

参 考 資 料

第 20 卷 第 11 號 昭和 9 年 11 月

一つの坐標に週期性を有する ポテンシャル函数

(R. C. J. Howland. "Potential functions with periodicity in one coordinate" Proceeding of the Cambridge phil. soc. Vol. 30. Part 3, July 1934.)

以下に掲げる解析の下にある一般的概念は、ある一つの幾何學的變換群に對して不變形である (invariant) ポテンシャルの場概念である。境界はお互ひに變換しあふ部分を成してゐるから、境界値も亦お互ひに變換し合ふ。他の境界に於ける境界條件は自づから満足される。その變換群が單なる平行移動か廻轉である場に於ては、週期的な函数は直交坐標に於ても極坐標に於ても得られる。

1. 圓形又は球形境界の列に関する函数

2 次元のものから初める。境界を無限の圓周の組であるとし、その半徑はすべて a 、その中心は直交坐標に關して $(\pm pb, 0)$ にあるとする。但し p は 0 を含む整数とする。

極坐標を次の様に定義する。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \dots \dots (1)$$

又
$$\left. \begin{aligned} \xi &= x/b, \quad \eta = y/b, \quad \rho = r/b \\ \lambda &= a/b, \quad \zeta = \xi + i\eta \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

とおく。函数

$$\omega_0 = -\log \sin \pi \zeta \quad \dots \dots (3)$$

は對數的異常點をすべての中心に持つてゐる。これは次の様に展開出来る。

$$\omega_0 = -\log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n(2n)!} B_n \pi^{2n} \zeta^{2n}$$

茲に B_n はベルヌイの數である。(譯者註 例へば掛谷蓮池三角法 249 頁参照) これは次の様に書ける。

$$\omega_0 = -\log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sigma_{2n} \zeta^{2n} \quad \dots \dots (4)$$

茲に
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} \quad \dots \dots (5)$$

同じ點で整数次の極を有する函数は次の如く定義される。

$$\omega_s = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \frac{d^s \omega_0}{d \zeta^s} \quad \dots \dots (6)$$

展開式の形は s が奇數か偶數かで異なるので

$$\omega_{2s} = \zeta^{-2s} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \alpha_{2s} \zeta^{2n} \quad \dots \dots (7)$$

$$\omega_{2s+1} = \zeta^{-2s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \alpha_{2s+1} \zeta^{2n+1} \quad \dots \dots (8)$$

茲に
$$n \alpha_s = 2 \binom{n+s-1}{n} \sigma_{n+s} \quad \dots \dots (9)$$

記號を統一するために次の如く書く。

$$\omega_0 = -\log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \alpha_0 \zeta^{2n} \quad \dots \dots (10)$$

$$2^n \alpha_0 = \sigma_{2n/n} \quad \dots \dots (11)$$

この實數部分、虚數部分がポテンシャル函数を與へて次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= -\log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \alpha_0 \rho^{2n} \cos 2n\theta, \\ T_0 &= -i\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \alpha_0 \rho^{2n} \sin 2n\theta, \\ S_{2s} &= \rho^{-2s} \cos 2s\theta + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \alpha_{2s} \rho^{2n} \cos 2n\theta, \\ T_{2s} &= \rho^{-2s} \sin 2s\theta - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \alpha_{2s} \rho^{2n} \sin 2n\theta, \\ S_{2s+1} &= \rho^{-2s-1} \cos (2s+1)\theta \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \alpha_{2s+1} \rho^{2n+1} \cos (2n+1)\theta, \\ T_{2s+1} &= \rho^{-2s-1} \sin (2s+1)\theta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \alpha_{2s+1} \rho^{2n+1} \sin (2n+1)\theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

これ等の函数の應用例として無限の圓筒が洗體の中にある場合を示せば $\rho = \lambda$ の時に $\psi = 0$ 、無限遠方で $\partial\psi/\partial y \rightarrow -V$ とする。これには

$$\psi = -Vr \sin \theta + V a \lambda \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1} T_{2s+1} \quad \dots \dots (13)$$

とする。

$$A_1 + \lambda^2 \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1} \alpha_{2s+1} = 1,$$

$$A_{2n+1} + \lambda^{2n+2} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1} \alpha_{2s+1} = 0 \quad n > 0.$$

ψ を $\sin(2n+1)\theta$ でくつた項に並び代へた方が便利であり、その sine の係数は $n > 0$ に對して

$$\begin{aligned} Va\lambda \left\{ A_{2n+1} \rho^{-2n-1} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1} \alpha_{2s+1} \rho^{2n+1} \right\} \\ = Va\lambda A_{2n+1} \{ \rho^{-2n-1} - \lambda^{-2n-2} \rho^{2n+1} \} \\ = Va\lambda^{-2n} A_{2n+1} \{ (a/r)^{2n+1} - (r/a)^{2n+1} \}. \end{aligned}$$

同様に $\sin \theta$ の係数が $VaA_1(a/r-r/a)$ である事が分かる。従つて

$$\begin{aligned} \psi = -Va \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \{ (r/a)^{2n+1} \\ - (a/r)^{2n+1} \} \sin(2n+1)\theta \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\text{茲に } B_{2n+1} = A_{2n+1} \lambda^{-2n} \dots\dots\dots (15)$$

$\lambda = 0.25$ に對する B の數値を計算して見ると

$$\begin{aligned} B_1 &= 8.296 \times 10^{-1}, & B_5 &= -6.979 \times 10^{-3}, \\ B_3 &= -4.076 \times 10^{-4}, & B_7 &= -2.492 \times 10^{-5}, \\ B_9 &= -1.536 \times 10^{-6}, & B_{11} &= -9.46 \times 10^{-8}, \\ B_{13} &= -5.84 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

同様の解析を 3 次元の場合に展開するために圓筒を半徑 a でその中心が直交坐標について $(\pm pb, 0, 0)$ にある球とおきかへる。原點を極とする球坐標を (r, θ, ϕ) とし、 $\theta = 0$ の線を x 坐標とし、 $y = 0$ の平面を $\phi = 0$ に對應させる。

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/b, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/b \\ \rho = r/b, \quad \lambda = a/b, \quad \mu = \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

と書く。函數

$$\begin{aligned} V_0 = \rho^{-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \{ (\rho^2 + p^2 - 2\rho p\mu)^{-\frac{1}{2}} \\ + (\rho^2 + p^2 + 2\rho p\mu)^{-\frac{1}{2}} - 2p^{-1} \} \dots (17) \end{aligned}$$

は x について b の週期を持つポテンシャル函數で、各各の球の中心に極を有し、これは次の形に展開される。

$$V_0 = \rho^{-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n+1} \rho^{2n} P_{2n}(\mu) \dots\dots (18)$$

σ_n は (5) に於て定義されたものである。

さて次の事を知つてゐる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \rho^n P_n(\mu) \} &= n \rho^{n-1} P_{n-1}(\mu); \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \rho^{-n-1} P_n(\mu) \} &= -(n+1) \rho^{-n-2} P_{n+1}(\mu). \end{aligned}$$

そこで函數の組を次の方程式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\frac{\partial V_0}{\partial \xi}, & V_{2s} &= \frac{1}{(2s)!} \frac{\partial^{2s} V_0}{\partial \xi^{2s}}, \\ V_{2s+1} &= \frac{1}{(2s+1)!} \frac{\partial^{2s} V_1}{\partial \xi^{2s}} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

すると

$$\begin{aligned} V_{2s} &= P_{2s}(\mu) \rho^{-2s-1} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+2s}{2s} \sigma_{2n+2s+1} \rho^{2n} P_{2n}(\mu) \dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{2s+1} &= P_{2s+1}(\mu) \rho^{-2s-2} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+2s+2}{2s+1} \sigma_{2n+2s+3} \rho^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

これ等の方程式に Hobson の定理⁽¹⁾を應用する。

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^t + \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} \frac{P_s(\mu)}{\rho^{s+1}} \\ = \frac{1}{2^{t-1} \rho^{s+t+1}} P_{s+1}(\mu) \cos t\phi, \\ \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^t + \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} \rho^s P_s(\mu) \\ = \frac{\rho^{s-t}}{2^{t-1}} P_{s-1}(\mu) \cos t\phi, \end{aligned}$$

茲に $u = \eta + i\xi, v = \eta - i\xi$

すると V_s^t を次の式で定義すれば

$$V_s^t = 2^{t-1} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^t + \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} V_{s-t} \dots (23)$$

$s \geq t$ に對して

$$\begin{aligned} V_{2s}^{2t} &= \left[\rho^{-2s-1} P_{2s}^{2t}(\mu) + 2 \sum_{n=2t}^{\infty} \binom{2n+2s-2t}{2s-2t} \right. \\ &\times \left. \sigma_{2n+2s-2t+1} \rho^{2n-2t} P_{2n-2t}(\mu) \right] \cos 2t\phi \end{aligned}$$

(1) E. W. Hobson: Spherical and Ellipsoidal Harmonics pp. 135 & 139 (原註)

$$= \left[\rho^{-2s-1} P_{2s}^{2t}(\mu) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+2s+2t}{2s-2t} \right. \\ \left. \times \sigma_{2n+2s+2t+1} \rho^{2n+2t} P_{2n+2t}^{2t}(\mu) \right] \cos 2t\phi$$

同じ様な形が添付記號 (suffix) の 1 つか又は両方が奇數である場合に得られる。

(i) $s+t$ 偶數

$$V_s^t = \left[\rho^{-s-1} P_s^t(\mu) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+s+t}{s-t} \right. \\ \left. \times \sigma_{2n+s+t+1} \rho^{2n+t} P_{2n+t}^{2t}(\mu) \right] \cos t\phi$$

(ii) $s+t$ 奇數

$$V_s^t = \left[\rho^{-s-1} P_s^t(\mu) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+s+t+1}{s-1} \right. \\ \left. \times \sigma_{2n+s+t+2} \rho^{2n+t+1} P_{2n+t+1}^{2t}(\mu) \right] \cos t\phi$$

.....(24)

又次の式を用ひて

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^t - \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} \frac{P_s(\mu)}{\rho^{s+1}} \\ = \frac{1}{2^{t-1} \rho^{s+t+1}} P_{s+t}^t(\mu) \sin t\phi \\ \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^t - \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} \rho^s P_t(\mu) \\ = \frac{\rho^{s-t}}{2^{t-1}} P_{s-t}^t(\mu) \sin t\phi.$$

V_s^t とただ $\cos t\phi$ の處が $\sin t\phi$ となつてゐるだけの函数 W_s^t を得られる。今任意の一つの球の上で V が與へられてそれが次の様に書けたとする。

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\mu) \right\}$$

この條件を満すために

$$V = L_0 V_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ L_s V_s + \sum_{t=1}^s (M_s^t V_s^t + N_s^t W_s^t) \right\}$$

.....(25)

と假定する。そして $P_n(\mu)$, $P_n^m(\mu) \cos m\phi$, $P_n^m(\mu) \times \sin m\phi$ の係數を等しいとおく。この3つのものはお互ひに獨立な方程式の組になる。 L_s はこの様な組の 1 つに入るから、又之れが s が奇數か偶數かに依つて 2 つの群になる。

この様にして L_{2s} に對する方程式は

$$L_{2s} + 2\lambda^{2s+1} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2n+2s}{2s} \sigma_{2n+2s+1} L_{2s} = A\lambda^{2n+1}$$

.....(26)

他の係數の中 M_s^t と N_s^t は獨立であり、夫々に對して、 t の決つた値を持つた係數は再び s が奇數か偶數かに依つて 2 つに分かれる自から含まれた方程式の組を満す。この標準の方程式の組は

$$M_{2n}^{2m} + 2\lambda^{2n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{2n+2s}{2s-2m} \sigma_{2n+2s+1} M_{2s}^{2m} \\ = A_{2n}^{2m} \lambda^{2n+1} \dots \dots \dots (27)$$

である。

2. 圓形境界の輪に關する函数

$z = x + iy$ なる平面に k 個の圓形境界の組があるとし、各々の半徑を a , その中心は $z = be^{2ip\pi/k}$, $p = 0, 1, 2, \dots, k-1$ にあるとする。

各々の中心に對數的無限大を有する函数は

$$\omega_0 = -\log \prod_{p=0}^{k-1} (z - be^{2ip\pi/k}) = -\log(z^k - b^k) \dots (1) \\ b\zeta = z - b \dots \dots \dots (2)$$

