論 說 報 告

第20卷第10號 昭和9年10月

走行自動車に因る橋桁强制振動の理論

會員 工學士 小 澤 久 太 郎*

Theory of the Forced Vibration of a Bridge caused by the Passage of a Automobile

By Kyutaro Ozawa, C. E., Member.

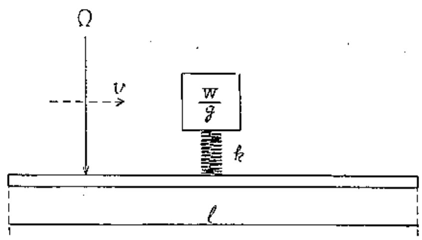
內 容 梗 槪

本文は土木學會誌第19卷第6號所載“スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の强制振動”に於て述べた理論の擴張であつて先づ自動車の振動性態を述べ，然る後自動車の橋桁に與へる影響に就て硏究したものである。

1. 緖

私は本誌第19卷第6號所載“スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の强制振動”なる題下の論文に於て車輛を第1圖の如く假定し Ω なる外力が移行する場合の車輛及び橋桁の振動に就て述べた。自動車は機構的にスプリングを有するを以つて走行自動車の橋桁に與へる影響も亦前論文中に包含さるべきである。然れども自動車を單に第1圖の如く假定する事は些か不合理であつて其處に何等かのモディフィケーションがなければならぬ。

第 1 圖

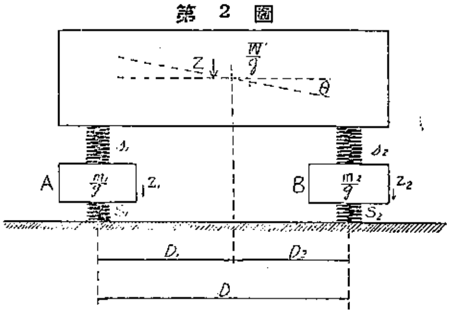


本論文に於ては最初自動車の振動に對する特性を說明し，後かゝる車輛の橋桁に與へる影響に就て硏究せんとするものである。

2. 自動車の振動形態

自動車が路面上を疾走せる時，路面に不陸ある場合には自動車は複雜なる振動をなす。自動車の構造は左右對稱にして且つ重心の高さは轍間距離に比して割合に低きを以つて[1]，自動車が橋面を疾走せる場合の如く左右兩輪に對する路面の不陸が同時に起り且つ自動車の進行が直線的なる時には車體に橫搖は全然起らずして上下動と縱搖とのみを考へれば良いのである。然らば自動車は型式的に第2圖の如く表はす事が出來る。

第 2 圖



今第2圖に於て

W': 自動車車體並に積荷の重量（彈重量）

m_1, m_2: A, B 軸，車輪の重量（非彈重量）

D: 輪軸距

---

* 內務技師 內務省土木局第一技術課勤務

[1] 自動車取締令第6條に車輛の重心の高は空車の場合に於て最大轍間距離の7割以內たる事を規定してゐる。

D_1, D_2： A, B 軸より車の重心までの距離
i： 車體の重心水平軸に對する回轉半徑 $=\left(\dfrac{J'g}{W'}\right)^{\frac{1}{2}}$
J'： 車體の重心水平軸に對する惰性率
S_1, S_2： A, B 軸，輪帶係數
s_1, s_2： A, B 軸スプリングの彈係數
Z： 車體重心の上下變位（下方を $+$ とす）
Z_1, Z_2： A, B 車軸の上下變位（下方を $+$ とす）
θ： 車體重心を中心とせる車體の角變位 ……………………………(2)

とすれば車體及び車軸の振動の方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{W'}{g}\frac{d^2Z}{dt^2}+Z\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}+\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\right)-(Z_1S_1+Z_2S_2)-\theta\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}D_1-\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}D_2\right)=0 \quad \cdots\text{(i)}\\
&\frac{m_1}{g}\frac{d^2Z_1}{dt^2}+Z_1S_1-s_1(Z-\theta D_1-Z_1)=0 \quad \cdots\cdots\text{(ii)}\\
&\frac{m_2}{g}\frac{d^2Z_2}{dt^2}+Z_2S_2-s_2(Z+\theta D_2-Z_2)=0 \quad \cdots\cdots\text{(iii)}\\
&\frac{W'}{g}i^2\frac{d^2\theta}{dt^2}-D_1\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}\right)(Z-\theta D_1)\\
&\qquad +D_2\left(\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\right)(Z+\theta D_2)+(Z_1S_1D_1-Z_2S_2D_2)=0 \quad \cdots\cdots\text{(iv)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

