu \xi} = \lambda \\ \frac{d^2y}{d\xi^2}=0 \text{ の位置は } & \frac{\alpha^2 \sin \alpha \mu \xi - \alpha \beta \sin \beta \mu \xi}{\alpha^2 \cos \alpha \mu \xi - \beta^2 \cos \beta \mu \xi} = -\lambda \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

を満足する ξ によつて與へられる。

特別の場合として $K=0$ とおけば横抵抗なき普通の長柱公式が得られる筈である。即ち先づ (21) より

$$\alpha \mu = l \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}} \sqrt{\frac{K}{EJ}} = l \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}} \sqrt{\frac{nP}{2EJ}} = ml \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{2}}$$

$$\beta\mu = ml\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}}, \quad (\text{但し } m = \sqrt{\frac{P}{EJ}})$$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = n$$

なる故、挫屈條件 (26) は次の形となる。

$$\frac{\sin ml\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{2}}}{1 - \cos ml\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{2}}} \cos ml\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{2}} = \frac{n}{\sin ml\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{2}}}$$

この式に於て $K=0$ 即ち $n=0$ とおけば

$$\frac{\sin ml}{1 - \cos ml} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{\sin ml\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}}} = \frac{1}{\frac{ml}{2}}$$

となり前章の (14) と同一の條件となる。

(ii) $n^2=1$ の場合

この時の固定長柱の挫屈條件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ \cos \mu & \cos \mu & \sin \mu & \sin \mu \\ -\mu \cos \mu & \cos \mu - \mu \sin \mu & \mu \sin \mu & \sin \mu + \mu \cos \mu \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\sin \mu = \pm \mu \quad \therefore \mu = 0 \dots \dots \dots (30)$$

即ち挫屈長係数 $\mu=0$ なる故挫屈長もまた消滅して柱は挫屈しないことを意味する。

故に $n^2=1$ 即ち $P=2\sqrt{KEJ}=\pi$ の場合には柱の挫屈は起らない。

(iii) $n^2>1$ の場合

この場合の固定長柱の端條件より挫屈條件を求めれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \delta & -\delta & \gamma & \gamma \\ e^{\delta\mu} \cos \gamma\mu & e^{-\delta\mu} \cos \gamma\mu & e^{\delta\mu} \sin \gamma\mu & e^{-\delta\mu} \sin \gamma\mu \\ e^{\delta\mu}(-\gamma \sin \gamma\mu + \delta \cos \gamma\mu) & -e^{-\delta\mu}(\gamma \sin \gamma\mu + \delta \cos \gamma\mu) & e^{\delta\mu}(\gamma \cos \gamma\mu + \delta \sin \gamma\mu) & e^{-\delta\mu}(\gamma \cos \gamma\mu - \delta \sin \gamma\mu) \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\frac{\sin \gamma\mu}{\sin \delta\mu} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{或は} \quad \frac{\sin \mu\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}{\sin \mu\sqrt{\frac{n-1}{2n}}} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \dots \dots \dots (31)$$

(31) を満足する μ の値は $\mu=0$ のみである。故に $n^2>1$ の場合即ち $P<2\sqrt{KEJ}=\pi$ の場合には柱は挫屈しない。

以上 (i) (ii) (iii) の場合を要約すれば

$n^2 < 1$ 即ち $P > 2\sqrt{KEJ} = \Phi$ の場合は挫屈す。

$n^2 \geq 1$ // $P \leq 2\sqrt{KEJ} = \Phi$ の場合は挫屈せず。

換言すれば、軸壓力が挫屈基本荷重 Φ を超過する時初めて挫屈が起り、これより小なる時は最早挫屈は起らない。故に挫屈基本荷重 Φ は柱の挫屈を起すか否かの限界を示す一つの限界荷重であるが、最早柱の長さには關係なく柱の強さ EJ と横抵抗の強さ K のみによつて決定されるのである。

第 4 節 柱の挫屈形

上述の如く長柱の挫屈が起るためには $n < 1$ 即ち軸壓力 P が挫屈基本荷重 $\Phi = 2\sqrt{KEJ}$ を超過すると共に挫屈荷重係數 n と挫屈長係數 μ とは挫屈條件 (26) を満足しなければならない。而して (26) を満足する n, μ の關係を求むるには次の方法によるを便とする。即ち先づ n に 0~1 の或る値を與へたる後 μ の種々の値に對して

$$z = \frac{\sin \mu \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}} \sin \mu \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}}}{1 - \cos \mu \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}} \cos \mu \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}}}$$