と書き定數項を除けば

$$\omega_0 = -\log \zeta - \sum_{p=0}^{k-1} \log(1 + u_p \zeta)$$

茲に $u_p = (1 - e^{2ip\pi/k})^{-1} \dots \dots \dots (3)$

又は $\omega_0 = -\log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n {}^n A_0 \zeta^n \dots \dots (4)$

茲に ${}^n A_0 = u^{-1} \sum_{p=1}^{k-1} u_p^n \dots \dots \dots (5)$

$1 - 1/u_p = e^{2ip\pi/k}$ であるから u_p は $(u-1)^k - u^k = 0 \dots \dots \dots (6)$

の根である。故に

$${}^n A_0 = \sigma_n/n \dots \dots \dots (7)$$

(1) 式を b について微分して生ずる函数は $2pn/k$ の廻轉について不變形である。

$$\omega_0 = -\log(z-b) - \sum_{p=1}^{k-1} \log(z - be^{2ip\pi/k})$$

とかき、 ω_s なる函数を

$$\omega_s = \frac{b^s}{(s-1)!} \frac{d^s \omega_0}{db^s} \dots \dots \dots (8)$$

で定義すれば

$$\begin{aligned} \omega_s &= \zeta^{-s} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{(1-u_p^{-1})^s}{(u_p^{-1} + \zeta)^s} \\ &= \zeta^{-s} + \sum_{p=1}^{k-1} (u_p - 1)^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+s-1}{n} u_p^n \zeta^n \\ &= \zeta^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n {}^n A_s \zeta^n \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

茲に ${}^n A_s = \binom{n+s-1}{n} \sum_{r=0}^s (-1)^r \binom{s}{r} \sigma_{n+s-r}$ (10)

ω_s の實數部と虚數部を分けると次のポテンシャル函数が出来る。但し r, θ は圓の中心を原點としたものである。 $\rho = r/b$ において、

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= -\log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n {}^n A_0 \rho^n \cos \theta \\ V_0 &= i\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n {}^n A_0 \rho^n \sin \theta \\ U_s &= \rho^{-s} \cos s\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n {}^n A_s \rho^n \cos n\theta \\ V_s &= \rho^{-s} \sin s\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n {}^n A_s \rho^n \sin n\theta \end{aligned} \right\} (11)$$

今次の条件を満足するポテンシャル函数 ψ を求める。

$\rho = \lambda$ のとき $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\theta$

それには $\psi = \sum_{s=1}^{\infty} B_s v_s$ と假定すれば sine の係数の對應は

$$B_n - (-1)^n \lambda^{2n} \sum_{s=1}^{\infty} {}^n A_s B_s = C_n \lambda^n$$

となる時は保たれる。

原點に湧點 (source) のある場合の流線を求める。但し $k=3$ の場合。湧點のみある時は

$$\begin{aligned} \omega &= -m \log z = -m \log R(1 + \zeta) \\ &= -m \left[\log R + \zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

stream function は

$$\psi_0 = m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1} \rho^n \sin n\theta.$$

$\rho = \lambda$ で $\psi = 0$ とするために

$$\psi = \psi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s V_s$$

とおく。 $C_n = (-1)^{n-1} n^{-1} \lambda^n$ となる。

$$\psi = m \sum_{n=1}^{\infty} D_n [(\lambda/\rho)^n - (\rho/\lambda)^n] \sin n\theta \dots (12)$$

となる。茲に $D_n = B_n \lambda^{-2n}$ であつて D_n は

$$\begin{aligned} D_1 &= 5.023 \times 10^{-1}, & D_2 &= -1.102 \times 10^{-1}, \\ D_3 &= 2.994 \times 10^{-2}, & D_4 &= -8.938 \times 10^{-3}, \\ D_5 &= 2.936 \times 10^{-3}, & D_6 &= -1.035 \times 10^{-3}, \\ D_7 &= 3.857 \times 10^{-4}, & D_8 &= -1.436 \times 10^{-4}, \\ D_9 &= 5.828 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

となる。尙ほ

$$L_{2n} + 2\lambda^{4n+1} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2n+2s}{2s} \sigma_{2n+2s+1} L_{2s} = \Delta \lambda^{2n+1}$$

の様な形式の方程式を解くには普通の Fredholm 型の積分方程式を無限級数で解く様な方法を用ふればよい。
(最上武雄 抄譯)

架構に對する彎曲率驗算法

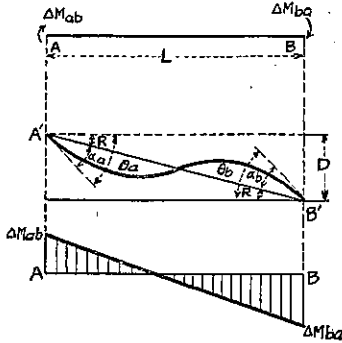
(A. S. Niles, R. L. Vernier and W. A. Campbell "Checking Moment Computations for Rigid Frames." Eng. News-Record, July 26, 1934.)

連續桁及び架構の應力計算に Hardy Cross の彎曲率配分法を用ふれば、機械的に簡単に求められるが、求められた彎曲率の精度が不明であり、又途中の計算に誤りのある場合、各格點に於て $\sum M = 0$ であつても、得られた彎曲率は誤つたものであり得る。その爲此の計算を迅速に驗算する方法を考案した。即ち計算したる端彎曲率を格點同轉 θ 、部材同轉 R 及び彎曲率を含む式の中に代入して、2 つ又はそれ以上の無關係の式から、 θ 及び R の値を求める。斯くして得られた値を比較して彎曲率の精度を知るのである。

公式の誘導

公式は彎曲率面積理論から導かれる。單桁 AB (第 1 圖) の兩端に α_a 及 α_b に等しい端接線の角同轉を生ぜしめる彎曲率 ΔM_{ab} 及び ΔM_{ba} が働くものと考へる。更に支點 A 及び B が A' 及び B' 迄動き、桁の軸の角度位 $= D/L = R$ を生じたものとする。a に於ける

第 1 圖



接線の全回轉は $\theta_a = \alpha_a + R$ となる。單桁の端に於ける角回轉は數字上 M/EI 圖表を荷重とする同じ桁の相應する端剪力に等しい事から次の結果が得られる。即ち(時計方向の回轉及び時計方向の彎曲率を正とする)。

$$\alpha_a = \frac{L}{6EI} (2\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba})$$

$$\alpha_b = \frac{L}{6EI} (2\Delta M_{ba} - \Delta M_{ab})$$

故に
$$\theta_a = \frac{2\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}}{6EK} + R$$

$$\theta_b = \frac{2\Delta M_{ba} - \Delta M_{ab}}{6EK} + R$$

然し $K = I/L$ である。

上の式は部材の兩端間に荷重のない場合である。もし荷重を有する場合は適當な大きさの端彎曲率 MF を考へれば部材の兩端を回轉せしめる傾向なく、上の式は矢張り成立する。従つて ΔM は全端彎曲率から中間荷重に對する固定端彎曲率を差引いたものである。即ち

$$\Delta M_{ab} = M_{ab} - MF_{ab}$$

$$\Delta M_{ba} = M_{ba} - MF_{ba}$$

此の MF は彎曲率配分計算を行ふ時求めるものである。斯くして一格點の回轉を示す式は次の如くなる。即ち

$$\theta_a = \frac{2\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}}{6EK} + R \dots \dots \dots (I)$$

茲に θ_a は求める格點回轉

ΔM_{ab} は格點の全彎曲率から固定端彎曲率を差引いたもの

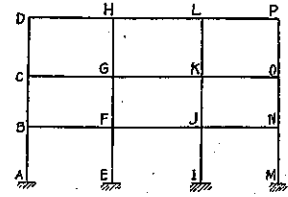
ΔM_{ba} はその部材の反對端の同じ量

R は部材の全角變位

$K = I/L$ は部材剛性係數

第 2 圖の架構の場合を考へると、水平部材の R が零である事から (I) 式

第 2 圖



に依り中間柱の各格點の回轉を 2 つの獨立せる式で表し得る。然るに外側柱では 1 つしか得られない。故に第 1

圖の桁 AB の兩端の勾配の差を考へて次の式が得られる。即ち

$$\alpha_a - \alpha_b = \frac{L}{2EI} (\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba})$$

故に
$$\alpha_a = \frac{L}{2EI} (\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}) + \alpha_b$$

故に
$$\alpha_a + R = \frac{L}{2EI} (\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}) + \alpha_b + R$$

従つて
$$\theta_a = \frac{\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}}{2EK} + \theta_b \dots \dots \dots (II)$$

第 2 圖に示した架構の一階の柱の下端は固定されて居る。即ち $\theta_a = \theta_c = \theta_i = \theta_m$ である。従つて (II) 式に依つて (I) 式と無關係に格點回轉を求める事が出来る。

又 (I) 式を變形して次の式が得られる。

$$R = \theta_a - \frac{2\Delta M_{ab} - \Delta M_{ba}}{6EK} \dots \dots \dots (Ia)$$

各階の總ての柱の R の値は同一であるから、(Ia) 式に依つて驗算を行ふ事が出来る。

公式の應用

彎曲率驗算の概略を示すと次の如くなる。先づ第 2 圖の如き架構の彎曲率が彎曲率配分法に依つて求められたものと假定する。次に

1. 水平部材は總て $R = 0$ である事を考へて、(I) 式に依つて $\theta_b, \theta_f, \theta_j$ 等を求め次第に頂上に至る。

2. 下端固定せる一階の柱から出發して、(II) 式を用ひ柱 ABC に對し、 $\theta_b, \theta_c \dots$ を求め、柱 EFG \dots に對し、 $\theta_f, \theta_g \dots$ を求める。

3. 1. 及び 2. に依つて計算した 2 組の θ を比較する。此の 2 組の値が近い程彎曲率は精確な譯である。

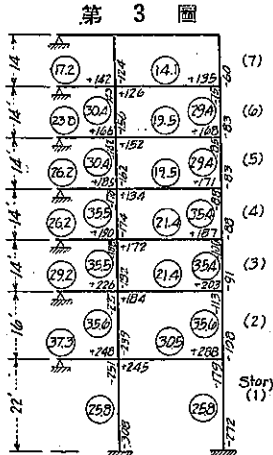
4. 更に (Ia) 式を用ひ R の値を求め驗算を行ふ。

水平部材は皆 R=0 であり、同じ階の中の柱の R は皆同じである。計算は R の既知の部材から出發する。

普通は R=0 の部材があるものである。

例 題

上の方法を數字に依つて示すため例題を掲げる。Wilson-Maney 架構の下層の風荷重に依る應力を求めたものである。荷重は格點にのみ考へたから(I),(II)式及び(Ia)式の ΔM は第3圖に示した全端彎曲率と同じ譯である。



第 1 表 水平部材の端彎曲率から計算したる θ の値

(I) 式 $6E\theta_a = \frac{2M_{ab} - M_{ba}}{K}$

床 全間	$2M_{ab}$	M_{ba}	$2M_{ab} - M_{ba}$	K	$6E\theta_a$
1 AB	+576	+245	+331	30.5	+10.9
1 BA	+490	+208	+282	30.5	+6.65
1 BB'	+496	+248	+248	37.5	+6.65
2 AB	+406	+184	+222	21.4	+10.4
2 BA	+368	+203	+165	21.4	+7.73
2 BB'	+452	+226	+226	29.2	+7.74
3 AB	+374	+172	+202	21.4	+9.45
3 BA	+344	+187	+157	21.4	+7.34
3 BB'	+380	+190	+190	26.2	+7.25
4 AB	+340	+154	+186	19.5	+9.54
4 BA	+308	+170	+138	19.5	+7.07
4 BB'	+368	+184	+184	26.2	+7.03
5 AB	+336	+152	+184	19.5	+9.44
5 BA	+304	+168	+136	19.5	+6.97
5 BB'	+332	+166	+166	23.0	+6.97
6 AB	+270	+126	+144	14.1	+10.20
6 BA	+252	+135	+117	14.1	+8.30
6 BB'	+284	+142	+142	17.2	+8.26

