

## 参 考 資 料

第 20 卷 第 10 号 昭和 9 年 10 月

## 機 械 的 振 動 の 聯 成

(K. Klotter „Kopplung mechanischer Schwingungen“ Ing. Arch. Juni 1934. S. 157.)

## 1. 聯 成 の 様 式

聯成の様式は M. Wien に依つて最初に利用された術語に従へば、加速度聯成(又は慣性聯成)摩擦聯成及び力聯成に分かれる。Wien はこれ等の標示として純粹の型式の特徴を採用した。即ち、微分方程式中の或る項が現はれるか否かと言ふ事である。最近にこれ等に就ての物理的意味を與へるための實驗が行はれた。そしてある聯成の仕方はある系(System)に取つて特有のものであると言ふ事が色々の場合に分かつて來た。それ故に例へば O. Föppl は M. Schuler の注意に於ける追加に於いて單一聯成に就ての例題を與へてゐる。彼は 2 重振子は慣性聯成で 1 つの質量を有する系の横振動は力聯成、軸の上に摩擦で止まつてゐる 2 つの振子は摩擦聯成であると言つてゐる。

この様な事は特定の坐標を利用してのみ言へる事であるのは勿論である。それは保存系に於ては常に、然らざる時は屢々聯成を結局棄て去らす様な主要坐標系のある事を知つてゐるからである。主要坐標系は勿論普通の方法では、或る系をあらはすのに選ばない様な一般坐標系の中にある。

私は下に、ある特定の聯成の仕方に對して、定められる系の中に、その系と他の 1 つの系に對しては、他の 1 つの聯成形式を生ずるのに丁度だけの測り得る坐標を與へ、多くの系に對しては、それを特定の聯成形式を以つて特長づける事が、ある確定した假定の下では、正しいとされるか如き系が存在する事を示さう。この問題に對しての改訂された研究と表現は、私には、上述の表示が論争の餘地を残して棄てられてゐて不明瞭になつて了つてゐるだけに重要である様に思はれる。

## 2. 聯 成 項

振動可能な系に  $f$  だけの自由度があり、その一般坐

標が  $q_1, q_2, \dots, q_f$  であるとする。速さに關係する摩擦力の一乗の項を考へに入れれば、小さな振動の微分方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \dots + a_{1f}\dot{q}_f + b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \dots \\ + b_{1f}q_f + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1f}q_f = 0 \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \dots + a_{2f}\dot{q}_f + b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + \dots \\ \vdots \\ + b_{2f}q_f + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \dots + c_{2f}q_f = 0 \\ \vdots \\ a_{f1}\dot{q}_1 + a_{f2}\dot{q}_2 + \dots + a_{ff}\dot{q}_f + b_{f1}q_1 + b_{f2}q_2 + \dots \\ + b_{ff}q_f + c_{f1}q_1 + c_{f2}q_2 + \dots + c_{ff}q_f = 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

$a, b, c$  は定數である。

等しくない示標  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$  を聯成項と言ふ。そして又常に  $a_{ik} = a_{ki}, b_{ik} = b_{ki}, c_{ik} = c_{ki}$  である。第  $i$  番目、第  $k$  番目の方程式に  $a_{ik}, b_{ik}$ 、又は  $c_{ik}$  があらはれる時には、 $q_i$  と  $q_k$  は加速度に於て、速度に於て、又は振幅に於て聯成してゐると言ふ。又は慣性聯成、摩擦聯成、及び彈性聯成(又は力聯成)と言ふ。

次に保存系の研究のみに限りすべての  $b$  が零に等しいと假定する。若し運動勢力と位置勢力を坐標の函數として與へる處の形を見るならば、聯成項  $a_{ik}$  と  $c_{ik}(i \neq k)$  が何時あらはれるかと言ふ事は直ちに分かる。何故かならば、運動方程式は、Lagrange の式から  $T$  と  $U$  を以つて得られるからである。即ち

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, f) \quad (2.2)$$

$T$  と  $U$  は  $\dot{q}$  と  $q$  の 2 次型式である。 $T$  を純粹の平方の和であるとすれば

$$2T = \sum_i a_i \dot{q}_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, f)$$

であるから、(2.2) に依つて加速度聯成はあらはれない。又  $U$  を平方の和であるとすれば

$$2U = \sum_i c_i q_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, f)$$

であるから振幅聯成はあらはれない。

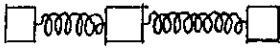
$T$  と  $U$  が同時に平方の和である特別な場合には、主要坐標系の場合である。