を計算し、次に圖式的に $z-\mu$ 曲線と $z=n$ なる直線との交點を求むれば、その交點の μ の値と與へたる n の値とが (26) を満足するのである。かくの如き μ の値は 1 個の n に對して無數に多く存在する。その小なるものより順次に $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ を以つて表はせば、 μ_1, μ_2 の値は第 1 表の通りである。

n	μ_1	μ_2	n	μ_1	μ_2	n	μ_1	μ_2
0.1	1.41	2.01	0.6	5.44	5.44	0.882	12.17	12.17
0.2	2.02	2.86	0.65	5.80	6.99	0.9	12.80	14.20
0.3	2.53	3.55	0.7	6.26	7.59	0.923	15.39	15.39
0.4	3.03	4.17	0.75	6.85	8.20	0.945	18.59	18.59
0.5	3.61	4.78	0.8	8.89	8.89	0.96	21.77	21.77
0.55	4.04	5.10	0.85	9.86	11.24	0.969	24.94	24.94

$n < 0.6$ に於ては $z-\mu$ 曲線の第 1 の波頂は $z=n$ 直線より高く、從つて μ_1, μ_2 は夫々第 1 の波の左側と右側とに於ける交點によつて得られる。然るに $0.6 < n < 0.8$ の範圍に於ては、 $z-\mu$ 曲線の第 1 波頂は $z=n$ 直線の下に没して之と交はらず、 μ_1, μ_2 は第 2 の波の左右兩側に於ける交點によつて與へられる。更に $0.8 < n < 0.882$ の範圍に於ては $z-\mu$ 曲線の第 1 及び第 2 の波頂が何れも $z=n$ 直線の下に没し、 μ_1, μ_2 は第 3 の波に於て得られる。以下同様にして例へば $0.923 < n < 0.945$ の範圍に於ては μ_1, μ_2 は第 5 の波に於て得られる。

次に $n=0.6$ に於ては $z-\mu$ 曲線の第 1, 第 2, 第 3 ... 等總べての波頂が直線 $z=n$ に接し、從つて $\mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4, \dots$ となる。又 $n=0.8$ に於ては第 1, 第 3, 第 5, ... の波頂は直線 $z=n$ の下に没し、第 2, 第 4, 第 6, ... の波頂が之に接することとなる。故に $n=0.8$ に於ても $\mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4, \dots$ となる。同様に $n=0.882, n=0.923, n=0.945, \dots$ に對しても $\mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4, \dots$ となる。かくの如き特別の n の値は第 2 表に示す如く α, β が特別の比をなす場合に起り、この比より容易に知ることが出来る。

n	α/β	$\alpha\mu$	$\beta\mu$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_3 = \mu_4$
0.6 (3/5)	3/1	3π	π	$\pi\sqrt{3}$	$2\pi\sqrt{3}$
0.8 (8/10)	4/2	4π	2π	$\pi\sqrt{8}$	$2\pi\sqrt{8}$
0.882 (15/17)	5/3	5π	3π	$\pi\sqrt{15}$	$2\pi\sqrt{15}$

0.923 (24/26)	6/4	6π	4π	π√24	2π√24
0.945 (35/37)	7/5	7π	5π	π√35	2π√35
.....

この特別の n の値に對しては (28), (29) 式中 $\lambda=0$ となる故

$$y = B \left(\sin \alpha \mu \xi - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \mu \xi \right) \dots \dots \dots (32)$$