第 2 表 垂直部材の端彎曲率から計算したる θ の値

(II) 式 $2E\theta_a = \frac{M_{ab} - M_{ba}}{K} + 2E\theta_b$

階	M_{ab}	M_{ba}	$M_{ab} - M_{ba}$	K	$\frac{M_{ab} - M_{ba}}{K}$	$2E\theta_b$	$2E\theta_a$	$6E\theta_a$	第一階の $6E\theta_a$
柱 A									
B-1	-179	272	+93	25.8	+3.60	0	+3.6	+10.8	10.9
1-2	-113	-108	-5	35.6	-0.14	+3.60	+3.46	+10.38	10.4
2-3	-100	-91	-9	35.0	-0.25	+3.60	+3.35	+10.05	9.5
3-4	-88	-88	0	35.0	0	+3.21	+3.21	+9.62	9.54
4-5	-85	-83	-2	28.4	-0.07	+3.21	+3.14	+9.45	9.44
5-6	-75	-83	+8	28.4	+0.27	+3.14	+3.41	+10.23	10.20
柱 B									
B-1	-251	-308	+57	25.8	+2.21	0	+2.21	+6.63	6.65
1-2	-227	-239	+12	35.6	+0.33	+2.21	+2.55	+7.64	7.74
2-3	-188	-182	-6	35.5	-0.17	+2.21	+2.04	+6.12	6.25
3-4	-176	-174	-2	35.5	-0.05	+2.21	+2.16	+6.48	6.57
4-5	-162	-162	0	30.4	0	+2.32	+2.32	+6.96	6.97
5-6	-143	-136	+7	30.4	+0.22	+2.32	+2.55	+7.65	7.65

第 3 表 R の値の計算

(Ia) 式 $6ER = \theta_a - \frac{2M_{ab} - M_{ba}}{K}$

階	M_{ab}	$2M_{ab}$	M_{ba}	$2M_{ab} - M_{ba}$	K	$\frac{2M_{ab} - M_{ba}}{K}$	$6E\theta_a$	6ER
B-1	-179	-338	-272	-66	25.8	-2.56	+10.8	+14.1
1-2	-113	-226	-108	-118	35.6	-3.32	+10.4	+13.7
2-3	-100	-200	-91	-109	35.4	-3.08	+9.53	+12.61
3-4	-88	-176	-88	-88	35.4	-2.48	+9.58	+12.39
4-5	-85	-170	-83	-87	28.4	-3.06	+9.43	+12.39
5-6	-75	-150	-83	-67	28.4	-2.36	+10.21	+12.49

階	$2M_{ab}$	M_{ba}	$2M_{ab} - M_{ba}$	K	$\frac{2M_{ab} - M_{ba}}{K}$	$6E\theta_a$	6ER	柱 A に 6ER
B-1	-616	-251	-365	25.8	-14.1	0	+14.1	+14.1
1-2	-478	-226	-252	35.6	-7.08	+6.65	+13.7	+13.7
2-3	-384	-208	-176	35.5	-4.96	+7.11	+12.7	+12.61
3-4	-396	-176	-170	35.5	-4.79	+7.24	+12.0	+12.06
4-5	-324	-162	-162	30.4	-5.33	+7.02	+12.4	+12.39
5-6	-317	-143	-169	30.4	-5.56	+8.27	+13.0	+12.49

(奥田秋夫 抄譯)

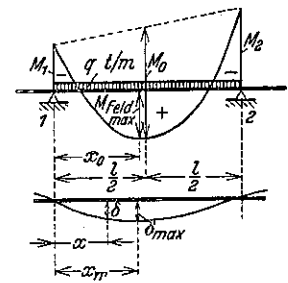
連続桁最大撓度算定用圖表に就て

(E. Reichdorf, „Kurvtafel zur Bestimmung der Grössten Durchbiegungen für Balkenträger auf mehreren Stützen“ Bauing. Heft 23/24, 1934 S.S. 246~247.)

静力学計算により求めた連続桁の或る徑間に於ける兩支點彎曲率、又は支點に作用する緊定彎曲率が既知

であれば、こゝに掲ぐ

第 4 圖



る圖表を用ひて直ちに其の徑間の最大撓度

δ_{max} を求めて許容撓度

δ_{n1} と比較する事が出

来る。但し荷重は等布

荷重とし、考へて居る

徑間の桁の断面 2 次率

及び弾性係数は其の徑間内では一定なりと假定する。

撓度計算の方法はモールの法則より出發した、即ち

第 4 圖に於て

$M_0 = \frac{q l^2}{8}$, $K_1 = \frac{M_1}{M_0}$, $K_2 = \frac{M_2}{M_0}$

(但し M_1, M_2 は絶対値を採る)

とすれば弾性線の方程式は

$$EJ\delta = \frac{ql^4}{24} \omega''_p - \frac{l^2}{6} (M_1 \omega'_D + M_2 \omega_D)$$

$$= \frac{ql^4}{24} \omega''_p - \frac{ql^4}{48} (K_1 \omega'_D + K_2 \omega_D)$$

となる。こゝに

$$\omega''_p = \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}$$

$$\omega'_D = \frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^2}{l^2}$$

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$$

の関係を代入すれば

$$EJ\delta = \frac{ql^4}{48} \cdot \frac{x}{l} \left[2 \frac{x^2}{l^2} - (4+K_1-K_2) \frac{x^2}{l^2} \right. \\ \left. + 3K_1 \frac{x}{l} + 2 - 2K_1 - K_2 \right] \dots \dots \dots (1)$$

となる。

最大撓度を生ずる位置を x_m とすれば x_m/l の値は $\frac{d\delta}{dx/l} = 0$ なる方程式即ち

$$\frac{x^3}{l^3} - 3 \cdot \frac{1}{8} (4+K_1-K_2) \frac{x^2}{l^2} + \frac{3}{4} K_1 \frac{x}{l} \\ + \frac{1}{8} (2-2K_1-K_2) = 0$$

なる3次方程式の根として求められる。其の値を x_m/l とする。此の x_m/l を (1) 式に代入すれば最大撓度を得る、即ち

$$\delta_{max} = \frac{f \cdot ql^4}{J} \dots \dots \dots (2)$$

但し、 $f = \frac{1}{48E} \frac{x_m}{l} \left[2 \frac{x_m^2}{l^2} - (4+K_1-K_2) \frac{x_m^2}{l^2} \right. \\ \left. + 3K_1 \frac{x_m}{l} + 2 - 2K_1 - K_2 \right]$

又最大撓度が許容撓度より小なる爲には

例へば $\delta_{zul} \leq \frac{l}{500}$ とすれば

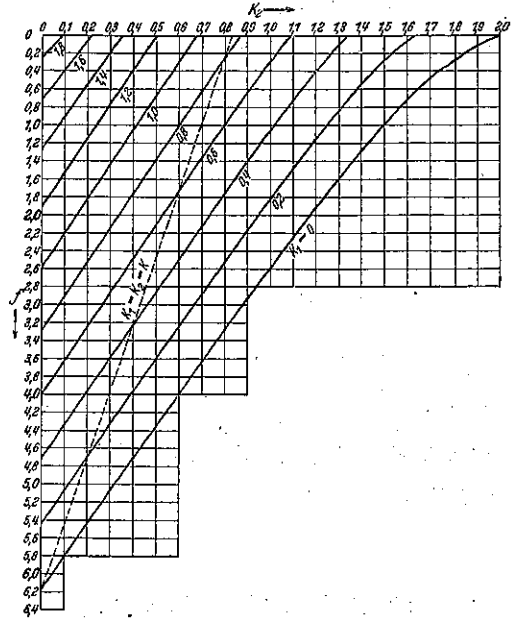
$$J_{erf} \geq 5 \cdot f \cdot ql^3 \dots \dots \dots (3)$$

なるべし、但し J_{erf} は使用す可き桁の断面2次率なり。

(2), (3) 式に於ては q は t/m, l は m, J は cm⁴, δ_{max} は cm 単位なり。

今 $E_e = 2100\,000 \text{ kg/cm}^2$ とし、 K_1, K_2 に對する f を求むれば第5圖の如し (譯者註、 x_m/l は上記3次方程式により K_1, K_2 の函數なる故、 f は K_1, K_2 の2變數により定めらる)。

第 5 圖



若し桁の材質が異つた場合には其の彈性係数を E とせば圖表より求めた f に $n = \frac{E_e}{E}$ を乗ずればよい。例へば鐵筋コンクリートの場合は $n = \frac{E_e}{E_b} = 10$ を乗ずればよい。

若し兩支點彎曲率が等しければ $K_1 = K_2 = K$ となり、 $\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2}$ となり (1) 式は次の如くなる。

$$\delta_{max} = 4.9603 \frac{ql^4}{J} (1.25 - 1.5K)$$

但し $E = 2100\,000 \text{ kg/cm}^2$, $q: \text{t/m}$, $l: \text{m}$, $J: \text{cm}^4$, $\delta_{max}: \text{cm}$

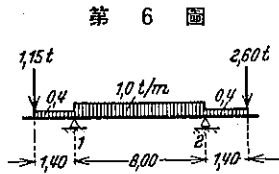
とせり。

K_1 と K_2 とが異なるとき、若し其の差異が甚だしくない場合には $\frac{1}{2} (K_1 + K_2) = K$ として求めても實際使用するには充分な程度の精密度を與へる。この K は圖表に於て斜めの點線で示した。

此の圖表は總ての特別な場合、例へば端徑間に於け

る $\delta_{\max}(K_1=0)$, 単桁の $\delta_{\max}(K_1=K_2=0)$, 一方固定桁 ($K_1=0, K_2=1$), 或は両端固定桁 ($K_1=K_2=\frac{2}{3}$) の場合にも用ひ得る。

次に例に依つて圖表の使用例を簡単に記してみる(第6圖参照)。



第 6 圖

$$M_0 = -\frac{q l^2}{8} = +8.00 \text{ t.m}$$

$$M_1 = -2.00 \text{ t.m}$$

$$M_2 = -4.00 \text{ t.m}$$

$$K_1 = \frac{2}{8} = 0.25$$

$$K_2 = \frac{4}{8} = 0.5$$

圖表より $f=3.4$

今 $\delta_{zul} < \frac{l}{500}$ とすれば $J_{err} = 5 \times 3.4 \times 1.00 \times 8^3 = 8704 \text{ cm}^4$, 撓度の關係より見れば I 30 即ち $J=9800 \text{ cm}^4$ を使用すればよし。(富田恵吉 抄譯)

地下水の流れに就て

(G. Hamel; „Über Grundwasserströmung“ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Juni 1934, S. 929~157.)

1. 2次元の地下水の流れるポテンシャル流と考へれば流れの基本式

これは

$$\text{div } \vec{v} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gy + v\varphi = C(t) \dots\dots(2)$$

但し $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ でありその他は一般に用ひられる記號による。定流の場合を考へれば $\partial \varphi / \partial t = 0$ となり $C(t)$ は常數である。

$f(z) = f(x+iy) = \varphi + i\psi$ とすれば

$$u - iv = f'(z) \dots\dots\dots(3)$$

となり(2)式は定流の場合に

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\mu} + gy + v\varphi = C \dots\dots(4)$$

この第1項は他に比して非常に小さいから省略するのが普通である。著者は之を解く爲に先づ問題を u, v 面内のポテンシャル論の境界値問題に導き、2つの簡単な場合に對して正解を與へた。

2. 境界條件

(1) 不滲透層: s を曲線に沿つて測れる長さとするれば

$$dx/ds = \cos \alpha, \quad dy/ds = \sin \alpha$$

不滲透層は1つの流線でないから之に沿つて $\psi = \text{const}$, 又

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos \alpha, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \sin \alpha$$

であるから不滲透層が直線状をなすならば $v:u = \sin \alpha : \cos \alpha$ となり u, v 面の層の寫像は原點を通り元の層に平行な線分となる。

(2) 限られたる區域内の動かぬ水: $\phi = \text{const}$. であるから

$$p/\mu + gy = \text{const.}$$

この境界より出る流速は境に直角となる。境が直線状ならば u, v 面では原點を通り元の境の線に垂直な直線となる。

(3) 自由水面: $p = \text{const}$. であるから

$$gy + v\varphi = C$$

之を變形すれば $gv + v \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 = 0$

自由水面は又1つの流線であるから $(\partial \varphi / \partial s)^2 = u^2 + v^2$ を代入すれば

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2} \frac{g}{v} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{g^2}{v^2} = \left(\frac{1}{2} k \right)^2$$

u, v 面の寫像は $u=0, v = -\frac{1}{2}k$ に中點を有し原點を通る圓の弧となる。

(4) 滲透面: 大氣に露出する滲透面であつて $p = \text{const}$. である。(2)式は

$$g \sin \alpha + v \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$

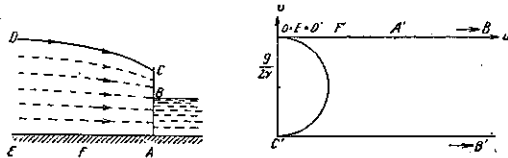
となるがこの場合は $\partial \varphi / \partial s$ は單に s 方向の分速度である。

$$\frac{g}{v} \sin \alpha + u \cos \alpha + v \sin \alpha = 0$$

この滲透面が直線状ならば u, v 面の寫像は滲透面に垂直な直線であり $u=0, v=-\frac{g}{v}$ の點を通る。

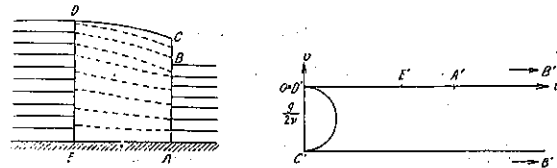
3. 2つの簡単な例

第 7 圖



第 7 圖の様な水平不滲透層と鉛直境界線を有する場合の u, v 面は前節に述べた所によつて圖の右側に示した様な形になる事が知られる。又第 8 圖の様な土堤の場合にも u, v 面は右側に示す様になる。