3. 開いた鎖又は閉じた鎖

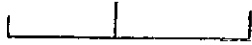
本節では、振動可能な系として、第 2 圖で模型的に示されたバネと質量で出来てゐる配置(Anordnung)を選んで述べる。可能な質量とバネの結合は 2 つの群に分けられる。

a). 第 3 圖に於ける配置 總ての中、質量に、あるものには 2 つのバネがつき、端の質量には常に一つのバネが付くもの。これを開いた鎖と稱へる事が出来る。

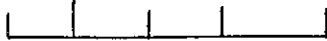
第 1 圖 質量とバネより成る振動子



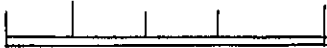
第 2 圖



第 3 圖



第 4 圖



第 5 圖



b) 第 4 圖に示された如き配置、閉じた鎖 總ての質量は、2 つのバネの間にある。この第 2 の群には例へば第 5 圖 a, b が閉じた鎖を要素に持つてゐる様なすべての配置を數へる事が出来る。一般的特徴としてこの群に於て結合されてゐる系はバネの数が  $f+g$  で自由度の數  $f$  よりも多い。故に  $g$  だけのバネは餘分であると言ふ事がある。

開いた鎖と單純に閉じた鎖 ( $g=1$  第 3 及び第 4 圖) は特別な役割をする。即ち 1 つの質量を持つた絲の縦又は横振動、1 つの質量を持つた棒の縦振動、1 つの振り振動をやつてゐる廻轉質量を持つた棒及び數重振子は、止め方に依つて開いた鎖か單純の閉じた鎖に對

應する。全く固定點がないか又は 1 つのそれがあつた時には、その絲は開いた鎖と同値で 2 つの固定點で止められてゐる外には、單純な閉じた鎖と同値である。何となれば、1 つの固定點は、非常に大きな質量に相當し、2 つの固定點は等しい質量に屬するからである。

引用した系(糸、振子等)では、一般に彈性的の反力(zurückführende Kraft)は 2 つの相隣れる質量(又は廻轉質量)の振幅の差に比例する。棒の横振動に對しては、これ等の示標はない。横振動をやつてゐる棒は、1 つ以上の餘分のバネ ( $g \geq 2$ ) の配置に依つてあらはされる。

私は、今開いた鎖の運動方程式は坐標軸の選び方で振幅聯成又は加速度聯成になり閉じた鎖の運動方程式は振幅聯成にはならないと言ふ事を示さう。

a). 1 つの  $f$  箇の自由度を有する開いた鎖は、 $f$  箇のバネと、 $f+1$  箇の質量を有し、その中の 1 つは非常に大きく固定點とする事が出来る。この様な系をしつかりきめるために、(測り得べき)坐標としてそれ等の質量の 1 つ  $m_k$  の静止點からの變化  $x_k$  を選ぶ事が出来る。しからば、 $x_0$  から  $x_f$  までの  $f+1$  箇の坐標がある。勢力は次の如くなる。

$$2T = \sum_{i=0}^f m_i \dot{x}_i^2, \quad 2U = \sum_{i=1}^f c_i (x_i - x_{i-1})^2$$

故に運動方程式は振幅に於て聯成されてゐる。

もう 1 つの坐標の取り方は、バネの伸張(相對變位)  $\xi_i$  より  $\xi_f$  までである。それは絶體變位  $x_0$  より  $x_f$  までと次の様に關聯してゐる。

$$\xi_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, f) \dots (3.1)$$

すると 
$$2U = \sum_{i=1}^f c_i \xi_i^2$$

$T$  を作るには  $f+1$  箇の  $x_i$  が  $f$  箇の  $\xi_i$  であらはされなければならぬ。それには、規定として(3.1)の  $f$  箇の方程式がたち、又  $m_0 \rightarrow \infty$  とすれば重心が  $x_0 = 0$  になるから重心方程式  $\sum_{i=0}^f m_i \dot{x}_i = 0$  が成り立つ。これ等は  $f+1$  箇の方程式であるから、これから  $f+1$  箇の  $x_0$  より  $x_f$  までを算出する事が出来る。それは  $\xi_i$  の