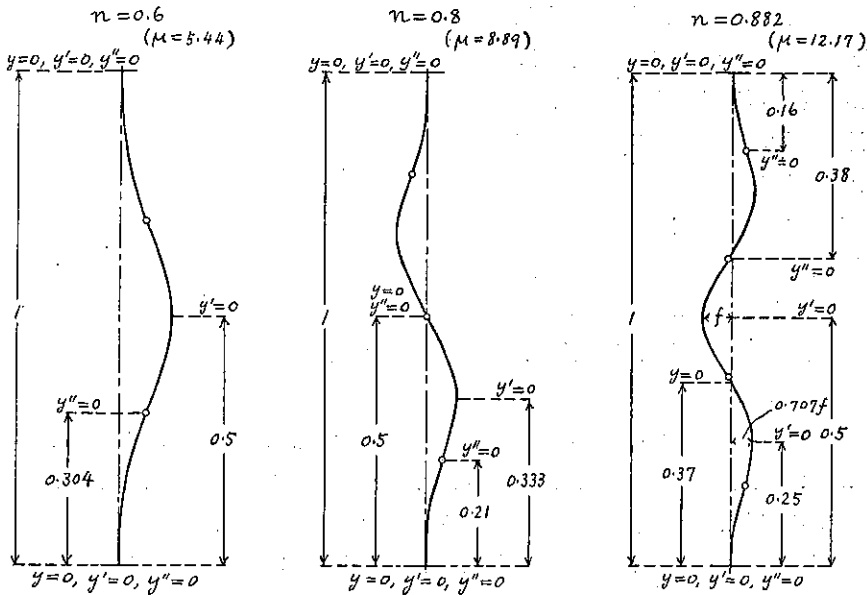
従つて $y=0, dy/d\xi=0, d^2y/d\xi^2=0$ の位置は夫々

$$\left. \begin{aligned} \beta \sin \alpha \mu \xi &= \alpha \sin \beta \mu \xi \\ \cos \alpha \mu \xi &= \cos \beta \mu \xi \\ \alpha \sin \alpha \mu \xi &= \beta \sin \beta \mu \xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

によつて決定することが出来る。(32) (33) を用ひて算定したる挫屈形は第 4 圖の通りである。

第 1 表より n と μ との一般的關係を圖示したものが第 5 圖である。第 5 圖より任意の n の値に對する μ_1, μ_2 の値を圖式的に求め、それ等の値を (28), (29) に用ふれば、種々の場合の挫屈形を知ることが出来る。

第 4 圖



かくして定められたる挫屈形には、柱の兩端に於ける彎曲方向の相等しきもの即ち第 1 様式と、之が相反するもの即ち第 2 様式とが存在すること前章の場合と同様である。その各様式を夫々 I, II の記號を以て表はせば、挫屈形の張出數は I に於ては奇數、II に於ては偶數である。第 5 圖中の記號 I-1, I-3, ..., II-2, II-4, ... はこの挫屈様式並に張出數を示すものである。

而して同一記號の挫屈形に於てもまた無數の變化がある。例へば、同じく I-3 の形に於ても $n=0.882$ の場合には $y=0$ の位置は兩端より $0.37l$ にあるが、 n の値が小となるに従ひ $y=0$ の位置は次第に兩端に近づき、遂に $n=0.6$ となれば、兩端に所謂平點 (Flachpunkt) を作りて I-1 の形に收斂するが如くである。