第 8 圖



4. 境界値問題

$f'(z)$ は考へたる領域内では零にならないから

$$1/f'(z) = e^{\tau + i\psi}$$

と置き得る。 τ 及び ψ はこの半圓及び 2 直線にて圍まれたる面内にて正則なる調和函数である。従つて

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$$

$\bar{f}(z) = u + iv = we^{i\omega} (w > 0), i + i\psi = be^{i\chi} (b > 0)$ とおけば

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{\bar{f}(z)}{u - iv} = \frac{w}{b} e^{i(\omega + \chi)}$$

ω 及び χ は夫々流速及び加速度の方向角である。

$$\therefore \psi = \omega + \chi, \quad \tau = \ln w - \ln b$$

(1) 不滲透層は 1 つの流線であるから

$$u + iv = (\partial \psi / \partial s) e^{i\alpha} = \pm w e^{i\alpha}$$

従つて $\omega = \alpha + n\pi$ となり $\partial \psi / \partial s > 0$ ならば m は偶數, $\partial \psi / \partial s < 0$ ならば奇數である。

$$f'(z) = \frac{du - i dv}{dx + i dy} = \frac{d(\pm w e^{-i\alpha})}{ds e^{i\alpha}} = \pm e^{-2i\alpha} \left(\frac{dw}{ds} - i w \frac{d\alpha}{ds} \right)$$

層が直線状ならば $d\alpha/ds = 0$ であるから

$$f''(z) = \pm e^{-2i\alpha} \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad e^{-i\psi} = \sin \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{dw}{ds} \right) e^{-2i\alpha}$$

故に

$$\sin \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{dw}{ds} \right) > 0 \text{ ならば } \psi = 2\alpha + n\pi \quad (n \text{ は偶數})$$

上の 2 つの例にては何れも $\alpha = 0, \frac{\partial \psi}{\partial s} = u \geq 0, \frac{dw}{ds} \geq 0$ であるから $\psi = 2m\pi$ となる。

(2) 水域の境界 $\psi = \text{const.}$ には $u = \pm w \sin \alpha, v = \mp w \cos \alpha, u - iv = \pm w (\sin \alpha - i \cos \alpha) = \mp i w e^{i\alpha}$ である。 \pm 又は \mp の中上の方は \bar{v} の方向が s の方向から右に向つてゐる場合である。

$$f''(z) = \frac{d(u - iv)}{d(x + iy)} = \mp \left(-w \frac{d\alpha}{ds} + i \frac{dw}{ds} \right)$$

境界線が直線ならば

$$f''(z) = \mp i \frac{dw}{ds} = \pm \frac{dw}{ds} e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$\therefore \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

\bar{v} の方向が s の方向から右に向ひ $dw/ds > 0$ なる時に n は偶數である。而て上の例にては AB 上にて \bar{v} は右に向ひ $dw/ds > 0$ であるから n は偶數となり

$$\psi = \frac{\pi}{2} + 2m'\pi$$

第 2 の例に於ては DE 上にては \bar{v} が左に向ひ $dw/ds > 0$ であるから n は奇數となり

$$\psi = -\frac{\pi}{2} + 2m''\pi$$

(3) 自由水面は $\psi = \text{const.}$ であり, $u - iv = \pm w e^{-i\alpha}$ の符號は流速が s の方向と一致する時に $+$ である。

$$w^2 = u^2 + v^2 = -\frac{g}{v}$$

であるから

$$du = -\frac{dw}{u} \left(v + \frac{g}{2v} \right)$$

之と $dy/dx=v/u$ なる事より

$$f'(z) = \frac{dv}{dx} \frac{-\frac{1}{u} \left(v + \frac{g}{2v} \right) - i}{1 + i \frac{v}{u}} = \frac{dv}{dx} \frac{-\left(v + \frac{g}{2v} \right) - iu}{u + iv}$$

$$\therefore f''(z) = \frac{dv}{dx} \frac{2nv + u \frac{g}{2v} + i(u^2 - v^2 - v \frac{g}{2v})}{\frac{gv}{v}}$$

$$u = \frac{g}{2v} \sin \gamma = \frac{g}{v} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$v = -\frac{g}{2v} (1 - \cos \gamma) = -\frac{g}{v} \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

とおけば

$$e^{-\tau - i\vartheta} = f''(z) = -\frac{dv}{dx} \frac{e^{\frac{3}{2}\gamma i}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\therefore \vartheta = -\frac{3}{2}\gamma + n\pi$$

$\frac{dv}{dx} \sin \frac{\gamma}{2} < 0$ の時には偶数である。上の例に於ては $\sin \frac{\gamma}{2} \geq 0, \frac{dv}{ds} > 0, \frac{dx}{ds} < 0$, 故に $\frac{dv}{ds} \sin \frac{\gamma}{2} < 0$: 従つて圓の弧の上にては

$$\vartheta = -\frac{3}{2}\gamma + 2m'\pi$$

(4) 滲透面にては $u \cos \alpha + v \sin \alpha = -\frac{g}{v} \sin \alpha$

$$\therefore dv = -du \operatorname{ctg} \alpha + u \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\therefore \frac{du - idv}{dx + idy} = \frac{du(1 + i \operatorname{ctg} \alpha) - iu \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}}{dse^{i\alpha}}$$

$\alpha = \text{const.}$ ならば

$$f''(z) = e^{-\tau - i\vartheta} = \frac{du(1 + i \operatorname{ctg} \alpha)}{ds e^{i\alpha}} = \frac{du}{\sin \alpha ds} e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)}$$

$$\therefore \vartheta = -\pi/2 + 2\alpha + n\pi$$

$du/(\sin \alpha ds) > 0$ の時に n は偶数である。何れの場合にても $\alpha = \pi/2, \sin \alpha = 1, du/ds < 0$ であるから n は奇数となり

$$\vartheta = -\pi/2 + 2m''\pi$$

5. m, m', m'', m''' 及び m^{IV} の決定

茲には ω 及び χ の物理學的の意味から $\omega + \chi = \vartheta$

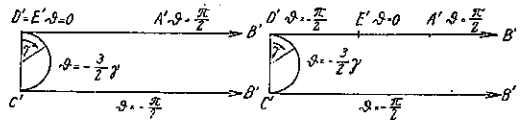
の値を定め之より m, m' 等を決定した。その結果は

$$m = m' = m'' = m''' = m^{IV} = 0$$

各境界面の ϑ の値は第 9 圖に示す。

第 9 圖

例 1 例 2



6. 問題の解

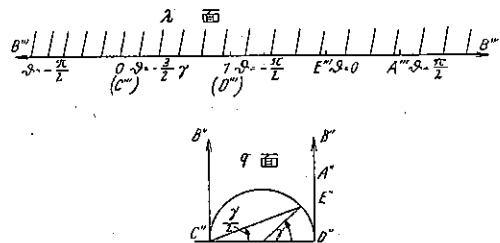
u, v 面内にて u 軸についての鏡像 $u-iv$ を作り、之を v/g 倍して OC' の長さを 1 にする。次にこの圖を正の方向に 90° 廻轉し、1 だけ正の方向に移動する。この時の變數は

$$i \frac{v}{g} (u - iv) + 1 = v \frac{v}{g} + 1 + i \frac{v}{g} u = q$$

更にこの q 面を modul 函数 $\lambda(q)$ を用ひて上半面に寫像し、 $\lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1, \lambda(i\infty) = -\infty, \lambda(1+i\infty) = +\infty$ となる様にする。

境界値は常數であるからそのまま移される。(第 10 圖には第 2 の例の場合を示す。) $0 < \lambda < 1$ に於ける境界値は $\vartheta = -\frac{3}{2}\gamma$ であるが各點の位置は $\lambda = \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\gamma}\right)$ とすべきである。

第 10 圖



ϑ の境界値から函数 $\tau + i\vartheta$ を決定する爲に先づ上半面に對して次の Poisson 積分を計算する。

$$\begin{aligned} \vartheta - i\tau &= -i\tau_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) \frac{(\lambda t + 1) 2dt}{(t - \lambda)(1 + t^2)} \\ &= -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) \left[\frac{1}{t - \lambda} - \frac{t}{1 + t^2} \right] dt \end{aligned}$$

但し τ_0 は任意である。A''' 及び E''' に於ける λ の値を夫々 a 及び b とすれば第 2 の例に対しては

$$\begin{aligned} \vartheta - i\tau = & -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \left\{ -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda t + 1}{(t-\lambda)(1+t^2)} dt \right. \\ & - \frac{3}{2} \int_0^1 \gamma(t) \frac{\lambda t + 1}{(t-\lambda)(1+t^2)} dt \\ & \left. - \frac{\pi}{2} \int_1^b \frac{\lambda t + 1}{(t-\lambda)(1+t^2)} dt + \frac{\pi}{2} \int_a^\infty \frac{\lambda t + 1}{(t-\lambda)(1+t^2)} dt \right\} \end{aligned}$$

第 1 の例は茲にて $b=0$ とせるものである。

$t(1+t^2)$ を含む項は實数の $\vartheta(t)$ に対しては常數であるから有限の積分限界の時は之を $i\tau_0$ の中に含ませて

$$\begin{aligned} \vartheta - i\tau = & -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \left\{ -\frac{3}{2} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda} \right. \\ & - \frac{\pi}{2} \int_1^b \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{1}{t+\lambda} \right) dt + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t+\lambda} \\ & \left. + \frac{\pi}{2} \int_b^a \frac{dt}{t+\lambda} + \frac{\pi}{2} \int_a^\infty \left(\frac{1}{t-\lambda} + \frac{1}{t+\lambda} - \frac{2}{t} \right) dt \right\} \end{aligned}$$

最後の積分の $-2/t$ の項をも τ_0 の中に含ませて

$$\begin{aligned} \vartheta - i\tau = & -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \left\{ -\frac{3}{2} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} \log \frac{\lambda-1}{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda} \right\} \end{aligned}$$

従つて

$$\begin{aligned} f'(z) = & e^{-\tau-i\vartheta} \\ = & e^{-\tau_0} \sqrt{\frac{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}{\lambda-1}} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda}} \end{aligned}$$

$\lambda = \lambda(q)$ は $u-iv = f'(z)$ の函數であるから

$f'(z) = F(f'(z))$ となる。

$$\begin{aligned} z = & \int \frac{d(u-iv)}{F(u-iv)} = \int e^{\tau+i\vartheta} d(u-iv) \\ = & C \int \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda}} d(u-iv), \end{aligned}$$

$(C = e^{\tau_0})$

$\sqrt{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}$ は $0 < \lambda < a$ にては正の實數, $\lambda > a$ にては負の虚數, $1 < \lambda < b$ 及び $\lambda < 0$ にては正の虚數である。従つて $J(\lambda) > 0$ の様な複素數の λ に對する符號も自ら判明する。 $\lambda > a$ の時はこの積分値は有限値を持ち、 z 面の原點を A に置けば

$$z = C \int_{\lambda=a}^{u-iv} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda}} \frac{d(u-iv)}{\sqrt{\frac{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}{\lambda-1}}} = \vartheta(\lambda)$$

之に modul 函數 $\lambda = \lambda(q)$ 及び $q = 1 + i \frac{z}{g}(u-iv)$, $t = \lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\gamma} \right)$ の關係を代入すれば問題は解かれたこととなる。

尙この解の中に含まれる積分は

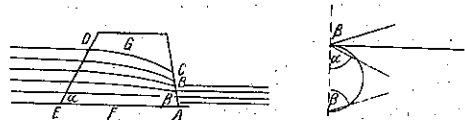
$$\begin{aligned} \int_0^1 \gamma(t) \frac{dt}{t-\lambda} = & \pi \log \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda} - 2(1-2\lambda) \\ & \times \int_0^{\frac{1}{2}} \arctg \left(\frac{1}{\pi} \ln 16 - \frac{1}{\pi} \ln t \right) \frac{dt}{(t-\lambda)(1-t-\lambda)} \end{aligned}$$

この特異點は $\lambda = 1/2$ のみである。

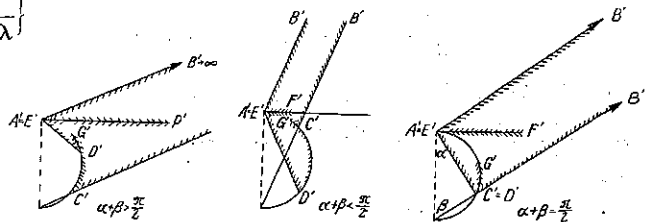
7. その他の例

一例として第 11 圖の如き形の土堰堤の問題の u, v 面の寫像を示した。

第 11 圖 (a)



第 11 圖 (b)



(本間 仁 抄譯)

流速水頭の補正に就て

(Morrrough P. O'Brien and Joc. W. Johnson. "Velocity-Head Correction for Hydraulic Flow." Eng. News-Record. August 16, 1934 page 214.)