にて表はさる[1]。普通車體の振動週期は車軸の振動週期に比して甚だしく大なるを以つて路面不陸の週期短き時には車軸の振動のみ起り，週期大なる時には車體の振動のみ起る。故に車軸の振動を考へる場合には (2) 式 (ii) 及び (iii) に於て $Z=0$, $\theta=0$ と置けば良いので，然る時には車軸の振動の微分方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_1}{g}\frac{d^2Z_1}{dt^2}+(S_1+s_1)Z_1=0\\
&\frac{m_2}{g}\frac{d^2Z_2}{dt^2}+(S_2+s_2)=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

にて表はされ，その振動週期は各々

$$\left.\begin{aligned}
&Ta_1=2\pi\sqrt{\frac{1}{S_1+s_1}\cdot\frac{m_1}{g}}\\
&Ta_2=2\pi\sqrt{\frac{1}{S_2+s_2}\cdot\frac{m_2}{g}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

にて與へられる。

又車體の振動を考へる場合には Z_1, Z_2 は Z に比して甚だしく小なれば (2) 式 (i) 及び (iv) に於て $Z_1=0$, $Z_2=0$ と置けば良い。然らば車體の振動の微分方程式は

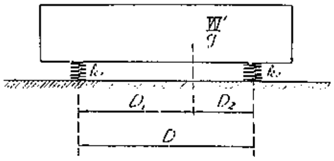
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{W'}{g}\frac{d^2Z}{dt^2}+Z\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}+\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\right)-\theta\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}D_1-\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}D_2\right)=0\\
&\frac{W'}{g}i^2\frac{d^2\theta}{dt^2}-D_1\left(\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}\right)(Z-\theta D_1)+D_2\left(\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\right)(Z+\theta D_2)=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

(1) E. A. Wedemeyer; Automobilschwingungslehre (Sammlung Vieweg, Heft 103/104, Braunschweig 1930), S. 87 參照，同式は本式 $\dfrac{S_1s_1}{S_1+s_1}$, $\dfrac{S_2s_2}{S_2+s_2}$ の代りに s_1 s_2 を用ふ。本式を導くには自動車の車體及び車軸の有する運動の勢力及び位置の勢力を求め Lagrange の式に代入すれば良い。

にて表はさる。(5) 式は H. S. Rowell が自動車の機構を第 3 圖の如く假定して求めた振動の式(1)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{W'}{g}\frac{d^2Z}{dt^2}+Z(k_1+k_2)-\theta(k_1D_1-k_2D_2)=0\\&\frac{W'}{g}i^2\frac{d^2}{dt^2}-D_1k_1(Z-\theta D_1)+D_2k_2(Z+\theta D_2)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

第 3 圖



と全然同じであつて唯 (5) 式中の $\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}$, $\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}$ が (6) 式中にあつては k_1, k_2 となつてゐるのみである。

故に第 2 圖の如き一般の場合に車體の振動を考ふる場合には

$$\left.\begin{aligned}&\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}=k_1\\&\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}=k_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

と置き第 3 圖の如く假定して問題を取扱ふ事が出來る。(6) 式を解くために

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{A}=\frac{k_1+k_2}{W'}g\\&\mathfrak{B}=\frac{-k_1D_1+k_2D_2}{W'}g\\&\mathfrak{C}=\frac{k_1D_1^2+k_2D_2^2}{W'}g\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

と置けば (6) 式は

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{Z}+\mathfrak{A}Z+\mathfrak{B}\theta=0\\&\ddot{\theta}+\frac{\mathfrak{B}}{i^2}Z+\frac{\mathfrak{C}}{i^2}\theta=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

となり，上式に於て更に

$$\left.\begin{aligned}&Z=A\cos(\mathfrak{p}t+\alpha)\\&\theta=B\cos(\mathfrak{p}t+\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