集合となるから、 $T$  は次の形となる。

$$2T = \sum (\text{集合})^2$$

運動方程式は、これ故に今度は、加速度に於て聯成された。數重振子は開いた鎖に等値であるからその運動方程式は O. Föpple と M. Schuler の追加に於けると反對に加速度に於てよも、振幅に於てよも好きな様に聯成される。最初の場合角速度  $\varphi$  を、第 2 の場合には垂直線よりの距離  $x$  を坐標に選んだので両方に測定し得る量である。

b). 閉じた鎖と閉じた鎖を含む配置は餘分のバネを有する。

(自由度の數以上の) それは  $f+g$  箇のバネと  $f+1$  箇の質量より成る。その質量の 1 つは再び非常に大きくなる事が出来る。次に又絶體變位  $x_0$  より  $x_f$  を坐標として選ぶと、開いた鎖の場合と同様に

$$2T = \sum_{i=0}^f m_i \dot{x}_i^2, \quad 2U = \sum_{i=1}^{f+g} c_i (x_i - x_0)^2$$

を得るから、運動方程式では變位聯成である。又茲で相對變位を坐標に選ぶ事に依り變位聯成を追ひ出さう。それには  $U$  を平方の和として得るには  $f+g$  箇の坐標  $\xi$  を導入すれば、

$$2U = \sum_{i=1}^{f+g} c_i \xi_i^2$$

となる。 $\xi$  は常に 2 つの値  $x_n$  と  $x_{n+1}$  の差である。 $T$  も  $\xi$  の項で書くためには、 $x$  の  $f+1$  箇の値を  $\xi$  を以つて置き代へねばならぬ。さて重心方程式を含めて、 $f$  箇の  $\xi$  を  $f+1$  箇の  $x$  であらはす事は充分出来る。餘つた  $\xi_{f+1}$  より  $\xi_{f+g}$  は  $T$  の中に入つて来ない。それ故に  $U$  の中でも  $\xi_1$  より  $\xi$  までのおき代へねばならない。故に  $U$  の中には再び混合乘積があらはれるから餘分のバネが存在するならば(閉じた鎖)運動方程式から振幅聯成は追ひ出せない事になる。

2 つの固定點を有する總ての糸及び横振動をする棒は閉じた鎖と同値であるからこの配置は若し測定し得べき坐標のみを許すならば、確かに振幅聯成と見る事が出来る。

#### 4. 摩擦

一步を進めて速さの 1 乗に比例する逸散力 (dissipative Kraft) を加へる。運動方程式の一般に取る形は (2.1) 式に與へてある。又聯成項  $b_{ik}$  が 2 次型式を作る時にあらはれる事も知つてゐる。Rayleigh の導入した逸散函数 (Dissipationsfunktion) を用ひて

$$F = \frac{1}{2} \sum_i k_i v_i^2, \quad v = v_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f)$$

とすると Lagrange の方程式は次の様になる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, f) \quad (4.1)$$

$F$  が選ばれた坐標の微分係数の平方の和であらはされるならば、速さに於ける聯成はない。 $F$  が坐標の集合の微分係数の平方を含むならば Lagrange の式は聯成項を與へる。

摩擦は  $U$  又は  $T$  を平方の和とする様な坐標の微分係数に比例する様になり得る。さうすると  $F$  は、同時に、 $U$  又は  $T$  と共に平方の和となり速度聯成は振幅聯成又は加速度聯成と同時に消えて了ふ。だが又  $T, F$  及び  $U$  が外の坐標に對して時には純粹の平方の和になる場合があり得る。それ故に時には、この 3 つの坐標の中の 1 つに對しては、他の 2 つの聯成が残ると云ふ時他の 1 つの様な聯成様式は消えて了ふ。

#### 5. 例: 2 重振子

2 重振子は特に簡單でして、3 つの測定し得る坐標の形の一つ一つに對して 1 つの聯成様式が消えると云ふ様な糸の、種々の應用に對して重要な例である。

方程式を簡單にするために糸の振子 (數學振子) を調べる。3 つの坐標は、

- 兩方の質點の垂直軸からの變位  $x_1$  及び  $x_2$
- 垂直線に對する 2 つの糸の傾角  $\varphi_1$  及び  $\varphi_2$
- 角の差  $\psi_1$  及び  $\psi_2$

互ひに坐標の間を結び付ける方程式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \varphi_1 \\ x_2 &= l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 \end{aligned} \right\} \dots (5.1) \quad \left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_1 \\ \varphi_2 &= \psi_1 + \psi_2 \end{aligned} \right\} \dots (5.2)$$