流速水頭が水深若くは水面勾配の低下と、同次(same order)である場合、水路の色々の問題を解くのに、平均流速に基いて行ふ一般の方法は、どうも不充分的やうに思はれる。言ふまでもなく流速水頭は水理學の問題に用ひられてゐるやうに、水流に垂直な断面に於て、

単位重量 (unit weight) に對する平均運動のエネルギーに等しい。然るに平均流速を用ひると何時も實際より小さい値となる故、之が補正の計算方法に就て Rehbock 氏, Koch 氏, Carstanjen 氏及びその他の諸氏によつていろいろと論ぜられて居る。併しながらその利用されて居るといふ點になると未だ指を折る程しかない。

今運動のエネルギー係数の解法に當り次のやうに置く。

- V = 任意の點の流速 $V_m = Q/A$ = 平均流速
- Q = 單位時間の流量 A = 斷面積
- w = 水の單位重量 g = 重力の加速度
- h_v = 流速水頭
- e = 最大流速と (平均流速 - 1) との比
- α = 運動エネルギー係数或は流速水頭係数
- β = 運動量係数 b = 水面の幅

水路の或る斷面の微分面積 da に於ける流速を v とすると、此の面積を通過する流量は vda となり従つて單位時間に運ばれる運動のエネルギーは

$$\frac{w v d a V^2}{g} \dots \dots \dots (1)$$

である。ところで單位時間に斷面を通過する單位重量の水の平均運動のエネルギーが本當の流速水頭なのであるから

$$h_v = \frac{w \int_0^A v^3 da}{w A V_m} \dots \dots \dots (2)$$

然し平均流速から、流速水頭を求める方法に依るのが便利であるから、之を利用するために、補正率 α といふものが考へ出された。即ち

$$h_v = \alpha \frac{V_m^2}{2g} \dots \dots \dots (3)$$

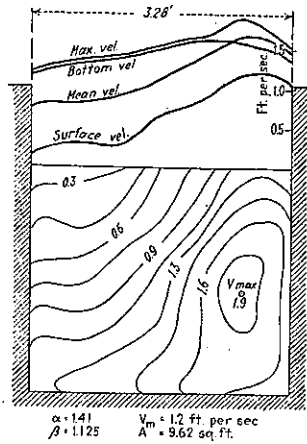
(3) 式を (2) 式に代入すると

$$\alpha = \frac{\int_0^A v^3 da}{V_m^3 A} \dots \dots \dots (4)$$

(4) 式の デイメンション (dimension) から知られる通り α は唯流速圖の形の如何によつてのみ定まるものである。

直接實測した流速分布圖から α を求めるには、先づ等流速線圖を畫いて各等流速線内の面積を測り、次に各面積に對する v^3 の積算曲線 (mass curve) を作るのである。そうすると $\int_0^A v^3 da$ の値はその積算曲線の面積を測つて得られる。第 14 圖は第 13 圖の斷面に對する積算曲線を表はしてゐる。

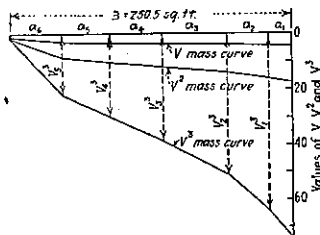
第 12 圖



第 13 圖



第 14 圖



天然水路や樋其の他種々の水路に就いて得た α の値は表に示されてある (表は省略)。

Rehbock 教授の α を求める近似方法に就て述べて見るに、之は前述の積算圖を示すやうな直線を畫くやり方で、大體次の式に等しい。

$$\alpha = 1 + e^2 \dots \dots \dots (5)$$

上式の ϵ は最大流速 $= (1+\epsilon)V_m$ の ϵ に相當する數値である。

Rehbock 教授の方法は、表に示されて居るやうに、圖解法程正確なものではないが、エネルギー補正の重要なことは之によつてもよく解かる。表に記載されてあるものの中3つはその水深が限界水深より小さくて α を求める資料としては不適當である (矩形の水路に對する限界水深は $\sqrt[3]{Q^2/g b^3}$ なる故)。

表に示されて居るやうに天然水路に於ける α の最大値は 1.95 で、之は Rhine 河の橋梁下流 1 200 ft のところの横斷線内の流速に相當する。換言すれば此處の河川斷面の流速水頭の補正は 35% を要する譯である。又 Lindquist 氏の行つた實驗によると α は之より更に大である。

又一般に跳水 (hydraulic jump) や水路に於ける上下波、その他の現象に關するその運動量は、平均流速から斷面の流速分布に對する補正を減じて求められて居るが、正確には斷面を通過する全運動量を用ひなければならぬ。

或る任意點の單位重量の運動量は wv/g で、 da なる微分面積を通過する流量は vda である。故に或る任意斷面 A を單位時間に通過する全運動量は

$$M = \frac{w}{g} \int_0^A v^2 da \dots\dots\dots (6)$$

となる。此の場合にも亦運動量の計算に、平均流速を用ひ、補正係數 β を挿入すると、 α の場合と同様にして (6) 式から

$$M = \beta \frac{w}{g} AV_m^3 \dots\dots\dots (7)$$

$$\beta = \frac{\int_0^A v^2 da}{AV_m^3} \dots\dots\dots (8)$$

又同様の假定に従ひ Rehbock 教授の近似方法を用ひると

$$\beta = 1 + \frac{\epsilon^2}{3} \dots\dots\dots (9)$$

となるが β の値は又 (8) 式に基いて圖解法でも求められる。その數値は表に示してある通りである。(5)

及び (9) 式から α と β とが一定の關係にあることが知れる。此の α/β を α の變數として圖に記入すると α/β は次のやうになる。

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0.4(1+1.5\alpha)$$

α の値は β よりも色々の條件に従つて計算されなければならぬ故、水理學の問題でエネルギーと運動量との兩式を用ひるやうな場合、此の關係は假定した α 又は既知の α の値を満足さす β の値を選ぶのに便利である。

前述の通り流速水頭や運動量の補正は多くの水路の問題に對して全く無視する譯に行かぬ場合がある。よつて流速水頭補正を必要とする一般的基準を示すならば流速水頭が Bernoulli の方程式に於て他の項の量と同次 (same order) である場合は何時も使用せねばならないこと。又運動量の係數は運動量の方法で解かれる、あらゆる問題に必要であることである。

流速水頭補正の最も主な應用方面の 1 つは水路に於ける摩擦損失の實測から摩擦係數を求める時である。正確に言へば等速流なるものは殆ど稀で、一般に摩擦損失を測つた上下流端では、その平均流速が等しからず、幾分の違ひがあるものである。若し兩端で流速の分布が一樣ならば α は等しく Chezy 公式に用ひられるエネルギー勾配 (energy gradient) の傾斜は

$$S = \frac{\Delta h_{1-2} - \frac{\alpha}{g}(V_{m2}^2 - V_{m1}^2)}{l_{1-2}} \dots\dots\dots (10)$$

Δh_{1-2} 及び l_{1-2} は 1 及び 2 點間の水面高差と距離とである。上下流端の流速分布状態が水路の彎曲や閘或は他の障礙物で亂されて居ると α なる差のあることは想像し得られるから (10) 式は變へられなければならない。 α を無視し得るのは (10) 式から判斷されるやうに Δh_{1-2} が流速水頭に比し極めて大なる場合に限るのである。

以上の事柄から觀測者によつて、粗度係數に幾分差異のあるのは、此のエネルギー係數を無視してゐるためだらうと思はれる。流速水頭補正の應用は此の外

Bernoulli 公式で解かれる問題にはどれにも利用される。實際屢々遭遇するもので4~40%に及ぶ補正を必要としたり時には100%に及ぶものさへもある。

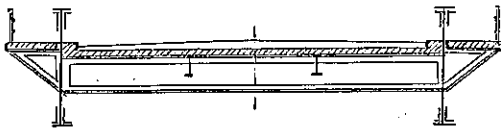
(岡崎三吉 抄譯)

鋼橋に於ける格子型床版

(Hermann Bay „Die Kreuzweise gespannten Fahrbahnplatten bei Stähler-
nen Brücken“ Beton u. Eisen Juli 20,
1934.)

公道橋に鐵筋コンクリート格子型床版を用ふる事の經濟的に有利な事は論を俟たないが、鋼橋の場合には獨逸標準規格(D. I. N. 1075 § 8. 2)に云ふ様に支持桁の不等沈下に注意すべきである。即ち第15圖の如き場合にも縦桁は彈性桁であるから之の沈下は考慮さるべきであらう。但し横桁は横方向の大なる慣性能率により大なる支持力が得られるものと考え。今第16圖の如く横桁の所で板が切れてゐるものとし、幅 a なる板が $x=0, x=a$ なる支持桁の上に載り $y=0, a, 2a, 3a, \dots$ の所に彈性的支持があるものと考え。

第 15 圖



(a) x 軸のみに彈性的支持がある板に一様な荷重 p_0 のある場合

一様な荷重 p_0 を受け $x=0, x=a$ の間に free support されるだけであれば之の撓みは

$$w_1 = \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

で表はされ

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

でコンクリートでは

$$N = \frac{Eh^3}{12} \quad (\nu=0)$$

である。

實際には板は x 軸の支持桁によつて餘計の荷重を受ける。故に $y=0$ の桁が及す荷重による板の撓みを ω_2 とすると

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega'$$

となるわけである。

之の ω_2 が次の如くに表したものと假定する。即ち

$$\omega_2 = \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

a_n は未知數、 $4p_0a^4/N\pi^5$ は ω_1 の式で導かれたもの。

剪力は $P'y = -N \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$

であるから $y=0$ では

$$V_x = P'y = \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4n^3 N\pi^3}{a^3} a_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

となる。剪力の不連続による兩側の差は、丁度、桁の計算で支持柱の兩側の剪力の差が支持柱の反力となると同様に、桁の受ける荷重を表はす。故に V_x による桁の撓みは、 E', J' を桁の常數とすれば

$$\frac{d^4 \omega'}{dx^4} = \frac{V_x}{E'J'}$$

V_x を代入して積分すると、

$$\omega' = \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \left(\frac{4aN}{E'J'\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \cdot a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \right)$$

$y=0$ では板と桁とは同一の撓みであるから、

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega'$$

この式より未定係數 a_n を決める式として

$$\begin{aligned} & \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \left(\frac{4aN}{E'J'\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \cdot a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \\ &= \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{1}{n^5} - a_n \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

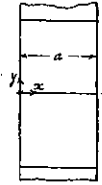
を得られる。この式が x に無關係に成立つ爲には

$$a_n = \frac{1}{n^5} \frac{1}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi} \cdot \frac{1}{n}}$$

これを前の ω_2 に入れると撓む桁上の板の撓み量は、

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$= \frac{4p_0a^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi n}} \right] \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$



第 16 圖

$y=0$ の支持桁に及ぼす荷重は、

$$V_x = \frac{16p_0a^3}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi n}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