と置いて振動指數 $\mathfrak{p}$ を求むれば

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{p}_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}+\mathfrak{A}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}+\mathfrak{A}\right)^2-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{i^2}+\frac{\mathfrak{B}^2}{i^2}}}\\&\mathfrak{p}_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}+\mathfrak{A}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}+\mathfrak{A}\right)^2-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{i^2}+\frac{\mathfrak{B}^2}{i^2}}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(11)$$

を得。故に Z_1 及び θ は

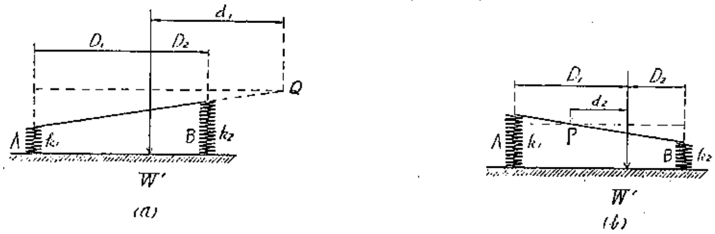
$$\left.\begin{aligned}&Z_1=A_1\cos(\mathfrak{p}_1t+\alpha_1)+A_2\cos(\mathfrak{p}_2t+\alpha_2)\\&\theta=B_1\cos(\mathfrak{p}_1t+\alpha_1)+B_2\cos(\mathfrak{p}_2t+\alpha_2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

にて表はされ，Z_1 θ 共に振動指數 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ を有する 2 つの振動系の合成なる事を知る。

$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ に屬する振動の型は第 4 圖 (a) (b) の如きものであつて P, Q は不動點，d_1 d_2 の絕對値は

(1) H. S. Rowell; Proc. Inst. Automobile Engineers, London, Vol. XII. Part II, (1923) p. 455 私は原論文を見る事が出來なかつたので Timoshenko 著 Vibration Problem in Engineering p. 128 を參照した。

第 4 圖



$$
\left.
\begin{aligned}
|d_1| &= \left| \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}-\mathfrak{A}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}-\mathfrak{A}\right)^2+\frac{\mathfrak{B}^2}{i^2}}} \right| \\
|d_2| &= \left| \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}-\mathfrak{A}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{C}}{i^2}-\mathfrak{A}\right)^2+\frac{\mathfrak{B}^2}{i^2}}} \right| \\
&\text{但} \quad d_1 d_2 = i^2
\end{aligned}
\right\} \qquad \cdots\cdots (13)
$$

にて與へられる。[1]

3. 走行自動車に因る橋桁強制振動

(1) 今 (13) 式に於て $\mathfrak{B}=0$ 即ち

$$k_1 D_1 = k_2 D_2$$

と置かば

$$d_1 = \infty, \quad d_2 = 0$$

となり車體の振動は車體の重心を中心とする回轉振動と，車體全體の上下振動との 2 つに分解し得るのである。而して自動車が橋面を疾走せる時の如く前輪後輪に對する橋面の上下變位が等しき時には自動車の回轉振動を惹起する外力は 0 であつて從つて斯かる時の上下振動の自己振動指數は (11) 式に於て $\mathfrak{B}=0$ と置けば良いので

$$\mathfrak{p}_1' = \sqrt{\mathfrak{A}} \qquad \cdots\cdots (14)$$

にて與へらる。然るに第 1 圖の如き場合には車輛の自己振動指數は

$$p = \sqrt{\frac{kg}{W}} \qquad \cdots\cdots (15)$$

なれば本場合に於ては自動車の機構を第 1 圖の如く假定し且つ

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{kg}{W} &= \mathfrak{A} \\
W &= W'
\end{aligned}
\right\} \qquad \cdots\cdots (16)
$$

と置ける場合と全然等しいのである，(8) 式及び (16) 式より

$$
\left.
\begin{aligned}
k &= k_1 + k_2 \\
&= \frac{S_1 s_1}{S_1 + s_1} + \frac{S_2 s_2}{S_2 + s_2} \\
W &= W'
\end{aligned}
\right\} \qquad \cdots\cdots (17)
$$

なる關係を得。

---

(1) H. S. Rowell 前掲;
Timoshenko; Vibration Problem in Engineering p. 128.