$T, U$  及び  $F$  の形はこれ等の坐標のいづれかに對し

て平方の和となる。即ち

$$\left. \begin{aligned} 2T &= m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \\ 2U &= g[(m_1 + m_2)l_1 \varphi_1^2 + m_2 l_2 \varphi_2^2] \\ 2F &= k_1 \psi_1^2 + k_2 \psi_2^2 \end{aligned} \right\} \dots (5.3)$$

但しすべての絞  $O$  及び  $I$  に於て相対角速度に比例する摩擦のモーメント  $k\psi$  を仮定した。

すべての 3 つの形を坐標様式のどれかで書けば、次の事が分かる。

a)  $x_1, x_2$  で

$$\left. \begin{aligned} 2T &= m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \\ 2U &= g \left[ (m_1 + m_2) \frac{x_1^2}{l_1} + m_2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{l_2} \right] \\ 2F &= k_1 \left[ \frac{\dot{x}_1}{l_1} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{\dot{x}_2}{l_2} - \dot{\omega}_1 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right]^2 \end{aligned} \right\} \dots (5.4)$$

故に運動方程式には加速度聯成はなく速度聯成と振幅聯成があらはれる。

b)  $\psi_1, \psi_2$  で

$$\left. \begin{aligned} 2T &= m_1 l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + m_2 [l_1 \dot{\psi}_1 + l_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)]^2 \\ 2U &= g[(m_1 + m_2)l_1 \psi_1^2 + m_2 l_2 (\psi_1 + \psi_2)^2] \\ 2F &= k_1 \psi_1^2 + k_2 \psi_2^2 \end{aligned} \right\} (5.5)$$

故に速度聯成はなく加速度聯成と振幅聯成があらはれる。

c)  $\varphi_1, \varphi_2$  で

$$\left. \begin{aligned} 2T &= m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2 \\ 2U &= g[(m_1 + m_2)l_1 \varphi_1^2 + m_2 l_2 \varphi_2^2] \\ 2F &= k_1 \varphi_1^2 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \end{aligned} \right\} \dots (5.6)$$

故に振幅聯成はなくその代りに加速度聯成と速度聯成があらはれる。

2 重振子の運動は、故に 3 つの異つた聯成の様式を有する方程式で書かれる。それで 2 重振子をすべての開いた鎖と同様に、或る 1 つの定つた聯成として了ふ事は少しの意味もない事だと云ふ事が明かになる。

6. 省略す

7. 影響数 (Einflusszahlen) の方法

最後に簡単にまだ今までに利用されて来た多くの自由度を有する系の運動方程式を書く方法のある事を示

さねばならない。そして又この方法を用ひる事も、聯成様式に影響を與へる。この論説では再び保存系に限る事にする。3 節では運動方程式を Lagrange の第 2 種運動方程式が成立するものと假定した。Lagrange 型の微分方程式は“近接作用説”の表現である。で次ぎに来るものに對して、“近接作用方程式”と名付けやう。

運動方程式はだが他の方法を用ひても得られる。遠達作用説の表示である所の所謂影響数を用ひて質量の所に働く静力學的力  $p_k$  に作用されてゐる系の變位  $q_i$  を書く。そして又静力學的力を負の慣性抵抗  $-m\ddot{q}_i$  で置き換へる。2 つの自由度を持つ系では

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \kappa_{11} P_1 + \kappa_{12} P_2 \\ q_2 &= \kappa_{21} P_1 + \kappa_{22} P_2 \end{aligned} \right\} \dots (7.1)$$

でこゝに  $\kappa_{12} = \kappa_{21}$  であり、これから

$$P_1 = -m_1 \ddot{q}_1, \quad P_2 = -m_2 \ddot{q}_2 \dots (7.2)$$

を用ひて、運動方程式

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 \kappa_{11} + m_2 \ddot{q}_2 \kappa_{12} + q_1 &= 0 \\ m_1 \ddot{q}_1 \kappa_{21} + m_2 \ddot{q}_2 \kappa_{22} + q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (7.3)$$

を得る。これは遠達作用方程式と稱へられる。

これは近接作用方程式からも得る事が出来て、(導入略) 振幅聯成の近接作用方程式は加速度聯成の遠達作用方程式に、そして加速度聯成の近接作用方程式は、振幅聯成の遠達作用方程式に對應する事が分かる。

(最上武雄 抄譯)

二 軸 應 力 の 一 問 題

K. Hager „Der ebene Spannungszustand“ Z. A. M. M. Juni 1934.)—原語と少し題の譯が違ひますが内容の意味を取つて斯く致しました (譯者)

1932 年の 7 月のこの雑誌に 2 軸應力に於ける 2 つの主應力の微分方程式を出した。それに依れば、

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial z^4} = 0 \dots (III)$$

$$\frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial y^4} = 0 \dots (IV)$$