(b) $y=0$ に沿うて一定の直線分布荷重のある場合

$x=0, x=a$ で自由に support されてゐる板が $y=0$ に沿うて直線荷重 p を受ける時は、その撓みは

$$\omega_1 = \frac{P \cdot a^2}{N\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) \cdot e^{-\frac{n\pi y}{a}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

である事が知られてゐる。(a) の場合と同様な考へ方をしてこの ω_1 に ω_2 の撓みを加へる。 ω_2 は下の如く假定する。

$$\omega_2 = \frac{P \cdot a^2}{N\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) \cdot e^{-\frac{n\pi y}{a}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

a_n は (a) の場合から

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega' \quad (y=0)$$

$$\omega' = \frac{P \cdot a^2}{N\pi^4} \left(\frac{4aN}{E'J'\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \cdot a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \right)$$

これより a_n は

$$a_n = \frac{1}{n^4} \frac{1}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi} \cdot \frac{1}{n}}$$

結局 $y=0$ に弾性桁があつて、この上に p なる直線荷重のある板の撓みは、

$$\omega = \frac{P \cdot a^2}{N\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi} \cdot \frac{1}{n}}\right) \times \left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) \cdot e^{-\frac{n\pi y}{a}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

板により桁に及ぼす荷重は

$$V_x = \frac{4p}{a\pi} \sum \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{4aN}{E'J'\pi n}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

撓曲率、捩力率は既知の式

$$m_x = -N \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

$$m_y = -N \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

$$m_{xy} = -N \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

から得られる。但しコンクリートでは $v^2=0$

以上得られた結果から桁が撓む場合の構造を計算する事が出来る。又 a_n より板と桁との相互作用の状況の特性を知る事が出来る。即ち若し $E'J'=\infty$ で桁が無限に強い場合を考へると、 $a_n = \frac{1}{n^4}$ となり

$$V_x = \frac{4p}{a\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

これは $\frac{p}{a}=p_0$ を Fourier 級数で展開したものに外ならない。即ち之の場合は荷重 P は全部桁が受ける。又他の極端な場合として $E'J'=0$ とすると、

$$a_n = 0$$

$$V_x = 0$$

となり桁の作用は無で、唯板が直線荷重を受ける場合になる。一般の場合には a_n は $\left(0 \sim \frac{1}{n^4}\right)$ の間にある。

Längsträger として鐵が用ひられる場合には従來の計算の如く荷重が全部梁によつて受けられるとすれば、NP 30~34 の断面で充分である。又板の幅が 3.0~5.0 i.M. で厚さが 20 cm i.M. であると

$$\frac{4aN}{E'J'\pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{E}{E'} \cdot \frac{4ah^3}{12J'\pi} \cdot \frac{1}{n} \approx \frac{3}{n}$$

で

$$a_n = \frac{1}{n^4} \frac{1}{1 + 3/n}$$

$y=0$ の荷重は

$$V_x = \frac{4p}{a\pi} \sum \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

これに依つて見ると、桁の受ける荷重は、板と桁とが上記の強さの関係である場合には計算に用ひた荷重の數分の一に過ぎない。即ち桁は強すぎる。

より多くの荷重を受けさせるには桁を更に硬くすればよい。即ち高くすればよいが鐵の高いものは應張力に對して over strength となり不經濟である。故に鐵の桁の代りに Eisenbetonträger を用ふると $d=60$ cm ならば

$$\frac{4aN}{E'J'\pi} \cdot \frac{1}{n} = 0.3/n$$

之より

$$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+0.3/n}$$

$$V_w = \frac{4p}{a\pi} \sum \frac{1}{n} \frac{1}{1+0.3/n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

て之は $E'I = \infty$ とした

$$V_w = \frac{4p}{a\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

に大變近い。即ち同時に之は經濟的な桁である事になる。これから得られた結果は、鋼橋の床版で鐵筋コンクリートの桁を縦桁として用ふると、格子型床版は此の場合機まぬ周邊支持桁の上に載つてゐると見做してよい。これは普通の格子型床版の計算法でよいと云ふ理論的根據を與へる。(糸川一郎 抄譯)

道路橋床版の彎曲率の算定法

(Robert B. B. Moorman "Determination of the Bending Moment of Highway Bridge Slab" Eng. News-Record July 19, 1934.)

數多くの同型の構造物を設計する場合には、この中の或る項目を簡易化してしまふ事が望ましい。一例として公道橋床版の彎曲率の決定に就いて此の簡易化が次の如くに行はれる。即ち米國聯邦道路委員會(American Association of state Highway officials)の標準方書は荷重 $H-10$, $H-15$, $H-20$ に對する計算の結果を基としたものであるが、右の方書によれば、自動車の車輪荷重は E なる有效幅(此れは交通の方向に平行及び直角なる2つの場合に分たれる)に分布される。第1の場合には有效幅(ft)は、 $E=0.7S+IV$ となる。茲に S は床版の徑間(ft), IV は車輪の幅(ft)である。後部車輪の各々の幅は自動車の全滿載重量の $1/12$ と規定されてゐるから前式は、

$$E=0.7S+H/12$$

となる。 H は自動車の噸數で $H=10$ に對しては 10 となる。

自動車の全重量 P は前輪には $0.1P$ 宛、後輪には $0.4P$ 宛分布され、1車輪の計算荷重は $0.4P$ 或は 0.4

$\times 2000$ lbs. (車輪中心間隔は 6 ft, 車輪間隔は 14 ft) であり、又設計に用ふべき彎曲率は單桁の場合の 80% であるから 1 車輪荷重による彎曲率は、

$$M = \left(\frac{0.4S \times 2000}{0.7S + H/12} \right) \frac{S}{4} \times \frac{10}{8} \times 12$$

$$= 23040 \left(\frac{SH}{8.4S + H} \right) \dots\dots\dots (1)$$

M は彎曲率 (ft-lbs) で床版單位幅に對するものである。この式の適用さるべき最大徑間は次の如くである。

荷 重	床版の徑間
$H-10$	$S \leq 7.38$
$H-15$	$S \leq 6.78$
$H-20$	$S \leq 6.19$

次に第2の場合には $E=0.7(2D+IV)$ であつて D は車輪の中心と最窄の支持點の間の距離であるから若し車輪が徑間の中央にあれば、

$$E=0.7(2S/2+H/12)$$

となる。さうして彎曲率を與へる式は

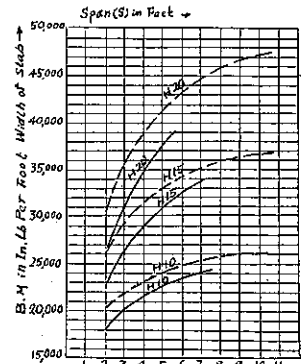
$$M = \left(\frac{0.4 \times H \times 2000}{0.7(S+H/12)} \right) \frac{S}{4} \times \frac{10}{8} \times 12$$

$$= 32914 \left(\frac{SH}{12S+H} \right) \dots\dots\dots (2)$$

この結果は徑間 10.25 ft 以上のものに對しては用ひられない。第17圖は

第 17 圖

方程式 (1), (2) より床版徑間(ft)と單位幅に對する床版彎曲率を示したものである。圖中點線は交通量に直角の方向、實線は平方の方向の彎曲率である。衝擊荷重が更にこの値に加へらるべきは勿論である。(糸川一郎 抄譯)

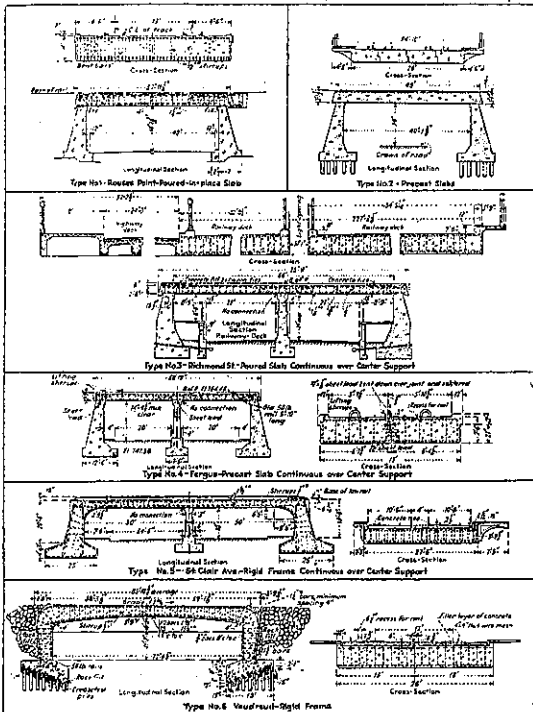


Canadian National Railway に於ける
線路立體交叉構造物

“Railroad Grade-Crossing Structure to Meet Every Requirement.” Eng. News-Record. July 19, 1934.

Canadian National Railway は過去 10 年間に於て、立體交叉工事の激増に遇ひ、該構造物設計の進歩も近時漸く見る可き物がある様になつた。即ち今日其賜物として、次のコンクリート立體交叉構造物の 6 型式がある。之等の型式は斬新な試みとして、プレキャスト・スラブの使用、道床バラストの排棄、コンクリート枕木、木材クッション及び長徑間ラーメン等の組合せによる物で、各方面からの要求に相應し、又實際採用して充分經濟的且能率的である事が解つた。6 型式に就いて簡言すれば

第 18 圖 コンクリート立體交叉構造物の 6 型式



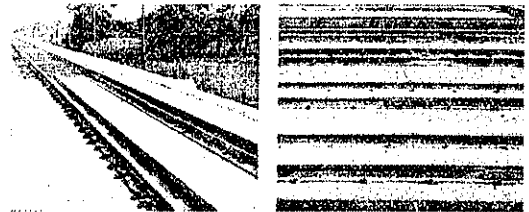
1. 現場打コンクリートの單徑間スラブ (第 18 圖参照) で、重力型橋臺に支承され、單線最大徑間長 60 ft 軌條は直接スラブに締著されて居る。

2. プレキャスト・スラブを用ひ他は 1. に同じ。
3. 現場打連續スラブ但中央橋脚と一體でない。道床バラストなく、コンクリート枕木使用。最大徑間 50 ft, スラブ全長 110 ft 以下。
4. 中央橋脚に固著されない連續徑間プレキャスト・スラブの使用。軌條は 1. 同様スラブに直接締著される。最大徑間 45 ft, スラブ全長 96 ft 以下。
5. 現場打連續ラーメン組、必ずしも中央橋脚と一體をなさない。道床砂利無く、コンクリート枕木使用。徑間長 50 ft 以上 100 ft まで。65 ft 以上の場合スラブは中央橋脚に連結される。
6. 單徑間現場打ラーメンで、軌條はスラブに締著。最大徑間 100 ft。

此外に第 7 型として、中路鋼鈹桁及び各軌條直下にコンクリート T 型縦桁を有するスラブから成る型式がある。軌條はスラブに締著される。以上の各型はすべてクーパー E 60 で設計されて居る。

前記諸型式に共通な特徴は先づ第 1 に道床砂利の完全なる排棄である。

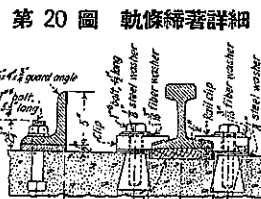
第 19 圖 バラストなきスラブ



(左は軌條はスラブに締著の場合、右はコンクリート枕木使用)

第 3 及び第 5 型では 10'-6" 長のコンクリート枕木を使用して、之をスラブ上に並べ、枕木空間は貧コンクリートで填充して居る

(第 19 圖参照)。軌條は第 20 圖に示す様な構造で枕木に取付けられる。枕木断面は普通 5 in x 12 in だが、曲線部分ではカントを付ける爲、枕木厚を一方に變化させる。配筋は徑 3/4 in



(バラストなきスラブの場合及びコンクリート枕木使用時に共通)

第 20 圖 軌條締著詳細

角形主鉄筋 5本, 1/4in 肋筋 7ヶ所締め。軌條下の溝はクッションとして柵板を入れる爲である。枕木を使用しない場合は、軌條はスラブ上の幅 5 1/4 in, 深さ 1/2 ~ 7/8 in の溝に柵板を敷いて締著されて居る。此柵板は必要なカントの爲に 1 in から 3/4 in 迄を限度として勾配を附されて居る。レール・アンカーは軌條兩側 2 ft 間隔に用ひ、尚し形 5"×4"×3/4" の護輪軌條を敷設した。