尙 μ_0, μ_1, \dots に對しては更に異つた興味ある挫屈形が得られるけれどもこゝには之を省略することとする。

第 3 章 鐵道軌道の張出に關する

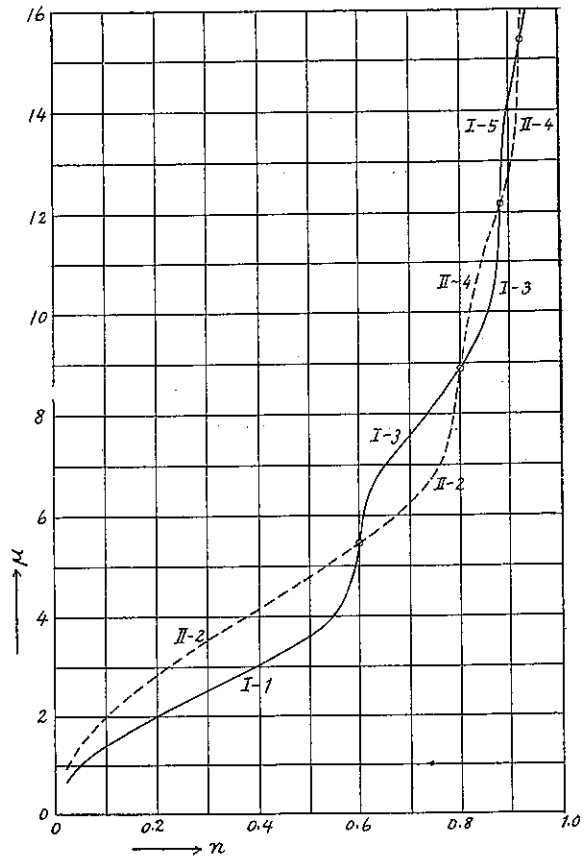
第 5 圖

新考察

第 1 節 軌道張出に關する従來の

研究と本研究との差異

鐵道軌道に於ける軌條の継目が列車に激衝を與へて乗心地を悪くするのみならず軌道保守上種々の困難を伴ふことは列車のスピード・アップにより一層甚しくなつて來た。故に近來數本の軌條を銻接し又は特に長い軌條を使用して出来るだけ軌條継目の數を少くすることが漸く多く行はるゝに至つた。然るに、軌條継目の遊間には自ら一定の限度があるため、かくの如き長軌條が自由なる伸縮をなすに十分なる遊間を與ふことは許されない。故に夏季甚しき炎熱に際しては軌條の自由なる伸長が妨げられ、その結果軌道は大なる軸壓力を受け、側方より十分なる抵抗が與へられない限り、遂に張出の危険に暴露さるゝに至つた。かくて軌道張出の問題は今や軌道力學上重要なる研究題目の一となり、多くの研究者が現はれ多くの業績が發表されて居る。その最も代表的なるものは理論及び實驗兩方面共 O. Ammann* 及び C. v. Gruenewaldt** であらう。吾國に於ては最近發表されたる鐵道省の堀越一三博士*** の研究がある。



これ等従來の研究は所謂 energy method によるもので、最初に軌條の挫屈形を假定し、次に道床抵抗を考慮し、内働外働の平衡より挫屈を起すべき軸壓力及び之を防止するに必要な抵抗並に軌條の挫屈長を決定するのである。而して假定さるゝ軌條の挫屈形は固定長柱に關する Euler の形及び實驗の結果に照して作られたる 2, 3 の形であるが、横抵抗ある場合と然らざる場合との挫屈形を同一と見做すことに疑問があるのみならず、かくの如き方法を以つてしては、實際に起る種々の形を悉く盡くすの煩に堪へず、従つてその論及するところ僅かに 2, 3 の代表形に過ぎざるは之を已むを得ずとするも、その結果他の多くの形の存在を忘れ遂に之を無視するの誤謬に陥つて居るやうに思はれる。

* O. Ammann und C. v. Gruenewaldt; Versuche über die Wirkung von Längskräften im Gleis, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1928, S. 308ff. 1929, S. 239ff. und S. 471 ff.; 1932, S. 115ff.

** C. v. Gruenewaldt; Die Knicksicherheit des lückenlosen Gleises, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1931, S. 109ff.; Angenäherte Berechnung der Knicksicherheit eines gekrümmten lückenlosen Gleises, Organ, 1931, S. 292 ff.

*** 堀越一三博士; 軌條の挫屈に就て, 業務研究資料(鐵道省研究所發行)第 22 卷 第 18 號 (昭和 9 年 6 月 25 日)

翻つて前章に述べたる弾性横抵抗を受くる固定長柱の理論の結果を見るに、軌道の挫屈試験に於て観測せらるゝ如き種々の形が極めて自然に得られて居る。これは、恰も、道床抵抗を弾性抵抗と見做せば、前章理論の應用により、軌道挫屈研究上一新境地を開拓し得べきことを暗示して居るが如くである。尤も道床抵抗を弾性的と假定することの當否は疑問であるが、少くとも挫屈による軌道の移動量が餘り大ならざる範圍に於ては之に近きものと見做すも大差なかるべく、又之によつて從來の研究に於けるが如く最初より軌條の挫屈形を假定するの不自然から解放されることが出来る。依つて以下前章の理論をそのまま應用して軌道挫屈の問題を論ずることとする。