である。

以下譯者註

$\xi, \zeta$  を  $(x, z)$  點の變位とすれば

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} = 0 \dots\dots(1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sigma_x - \frac{\sigma_z}{m}, \quad \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} \dots\dots(2)$$

$$T = \gamma \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \dots\dots(3)$$

が成り立つ。(1) より

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \dots\dots(I)$$

(3) より

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

$$= \gamma \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \gamma \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z^2} \right]$$

$$\gamma = \frac{m}{2(m+1)} \varepsilon, \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{m}{2(m+1)}$$

(2) より

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} (2m+1) - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} m + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} m = 0$$

(I) を用ひ

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = 0 \dots\dots(II)$$

(I), (II) より

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial z^4} = 0 \dots\dots(III)$$

$$\frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial x^4} = 0 \dots\dots(IV)$$

III の方程式は應力函数

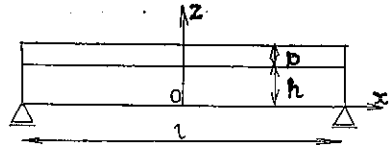
$$\sigma_x = C \cos \frac{x\pi}{l} \cosh \frac{\pi z}{l} + Z \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

で満足される。座標原點は、荷重のかゝつてゐない桁の下の縁の中央にとつてある。

定數  $C$  及び  $Z$  をきめるために  $\cos(x\pi/l)$  をその級數の第 2 項まで取つた。そしてそれに依つて、2 つの未知數に對する 4 つの方程式に於て  $\cos(x\pi/l)=1$

$-(x\pi)^2/l^2$  と云ふ、 $\psi$  なる補正項  $\psi$  を導入して、不調をなくした。

第 6 圖



$\sigma_x$  に関する應力函数から (I) の條件に依つて  $\sigma_z$  を出せる。これは (IV) の解でなければならぬ。

$$\sigma_z = -C \cos \frac{x\pi}{l} \cosh \frac{\pi z}{l} - Z \cdot z^2 + C_1 z + C_2$$

こゝに  $C_2 = +C\pi x/l$  である。

$\tau = C \sin(x\pi/l) \sinh(\pi z/l) + Z \cdot 2xz$  は  $z=0$  に對して  $\tau=0$  となるが  $Z=h$  に對しては  $\tau=0$  とはならぬ。

選ばれた應力函数の最初の項を無限級數でおきかへればこの最後の條件はみたされ、今述べた不調和が完全に妨げられる。即ち兩方の應力函数の積分が數學的正當性を與へられるのである。 $n$  を奇數として

$$\sigma_x = \sum_1^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi z}{l} + Z \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) \dots\dots(1)$$

兩端自由承の桁が等布荷重を受けてゐるとしてモーメントの條件から

$$M_x = \frac{\eta}{2} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) = \int_0^h \sum_1^{\infty} A_n \cdot z \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi z}{l} dz + Z \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) \int_0^h z dz$$

$$\int_0^h z \cosh \frac{n\pi z}{l} dz = \int_0^h z \cos \frac{izn}{l} \pi dz = \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \left( 1 + \frac{n\pi h}{l} \sinh \frac{n\pi h}{l} - \cosh \frac{n\pi h}{l} \right) = H_n$$

$$\frac{\eta}{2} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) = \sum_1^{\infty} A_n \cdot H_n \cos \frac{x\pi n}{l} + Z \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) \cdot \frac{h^2}{2}$$

兩邊に  $\cos(x\pi n/l) dx$  を掛けて 0 から  $l/2$  まで積分すれば

$$\frac{\eta}{2} \left[ \frac{l^2}{4} \frac{l}{\pi n} (-1)^{\frac{3n+1}{2}} - \left( \frac{l}{\pi n} \right)^3 \left( \frac{n^2 \pi^2}{4} - 2 \right) (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \right] = A_n \cdot H_n \frac{l}{4} + Z \cdot \frac{h^2}{2} \left[ \frac{l^2}{4} \frac{l}{\pi n} (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \left(\frac{\pi^2 n^2}{4} - 2\right) (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \Big] \\
 (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \cdot A_n \cdot H_n \cdot \frac{l}{4} &= \left(\frac{p}{2} - Z \cdot \frac{h^2}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \\
 & \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