次に第 2 の特徴としては、軌條底面以下の寸法即ちスラブ厚さの比較的薄い事である。特に中央橋脚を用ひるか又はスラブと橋臺を一體のラーメンとする場合には、正彎曲率を減じスラブを薄くする事が出来る。一般に立體交叉構造物に於けるスラブ厚さは經濟的見地からして最も重要な方法であつて、空頭 14 ft は固定寸法であるから、軌條底面を出来るだけ下げる爲には、勢ひスラブ厚を最小にしなければならない事になる。前記の型式では道床バラストや枕木を省く事によつて、月並の設計に比べれば自然に 15~18 in は薄くなつて居る。道床バラストの排棄は橋梁上では却つて震動や騒音を減少する様であるが、之は恐らく柵板の有効なクッション作用とスラブの大量コンクリート自身の絶縁作用による物であらう。特に最も有利な點は、修費の殆んど絶無に近い事であつて、スラブ上に溜る塵芥は至極簡単に箒で片附けられるからである。

之等の型式に於て、學術的で而も同時に經濟的であつた操作は、主鉄筋が豫め工場で一定の型に組み上げられて、容易に且正確に現場で使用された事である。之は設計が複鉄筋で其間に曲鉄筋が介在するので、之等を銲接してトラスを作つた。斯くする事は通常の鉄筋組立作業より遙かに時間を節約する事が出来た。

又之等の型式中の幾つかは列車運轉に支障なく築造する事が出来る。實際は此要求が動機となつてプレキャスト・スラブの使用や複線の場合に 2 分施行の可能なラーメン型使用ともなつたのである。

第 18 圖の説明

第 1 型、現場打單徑間スラブ。St. Lambert Quebec

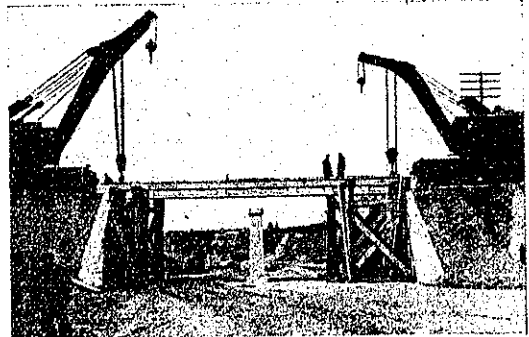
に 3 年前築造。スラブ全長 58 ft, 道路幅 42 ft, スラブ厚 4 ft。

第 2 型、プレキャスト・スラブを 2 臺の蒸氣クレンで列車間合に架設した物。

第 3 型、現場打連續スラブ。全長 73 ft 9 in, 軌條底面以下の寸法 3 ft。スラブ上には 13 本の線路, 24 ft 道路及び兩側に幅 3 ft 9 in と 8 ft の歩道がある。本橋梁はヤードの中央にあるので、將來の線路の模様替へ等を考慮して、軌條をスラブに直接に締著せずコンクリート枕木を使用した。此型に於ける 2 特徴として、スラブを橋臺越しに多少延ばし、排水を橋臺背面を通して市の下水に連絡する排水管に集める様にした。他に橋臺基礎を道路側へ擴張して根掘の量を減じた。

第 4 型、連續プレキャスト・スラブで、全長 58 ft 10 in。1 軌條を 1 スラブで受け、スラブ接合は 3 in の重ね掛りになつて居る。縦目地は 1/2 in (アスファルト・マシチック入) 横目地は 3/8 in 鉛板支承である。接合の上部は水密性の爲幅 10 in, 厚 1/8 in の鉛板が重ねられてスラブに定着されて居る。鉄筋は炭素鋼を使用し、最小極強 80 000 #/in², コンクリートは極強 3 000 #/in³ として居る。

第 21 圖 スラブ架設作業



スラブ架設には 2 臺の 150 ton 蒸氣クレンが使用された。(スラブ 1 個重量 79 ton) 新橋梁の基礎工事中現在線の軌條受臺に使用された足場を左右に延長して、スラブを一時其上に貯へて置き、列車間合に先づ線路と足場を撤却して、スラブを正規の位置に据えた。St. George の例では線路撤却後 2 時間 10 分で架設完

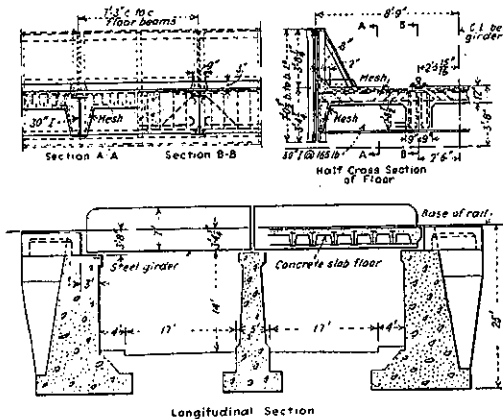
了した。

第5型、本例は St. Clair Ave. in Toronto の場合である。軌條底面からスラブ下端までの寸法は 4 ft 4 in で C. N. R. では外観並に経済的見地よりして、同程度の立體交叉構造物としては、最も優秀な物と確信して居る。施工は到つて簡単で、鐵筋組立 5 日間、コンクリート連続打 72 時間。本設計例はスラブと橋脚を一體としない範圍内での最大徑間だと云はれて居る。

第6型、他の型式に比べて左程に廣く用ひられて居ない。然し C. N. R. では 72½ ft の單徑間ラーメンを Vaudreuil, Quebec に築造した。本型は單線には使用されなくて、スラブ厚も中間橋脚のある場合程には薄くならない。

Vaudreuil の場合は複線を 2 分して施行したが、此結果は對向列車の場合の軀體內の不明な扭じれ應力を避けるのに効果があると思はれる。精密なる研究の結果立體交叉に於けるラーメン型構造物の使用は、他の設計に比して、工費を少くとも 40% 低下する事が出来る様である。本橋の橋臺基礎は一寸異色ある物である。即ち基礎地盤が粘土で、乾燥時は相當の支持力を期待出来るが、水を含むと流動性になるので、クレオソート注入杭を使用し、基礎底面は構造物の全應力の合成方向に直角な平面とした。橋臺背面は 15 ft ~ 20 ft の栗石裏込を施し、土壓を除去し排水を良くした。

第 22 圖 鋼とコンクリートの混用による構造



第7型、之はコンクリートT桁スラブを有する鋼板桁で、道床砂利及び枕木を省略した型で本例は Breslau, Ont. の物である。斜角 25°20' 全長 118 ft. 縦桁として軌條直下にコンクリートT桁を配置して居る。軌條底面から桁下端まで 3 ft 4½ in. 之も假足場上で線路に沿ふてプレキャストされ、列車間合 4 時間にローラー工法で架設された。(内山 實 抄譯)

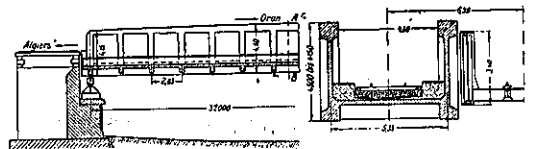
Algier に於ける鐵筋コンクリート鐵道橋

„Eisenbeton-Vollwandträger für eine Eisenbahnbrücke in Algier“ Die Bautechnik, 22. Juni 1934.

従來の下路鋼板桁に接近して、類似の鐵筋コンクリート平行桁が増設せられた。本増設工事は他の橋梁の新設や、既設橋梁の機關車軸重 20 ton に對する補強工事等と共に行はれた。此場合工事材料運搬の容易と、保修費の軽減を考へると、コンクリート造が最も合理的と思惟される。

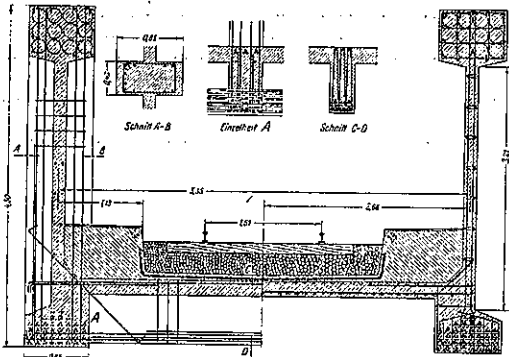
本橋梁は鋼板桁に全く接近して、支間 37 m で Bou-Roumi 川を横斷して居る。桁横斷面は第23圖の如く I 形で、桁腹部は 2.85 m の間隔に横桁に連絡する垂直な補剛材を有し、此補剛材の中間の一斷面で、其厚さは横力に抵抗し得る様になつて居る。

第 23 圖



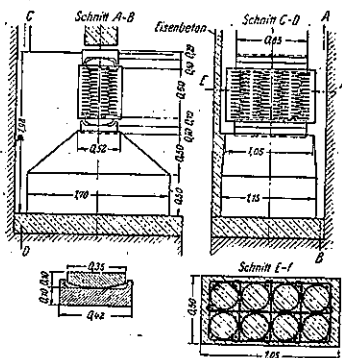
第23圖は鐵筋コンクリート橋の側面圖と兩橋梁の徑間中央斷面であつて、我々は此中央斷面から、兩材料による橋梁の出來榮を直觀的に比較する事が出来る。道床は横桁間に張られた 22 cm 厚の床版に乗つて居て、床版の配筋は主桁横桁同様に第 24 圖に示されて居る。

第 24 圖



主桁は徑間中央で 4.5 m 高、其の應張側はよく錠着する様に直径 26 mm の丸鐵棒を 3 乃至 4 本の小群にして配置して居る。之に對して應壓側では、輪狀の細胞型の結束で補強して居る。丸鐵棒は市場品の長さで使用せられ、其際継手の數は主桁の一断面に於て鐵筋總面積の 1/7 を超過しない様に制限した。徑間中央斷

第 25 圖



面では 38 群、都合 114 本の丸鐵棒が使用されて居る。主桁の上突縁は中央で約 70 cm 高、支承上では 35 cm ある。桁腹部の厚さは支承上の 60 cm から徑間中央の 15 cm まで變化して居る。第 25 圖に示す本支承構造は注目に値する物である。

施行期間 7 ヶ月半、試験荷重の際に觀測された撓度は理論的計算値の約 53% であつて、此差異は計算の際使用せられた材料の彈性係數比の誤差に起因する物と思はれる。尙本橋梁は特に溫度の急變に對して全く信頼するに足る事が解つた。(内山 實 抄譯)

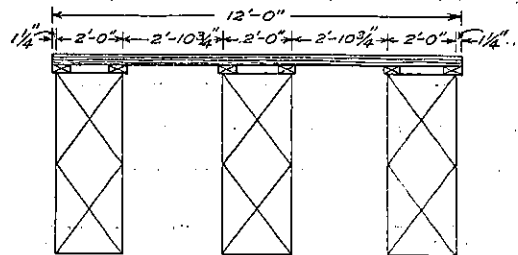
可 搬 組 立 式 軍 用 橋

(The Military Engineer, Vol. XXVI,
No. 149, Sept.-Oct. 1934 より抄譯集録)

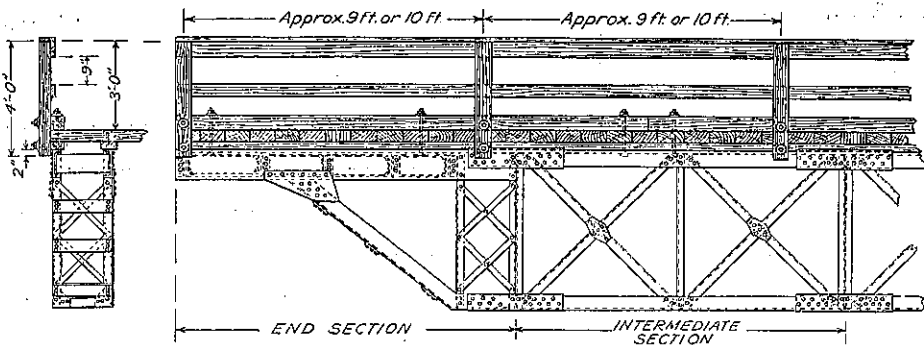
1. 可搬橋の一設計 (C. H. Mason, Portable Highway Bridges)

第 26 圖と第 27 圖に示す組立式可搬橋は、スパン 100 呎までに架設することが出来る。即ちスパン 78 呎

第 26 圖



第 27 圖



までは、第 26 圖に示すように、トラス 3 連を、スパン 89 呎或は 100 呎の場合にはトラス 4 連を架ける。トラスはすべて約 11 呎の長さに區分して製作し、兩端以外の各區分はすべて上下左右同様に製作してあるから、之を一々選り分けて組立てる必要もなく、また上下ひつくりかへしてもよいので、現場で迅速に組立てることが出来る。各區分の接手にはすべてボルトを使用し、弦材を山形鋼で接ぐと同時に、各區分の兩端柱材同志を締付けて、橋梁の剛性を増大する。材料は鋼であつて、接目釘とボルトとを含み、スパン 100 呎のトラス 1 連の全重量は約 6 噸になる。