斯くして走行自動車に因る橋桁强制振動を考へる場合には簡單に第 1 圖の如く還元して議論を進める事が出來るのである。但しこの際に於ける外力 Ω は當然

$$\Omega=W'+m_1+m_2 \qquad (18)$$

にて與へられる (以下同斷)。

(2) $\mathfrak{A}\neq0,\ \mathfrak{B}\neq0,\ \mathfrak{C}\neq0,\ \mathfrak{p}_1\cong\mathfrak{p}_2$ とし且つ $t=0$ の時に於て自動車の車體が一樣に下方に u なる變位を受けたとすれば，車體の上下振動及び回轉振動は

$$\left.\begin{aligned} Z&=u\cos\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}t\cdot\cos\frac{\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2}{2}t \\ \theta&=\frac{u}{i}\sin\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}t\cdot\sin\frac{\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2}{2}t \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

にて表はされ振動の初期に於ては

$$\left.\begin{aligned} Z&\fallingdotseq u\cos\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}t \\ \theta&\fallingdotseq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

と置き得。故に斯かる場合には自動車の機構を第 1 圖の如く假定し且つ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{i}+\mathfrak{A}}=\sqrt{\frac{kg}{W}} \\ &W=W' \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

と置ける場合と等しいのである。これより k 及び W を計算すれば

$$\left.\begin{aligned} k&=\frac{1}{2}\left[k_1\left(1+\frac{D_1^2}{i^2}\right)+k_2\left(1+\frac{D_2^2}{i^2}\right)\right] \\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{S_1s_1}{S_1+s_1}\left(1+\frac{D_1^2}{i^2}\right)+\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\left(1+\frac{D_2^2}{i^2}\right)\right] \\ W&=W' \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

となる。但しこれは振動の初期のみであつて振動が次第に進むに從つてこの條件は亂され，その遲速は一に $(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2)$ の値に懸るのである。

(3) 次に一般的場合を考ふるに Rowell の實驗研究の結果に依れば第 4 圖に於て Q 點は B 點に，P 點は A 點に一致すると考へた場合，實驗と非常によく合致する事を示してゐる。[1]然して斯かる場合の振動指數は

(a) B を不動點と考へた場合

$$\mathfrak{p}_1'=D\sqrt{\frac{k_1}{J'+\frac{W'}{g}D_2^2}}$$

(b) A を不動點と考へた場合

$$\mathfrak{p}_2'=D\sqrt{\frac{k_2}{J'+\frac{W'}{g}D_1^2}}$$

にて與へらる。今 $\mathfrak{p}_1',\mathfrak{p}_2'$ の內一つ例へば $\mathfrak{p}_2'$ が橋桁自己振動指數と接し $\mathfrak{p}_1'$ は橋桁自己振動指數と遙か異る場

(1) H. S. Rowell; 前掲
Timoshenko; Vibration Problem in Engineering p. 123.

合には $\mathfrak{p}_1'$ 振動系の質量は考へる必要なく[1]$\mathfrak{p}_2'$ 振動系に屬する質量のみを考へれば良い。故に自動車を第 1 圖の如く假定し且つ

$$\left.\begin{aligned} k&=k_2\\ \sqrt{\frac{kg}{W}}&=\mathfrak{p}_2' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} k&=k_2=\frac{S_2s_2}{S_2+s_2}\\ W&=\frac{i^2+D_1{}^2}{D^2}W' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

とせる場合と全然等値なのである。

又 $\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'$ 共に橋桁自己振動指數と遙か異る場合には自動車の質量は全然考へる必要なく唯自動車全重量のみ橋桁上を移行すると考へし場合と全然等しいのである。

斯くして自動車はそれ自身甚だ複雜なる振動をなすと雖もこれが橋桁に與へる影響を考へる場合には自動車の機構を第 1 圖の如く簡單に假定して計算し得るのである。筆者は近日餘暇を得これ等理論を基礎として實際の橋桁及び自動車に就き實驗を行ひ本邦道路橋衝擊係數算定の參考に資せんとするものである。

---

(1) 拙著；“スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の强制振動” 土木學會誌第 19 卷第 6 號 p. 436 參照。