又桁断面に於ける平衡から

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \sigma_z dz &= 0 = \int_0^h \sum A_n \cos \frac{x\pi n}{l} \cdot \cosh \frac{z\pi n}{l} dz \\
 &+ Z \int_0^h \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \cdot dz \\
 0 &= \sum A_n \cdot \cos \frac{x\pi n}{l} \cdot \frac{l}{\pi n} \sinh \frac{n\pi}{l} h \\
 &+ Z \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \cdot h
 \end{aligned}$$

兩邊に  $\cos(x\pi n/l)dx$  又は  $\cos(x\pi/l)dx$  を掛けて 0 から  $l/2$  まで積分する。

$$\begin{aligned}
 0 &= A_n \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{\pi n} \sinh \frac{n\pi}{l} h + Z \cdot h \left[ \frac{l^2}{4} \frac{l}{\pi n} (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \left(\frac{\pi^2 n^2}{4} - 2\right) (-1)^{\frac{3n+1}{2}} \right] \\
 (-1)^{\frac{3n+1}{2}} A_n &= -Z \frac{8hl}{\pi^2 n^3 \sinh \frac{n\pi}{l} h}; \\
 A_1 &= -Z \frac{8 \cdot h \cdot l}{\pi^2 \sinh \frac{\pi}{l} h} \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

$A_1$  を (2) に入れると

$$Z = \frac{p}{h^2 - H_1} \cdot \frac{2h\pi}{l \sinh \frac{\pi}{l} h} \dots\dots\dots(4)$$

又  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial z}$  の條件から

$$\tau = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi}{l} z + Z \cdot 2x \cdot z + f(x)$$

$x=0$  で  $\tau=0$  であるから,  $f(x)=0$ , 又  $z=h$  で  $\tau=0$  でなければならぬ。

$$0 = \sum A_n \sin \frac{x\pi n}{l} \sinh \frac{n\pi}{l} h + Z \cdot 2x \cdot h$$

兩邊に  $\cos(x\pi n/l)dx$  をかけて 0 から  $l/2$  まで積分すれば (3) 式となる。即ち  $\sigma_x$  に関する應力函数の定数が (3) 式を満足すれば, 近似法に依つて (1932 年

の雑誌参照) も亦失はれた條件  $z=0$  に於て  $\tau=0$  を満たす。

1932 年に導いた條件  $\delta^2 \sigma_z / \sigma_z^2 = \delta^2 \sigma_x / \delta x^2$  に依つて又  $\sigma_z$  に関する應力函数を導く事が出来る。

$$\sigma_z = -\sum A_n \cos \frac{x\pi n}{l} \cdot \cosh \frac{n\pi z}{l} - Zz^2 + C_1 z + C_2 \quad (5)$$

$z=0$  で  $\sigma_z=0$  より  $0 = -\sum A_n \cos(x\pi n/l) + C_2$ , 依つて  $C_2 = \sum A_n \cos(x\pi n/l)$  又  $z=h$  で

$$\sigma_z = p = -\sum A_n \cdot \cos \frac{x\pi n}{l} \cosh \frac{n\pi}{l} h - Z \cdot h^2 + C_1 h + C_2$$

これより

$$C_1 = \frac{p - \sum A_n \cos(x\pi n/l) + Z \cdot h^2 + \sum A_n \cos(x\pi n/l) \cosh(n\pi h/l)}{h}$$

この  $C_1, C_2$  を (5) 式に入れると,  $\sigma_z$  が (IV) を満足するかどうかはつきりしない。で  $C_2$  に関する方程式に  $\cos(x\pi/l)dx$  をかけて 0 から  $l/2$  まで積分すると

$$0 = -A_1 \frac{l}{4} + C_2 \frac{l}{\pi}; \quad C_2 = A_1 \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots(6)$$

$C_1$  の方も同様で

$$\begin{aligned}
 p \frac{l}{\pi} &= -A_1 \frac{l}{4} \cosh \frac{\pi}{l} h - Z \cdot h^2 \frac{l}{\pi} + C_1 h \frac{l}{\pi} + A_1 \frac{\pi}{4} \frac{l}{\pi} \\
 C_1 &= \frac{A_1 \pi}{h} \left( \cosh \frac{\pi}{l} h - 1 \right) + Z \cdot h \dots\dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

故に  $\sigma_z$  に関する應力函数は

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= -\sum A_n \cos \frac{x\pi n}{l} \cosh \frac{n\pi}{l} z \\
 & - Z \cdot z^2 + z \frac{A_1}{h} \cdot \frac{\pi}{4} (\cosh \frac{l}{h} - 1) + Z \cdot h \cdot z + A_1 \frac{l}{4} \\
 & \dots\dots\dots(5a)
 \end{aligned}$$

で (IV) 式を満足する。定数が説いた方法で計算される時には (1) と (5) 式は (III), (IV) の微分方程式の完全解となる事が出来る。

(最上武雄 抄譯)

曲げ及び剪断を受ける切り欠きの  
周囲の應力分布

(H. Neuber, „Zur Theorie der Kerbwirkung bei Biegung und Schub“ Ing. Arch. Juni 1934. S. 238.)