第 2 節 軌道張出を起さざる條件

軌條が温度の上昇により伸長して繼目遊間が最早残されざるに至れば、それ以上の温度の上昇に對しては軌條は端々相密接して軸壓力を受け、こゝに軌道張出が起らうとする。この場合軌條繼目の構造が十分強固であれば、總べての軌條は無限に長い 1 本の軌條と同様に考へることが出来る。かくの如き無限長軌條が將に張出さんとするに對し、道床が弾性抵抗を與へて之を防止して居るものとすれば、その時に働く軸壓力 P と横抵抗の強さ K との間には、前章の理論により、次の關係がある。

$$P < \# = 2\sqrt{KEJ}$$

こゝに EJ は軌道の彎曲強度を示し、實驗によつて定めることが出来る。吾國鐵道省の實驗*によれば、長さ 10 m の 37 kg 軌條に 15 挺の枕木を取りつけ、その兩端を支へ中央に 0.5 ton の荷重を加へた結果約 0.03 m の撓みが測定された。即ち次の關係がある。

$$0.03 = \frac{0.5 \times 10^3}{48EJ} \quad \therefore EJ = 350 \text{ tm}^2$$

而して J の値は略軌條の斷面積に比例するものと推定することが出来るから、吾國の鐵道軌道に於ては EJ は略次の値をとるものとして差支ないであらう。即ち

$$30 \text{ kg 軌條に對しては } EJ = 280 \text{ tm}^2$$

$$37 \text{ kg 軌條に對しては } EJ = 350 \text{ "}$$

$$50 \text{ kg 軌條に對しては } EJ = 480 \text{ "}$$

次に K の値は道床の性質、その撒布の厚さ及び幅、枕木の間隔及び寸法等によつて異り、實驗より定めることが出来る。併しこゝには之を推定すべき資料がないから、假りに $K = 1 \sim 15 \text{ ton/m}^2$ に對し $\# = 2\sqrt{KEJ}$ を計算した。その結果は第 3 表に示す通りである。

第 3 表

K	30 kg 軌條		37 kg 軌條		50 kg 軌條	
	$\# = 2\sqrt{KEJ}$	$l = \sqrt{\frac{EJ}{K}}$	$\# = 2\sqrt{KEJ}$	$l = \sqrt{\frac{EJ}{K}}$	$\# = 2\sqrt{KEJ}$	$l = \sqrt{\frac{EJ}{K}}$
1 t/m ²	33.4 t	4.09 m	37.4 t	4.32 m	43.8 t	4.68 m
2	47.3	3.44	52.9	3.64	62.0	3.94
3	58.0	3.11	64.8	3.29	75.9	3.56
4	66.9	2.89	74.8	3.06	87.6	3.31
5	74.8	2.73	83.6	2.89	98.0	3.13
6	82.0	2.61	91.7	2.76	107.3	2.99

* 鐵道省業務研究資料第 22 卷第 18 號 (昭和 9 年 6 月 25 日) 28 頁

7	88.5	2.51	99.0	2.66	116.0	2.88
8	94.7	2.43	105.8	2.57	123.9	2.78
9	100.4	2.36	112.2	2.50	131.5	2.70
10	105.8	2.30	118.3	2.43	138.6	2.63
12	115.9	2.20	129.6	2.32	151.8	2.51
15	129.6	2.08	144.9	2.20	169.7	2.38

第 3 表より、與へられたる抵抗 K に對し軌道の挫屈を起さない軸壓力の最大限 $\frac{P}{A}$ 及び與へられたる軸壓力に對し軌道の挫屈を生ぜしめないために必要な抵抗 K を知ることが出来る。

第 3 節 長軌條又は銲接軌條の最長限度

道床抵抗を弾性的と見做せば、上述の理論より直に長軌條又は銲接軌條の長さの最大限度を求むることが出来る。今

- t 軌條敷設當時の溫度
- T 軌條の受くべき最高溫度
- l_0 長軌條 1 本の長さ
- c 軌條鋼の膨脹係數
- E 軌條鋼の彈性係數
- A 軌條の斷面積
- ϵ 軌條敷設當時の繼目遊間

とすれば溫度 T に於て軌條の受くる壓縮歪は

$$c(T-t)l_0 - \epsilon$$

となり、これより起る軸壓力 P は

$$P = \frac{EA}{l_0} \{c(T-t)l_0 - \epsilon\}$$

故に軌道の挫屈が起らない條件 $P < \frac{P}{2} = 2\sqrt{K EJ}$ より

$$l_0 = \frac{\epsilon EA}{c(T-t)EA - 2\sqrt{K EJ}} \dots \dots \dots (34)$$

この式によつて軌道の挫屈が起らないための長軌條又は銲接軌條の最長限度を知ることが出来る。

試みに

- $\epsilon = 8 \text{ mm} = 0.008 \text{ m}$
- $c = 0.0000117/1^\circ\text{C}$
- $E = 21\,000\,000 \text{ t/m}^2$
- $T - t = 50^\circ\text{C}$