橋床は木造であつて、先づ厚さ 3 吋、幅 6 吋の板を上弦の上にボルトで締付け、この上に厚さ 5 吋の板を釘付けする。橋梁の横方向の剛性を増すために、各區分について 1 枚づつ床板をトラスの上弦にボルトで締付ける。

スパンを最大 100 呎にすると、橋梁の全重量は約 26 噸になり、これは、G. P. F 式砲とこれを牽引する 10 噸牽引車の荷重に堪える。衝撃作用のない場合には、この倍位の荷重に堪えることが出来る。

(2) 組立式軍用橋に就て (L. E. Moore, Sectional Military Bridges)

著者の知る限りに於て、可搬式軍用橋として完全なもの未だ見付からない。現今多く採用せられて居るトラスの上路橋も、山形鋼の代りに工形鋼を使用したものも、可成り缺點が多い。すべてボルト接手を合はして、之を締付けるのに多大の時間を要するからである。工形鋼の缺點としては、多少なりとも曲りや振れが免れず、随つてボルト接手が仲々うまく行かないことである。トラスの缺點は、ボルト孔をうまく合せるのが困難なことである。

トラスの上弦を直接に車輪の通路に利用することは、面白い着想ではあるが、橋梁上を通る車輛の軌間が區々である場合には駄目になる。従つて何等かの橋床は止むを得ない。

ピン接手も一見よささうではあるが、實際はさうで

ない。英國ではピン接手が使はれて居るが、ピンを打ち込むのが可成り面倒である。

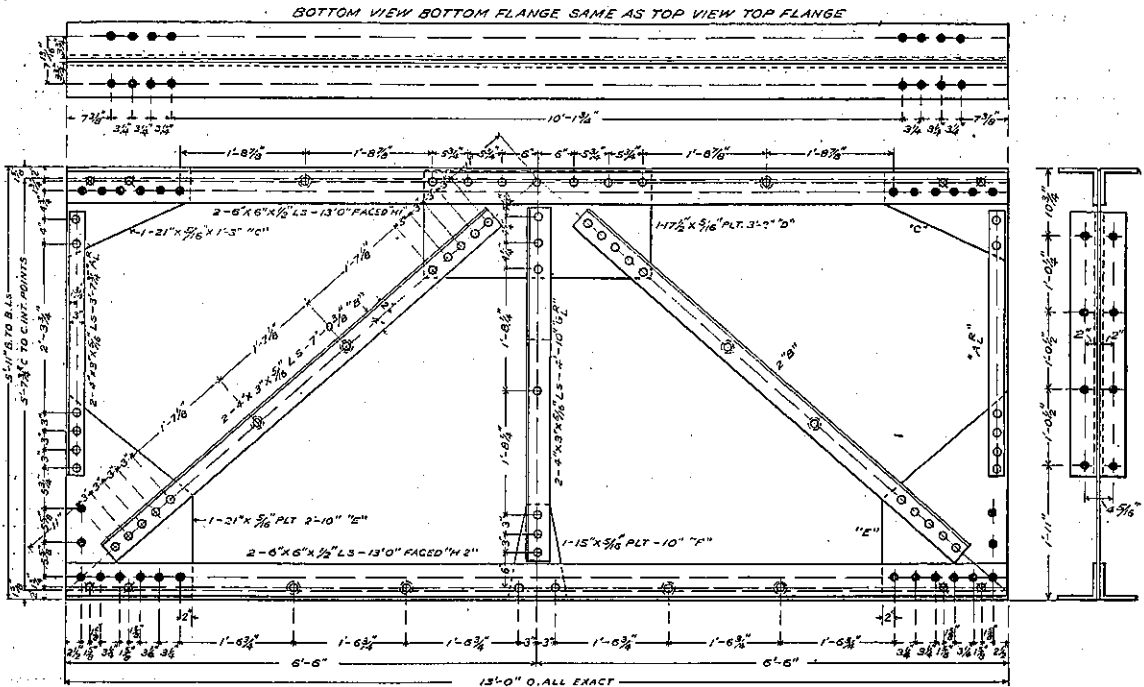
此種の橋梁の設計荷重に就ては屢々論議されるが、これは大して難しい問題ではない。即ち、大抵の軍用車輛が普通の道路橋の上を通過し原野を馳驅すること、假令現在の軍用車輛の實際の荷重を採用しても、兵器の急激な進歩によつて異つたものが出現すべきこと等を考へると、車輪間の 6 呎の軸荷重 20 噸か、或は 100 封度/呎(500 kg/m²)の等分布荷重を考へれば充分である。衝撃荷重としては 50% を採れば充分に安全である。之は世界大戰中に於ける經驗と著者の研究とから得られた結論である。

軍用橋の如く、極めて短期間若くは短時間のみしか使はれないものに對しては、其の許容應力は一般橋梁に比べてずつと高く採つてよい。これはまた橋梁を軽くする上にも必要なことである。且つ設計荷重通りのものが全載されることは殆んど稀有のことだらうから、此種の軍用橋の許容應力として、材料の弾性限度を採用してよいことが結論される。

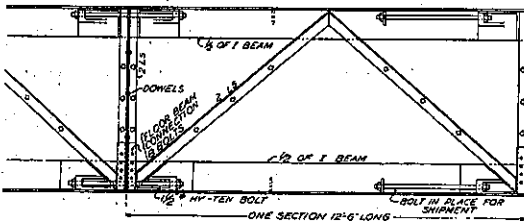
第 28 圖に示すものは、著者が 1920 年に設計したものであつて、特殊鋼を用ひ、40 000 封度/吋(2112 kg/cm²)を許容應力としたものである。弦材は山形鋼 2 つを合せた T 形であつて、此の設計の缺點は、ボルト數が大であること、ボルト孔を合せ難いことである。

第 29 圖は最近の設計であつて、工形鋼を其のウェブの中央で縦に 2 分し、其の半分づつの T 形のものを弦材とし、斜材を之に銲接したものである。此の設計の 1 つの特徴は、弦材の接手を簡單にしたことである。即ち第 29 圖に示すが如く、Hy-ten 鋼で作つた直径 1½ 吋のボルトを使ふのである。これは、運搬中は損傷を避けるために、圖の右方に示すやうに弦材の中に引込んで置き、組立てるときには、片方のナットを外してボルトを隣の區分に差し込み、ナットを締付ければよいのである。此の場合、組み合わせべき兩區分をびつたりくつつけて置くことは必ずしも必要でなく、多少離れて居たり或は位置が狂つて居ても、ナットを

第 28 圖



第 29 圖



締付けることに依つて、自然に正しい位置に締付けられる。兩弦材の接目の面はよく密着する様に仕上げて置く。ボルト孔は、組合せを樂にするために多少ボルトよりも太く作るが、接目板に依る場合と異つて、接手の強さには殆んど影響を及ぼさない。此の方法によれば、2つの區分を接くには單にナット4個を締めればよい丈であるから、組立時間を極度に縮少することが出来る。

最後に材料のことであるが、現在の状態に於ては、アルミニウム或は他の特殊合金よりも、強さの強い鋼の方が適當と思はれる。それは、鋼はストックが澤山あつて容易に入手することが出来、且つ其の取扱、

修繕、加工等が樂であり、また銲接接手を採用し得るからである。

(3) アルミニウム合金を使用する可搬軍用橋 (J. P. Growdon, Portable Aluminum Military Bridge)

茲數年來、構造用アルミニウム合金は、軍事用のみならず Pittsburg の Smithfield Street 橋や、Union Pacific の高速列車の車輛や、其他種々の構造物に利用せられて、いづれも好結果を示して居る。次に述べる橋は、其の重さを輕減するために 27 ST と呼ばれる構造用アルミニウム合金材を使用した。之は普通の構造用鋼材と殆んど同様の各種の形狀寸法の製品があつて、其の物理的性質はおよそ次の通りである。

重 量	2800 kg/m ³
極限強さ	4200 kg/cm ²
降伏點(歪 0.2%)	3500 kg/cm ²
彈性係數	700 000 kg/cm ²
伸(標點距離 5 cm)	12%
ブリネル硬度	118

膨脹係數(1°Cにつき)……0.000022

即ち珪素鋼と同程度の強さであるに拘はらず、其の重さは約1/3である。そして、軍用橋のやうな場合につきものゝ亂暴な取扱を受けても損傷することはない。

第30圖は此の合金材で作つた可搬軍用橋の一般圖であつて、スパンは20呎乃至100呎まで、20呎毎に變化させることが出来、兩端に各20呎のアプローチをつけるから、最大全長140呎になる。荷重としては、第30圖に示すやうにG.P.F式砲と其の牽引車(合計約24噸)をとり、衝擊荷重はその25%とした。之はアメリカ道路橋の標準荷重H20に概當する。

トラスの型式はワレン型の箱形であつて、すべて20呎の長さの區分に分割製作したものを、現場でボルトで組合せ連結する。トラスの上弦の上に直接に幅の廣い溝形鋸を張つて各種車輛の車輪路とし、此の中間に約500kg/cm²の等分布荷重に就て設計した床鋸を張つて、歩兵、馬、其他のものゝ通路とする。之等の鋸はすべて長さ10呎に區分して製作する。之等の床鋸と、20呎毎に設けられる對風構とによつて、橋梁の横方向的剛性は充分になる。

アプローチは高さ10吋の溝形材で作リ、主トラスの兩端にボルトで緩く取付け、多少上り下り出来るやうにして兩岸の地勢に順應せしめる。アプローチの橋床は主徑間のものと同じである。欄干としては直徑1/2吋の鋼ケーブルを利用する。

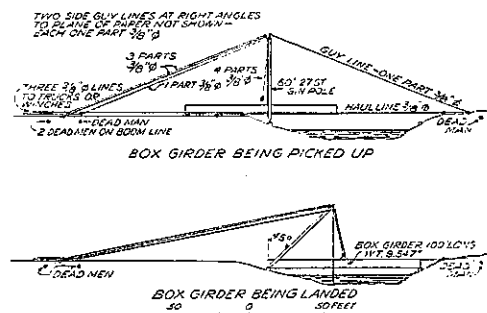
現場組立に使う接目鋸は、運搬中は車輪路の鋸にボルトで取付けて置き、残りのボルトや螺旋廻しの類は之を下弦に作りつけの箱の中に入れて置く。

最大全長140呎にしたとき、橋梁自體の全重量は約13噸、之に架橋に必要な諸裝備を加へると全重量約15噸になり、5噸トラック3臺或は3噸トラック5臺で運搬し得る計算にはなるが、各區分が嵩高であるので普通のトラックでは一寸無理である。それで、全橋梁を2分してその長さを40ftにする。即ち、先づ主スパンのトラスを2區分づゝ連結して長

さ40呎のものを2つ作り、その上に残りのものを積み、此の前部をトラックに、後部を附隨車に載せて所謂渡し積にすると、トラック2臺で全橋梁を運搬し得ることになる。トラックの代りに無限軌道を有する戦車又は牽引車を利用すれば、道路のない原野にも運ぶことが出来る。斯く豫め40呎の長さに連結して置くことは、現場組立の手数を輕減し、また運搬上附隨車は架橋工事に有利に利用することが出来る。

橋梁の自重が小さいから、橋臺には特別の施設は必要でなく、簡単な盛土の土臺で充分である。架橋に先立つては控綱のための埋込控(Dead man)を作る必要があるが、適當な立木があれば之を利用するとよい。次に空梁(Gin pole)を組立て、片側の主トラスの接目を完了すれば直ちに第31圖に示すやうな方法で之を架設し、更に之と同様にして反對側の主トラスを架設する。之が終れば、アプローチを取付け、次に車輪路、通路、欄干等を取付けて架橋を完了するのである。

第 31 圖



架橋を迅速に完了するには、少くとも約40人の勞力が必要であるが、70人位だと更に早くなる。架橋に要する時間は、勿論架橋地點の状態、従事員の熟練と訓練の程度に左右されるが、普通は140人時間位であつて、諸材料が現場に到着して後、約2時間で車馬を通すことが出来る。若し架橋地點の状態がよければ、更に短時間で完了することが出来る。(福田武雄 抄譯)