楕圓坐標を用いた應力函数を使つて切り欠きの周囲の應力状態を調べた論文で、最大應力と切り欠きの彎曲度との關係を示す一般式を得てゐる。

1. 基礎方程式

この板 (Scheibe) の問題は楕圓坐標を基礎とする。それは

$$x = \sinh u \cos v, \quad y = \cosh u \sin v \dots (1)$$

で  $x, y$  はカルテシアン坐標である。

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \dots (2)$$

であるから新しい坐標は等角である。それで

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} \right), \left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \sigma_v &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} \\ \tau_{uv} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに  $F$  は Airy の應力函数で

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial v^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial v^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

の形であるとする。

$$h = \sqrt{\sinh^2 u + \cos^2 v} \dots (6)$$

2. 境界条件

板に關する一般の境界条件は線素  $ds$  (其成分  $dx, dy$ ) に働く  $x$  方向の力  $dX = -\sigma_x dy + \tau_{xy} dx$ ,  $y$  方向の力  $dY = \sigma_y dx - \tau_{xy} dy$  を考へる事に依つて得られる物質の中に  $P_1$  と  $P_2$  の點を結んで中斷して引かれた線素列  $\gamma$  に沿つて積分する。  $M_{1,2}$  を回轉モーメント、

$X_{1,2}$ , 又は  $Y_{1,2}$  ( $x$  又は  $y$  方向) を力として、すべて線素列の左の物質に線素列の右に物質の上に働くものとする。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots (7)$$

を用ひれば

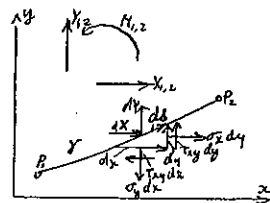
$$X_{1,2} = -\int_1^2 (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) = -\int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 \dots (8)$$

$$Y_{1,2} = \int_1^2 (\sigma_y dx - \tau_{xy} dy) = \int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 \dots (9)$$

尚ほ  $x=0, y=0$  に關しての回轉モーメントは

$$M_{1,2} = \int_1^2 y(\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) + \int_1^2 x(\sigma_y dx - \tau_{xy} dy) = \int_1^2 y d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \int_1^2 x d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \int_1^2 d\left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right) = x_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 + y_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 - F_2 - x_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 - y_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 + F_1 \dots (10)$$

第 7 圖



力の働かぬ境界では、直接に

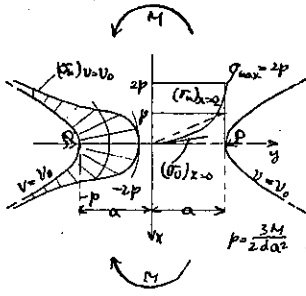
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{定數}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{定數} \dots (11)$$

となる。

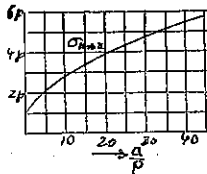
3. 純粹の彎曲を受ける對稱な切りかけ (第 8 圖, 第 9 圖参照)。

板は双曲線  $v_0$  が自由境界で、最も短かい斷面から充分遠くはなれて働くモーメントに依つて彎曲應力を與へられてゐるとする。

第 8 圖



第 9 圖



$$F = Av + B \cosh 2u \sin 2v + Cx \sinh u \sin v \quad (12)$$

から出発する。(12) 式は (5) 式を満足する。 $v = v_0$  と  $v = -v_0$  なる自由境界では、(11) 式が成立し、これは (12) 式に依つて満足される。(3) 式を有益に用ひ 3 つの定数をすべて一つの定数であらはす。この最後の定数をきめるには、まだ切斷して見ると言ふ事が附け加へられる。ある任意の切斷線  $P_1 P_2$  に沿つて取つた應力はその合力が 0 でなければいけないが、合成モーメント  $M_{1,2}$  を持たねばならぬ。そして  $M_{1,2}$  は外力のモーメント  $M/d$  に等しい。(d は板の厚さ) 切口を  $y$  軸に取り (3) 式、(10) 式を用ひるのが便利である。