とすれば

$$l_0 = \frac{168\,000 A}{12\,285 A - 2\sqrt{K EJ}} \dots \dots \dots (35)$$

この式を用ひて 30 kg 軌條 ($A = 2 \times 3\,825 \text{ mm}^2$), 37 kg 軌條 ($A = 2 \times 4\,725 \text{ mm}^2$), 50 kg 軌條 ($A = 2 \times 6\,435 \text{ mm}^2$) の種々の抵抗に對する最長限度を求むれば第 4 表の通りである。

第 4 表			
K	30 kg 軌條	37 kg 軌條	50 kg 軌條
2 t/m ²	27 m	25 m	22 m

4	47	38	30
6	107	65	42
8	∞	154	63
10	∞	∞	111
12	∞	∞	344
15	∞	∞	∞

第 4 表より重軌條ほど大なる抵抗を必要とすることが分る。

第 4 節 軌道の挫屈形

軌條の受くる軸壓力が $\frac{1}{n}$ の値を超過するに至れば軌條は挫屈を起し、その挫屈形は第 5 圖に示す如く多様である。而して張出數の多いものほど、小なる軸壓力に於て起る故、最も起り易き理であるが、張出數の増加は同時に挫屈長の著しき増大となり、軸壓力の小なることと相俟つて、張出量を益小ならしめ、事實上殆んど張出を認めることが困難となるであらう。實驗に於て張出數の甚しく多きものが殆んど現はれないのもこれがためであらう。

次に挫屈形に相當する n, μ の値を第 5 圖より決定すれば、その挫屈形を生ずべき軸壓力 P 及び挫屈長 l は次の式より算出することが出来る。

$$P = \frac{1}{n} \cdot \text{帛}$$

$$l = \mu l$$

帛 及び l の値は第 3 表に示す通りである。

【計算例】 例 1. 50 kg 軌條を敷設したる 2 種の軌道あり、その道床抵抗は夫々 $K=4 \text{ t/m}^2, K=2.5 \text{ t/m}^2$ とす。この 2 種の軌道が I-1 の挫屈形に張出すためには最小幾何の軸壓力を必要とするか。又その挫屈長を求む。

解： I-1 の挫屈形に對する n の最小値は $n=0.6$ 、又之に相當する μ の値は $\mu=5.44$ (第 1 表又は第 5 圖より) である。而して第 2 表より $K=4 \text{ t/m}^2$ に對しては $\text{帛}=87.6 \text{ t}, l=3.31 \text{ m}$ 、故に

$$P = \frac{87.6}{0.6} = 146 \text{ t}, \quad l = 3.31 \times 5.44 = 18 \text{ m}.$$

次に $K=2.5 \text{ t/m}^2$ に對しては第 2 表より比例により $\text{帛}=69 \text{ t}, l=3.75 \text{ m}$ 、故に

$$P = \frac{69}{0.6} = 115 \text{ t}, \quad l = 3.75 \times 5.44 = 20 \text{ m}.$$

例 2. 37 kg 軌條を敷設したる軌道に 130 t の軸壓力が作用したる場合の挫屈形及び挫屈長を求む。但し $K=6 \text{ t/m}^2$ とす。

解： 第 2 表より $\text{帛}=91.7 \text{ t}, l=2.76 \text{ m}$ 、故に

$$n = \frac{91.7}{130} = 0.7$$

第 5 圖より $n=0.7$ に對する μ の値を求むれば

$$\mu_1 = 6.26 \dots\dots\dots \text{挫屈形 II-2}$$

$$\mu_2 = 7.59 \dots\dots\dots \text{挫屈形 I-3}$$

而して

$$\mu_1 = 6.26 \text{ に對しては } l = 2.76 \times 6.26 = 17 \text{ m}$$

$$\mu_2 = 7.59 \text{ に對しては } l = 2.76 \times 7.59 = 21 \text{ m}$$

故に張出が 17 m の長さに互つて起る場合は II-2 の形となり、又 21 m の長さに互つて起る場合は I-3 の形となる。