$$\frac{3M}{2a^2d} = p \quad (\text{彎曲應力案}) \dots\dots (13)$$

とおく。ことに

$$a = (y)_{u=0} = \sin v_0 \dots\dots (14)$$

で最も短い斷面のは  $v$  の半分である。すると  $F$  は  $p$  なる因数まで入れて無元 (dimensionslos) であり次の簡単な形にかける。

$$F = p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)} (2v \cos 2v - \sin 2v) \dots\dots (15)$$

(4) 式より應力は次の形に得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)} \frac{\sin 2v}{h^2} \left( 4 + \frac{\cos 2v_0 - \cos 2v}{h^2} \right) \\ \sigma_v &= p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)} \frac{\sin 2v}{h^2} (\cos 2v - \cos 2v_0) \\ \tau_{uv} &= p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)} \frac{\sinh 2u}{h^2} (\cos 2v_0 - \cos 2v) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

第 8 圖は  $\text{tg } v_0 = 2$  に対する應力分布を示す。切り缺きの基底の曲率圓の半徑を  $\rho$  とすれば我々は條件

$$\sqrt{a/\rho} = \text{tg } v_0 \dots\dots (17)$$

を基として最大應力を切り缺きの曲率の函數として書ける。

それは

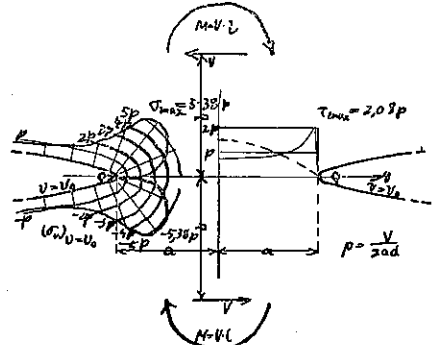
$$\sigma_{max} = p \frac{4 \left( \frac{a}{\rho} \right)^{3/2}}{3 \left[ \sqrt{\frac{a}{\rho}} + \left( \frac{a}{\rho} - 1 \right) \text{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]} \dots\dots (18)$$

でこの近似式としては

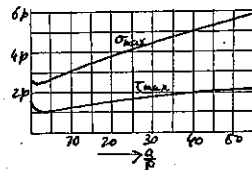
$$\sigma_{max} = p (\sqrt{0.71 a/\rho + 0.85} + 0.08) \dots\dots (19)$$

4. 純粹の剪斷を受ける對稱な切りかけ (第 10 圖、第 11 圖)

第 10 圖



第 11 圖





$$F = A \sinh u \sin v + Bxv \dots\dots(20)$$

を用ひて純粹の剪力の場合を求められる。  $v = \pm v_0$   $\dots\dots(11)$  式が自由境界であると言ふ境界条件と、(8), (9), (10) 式から、  $X_{1,2} = 0, Y_{1,2} = F/d, M_{1,2} = 0$  を用ひて定数をきめる。

$$\frac{V}{2ad} = p \quad (\text{最も短い断面の平均剪力}) \dots\dots(21)$$

とすれば

$$F = -p \frac{2 \sin v_0}{2v_0 - \sin 2v_0} \sinh u (\tau \cos \tau - \cos^2 v_0 \sin v) \dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= p \frac{\sin v_0}{2v_0 - \sin 2v_0} \frac{\sinh u \sin \tau}{h^2} \left( 4 + \frac{\cos 2v_0 - \cos 2\tau}{h^2} \right) \\ \sigma_v &= p \frac{\sin v_0}{2v_0 - \sin 2v_0} \frac{\sinh u \sin \tau}{h^2} (\cos 2v - \cos 2v_0) \\ \tau_{uv} &= p \frac{\sin v_0}{2v_0 - \sin 2v_0} \frac{\cosh u \cos \tau}{h^2} (\cos 2v - \cos 2v_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

第 10 圖は  $\text{tg } v_0 = 7$  に對する應力分布を示す。この場合最大應力は切り欠きの基底にはあらはれずすぐその傍 ( $x = \cos^2 v_0$ ) にあらはれる。前の問題の時と同じ條件の下に

$$\sigma_{max} = p \frac{\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \text{arctg} \left[ \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]} \dots\dots(24)$$

でこの近似式は

$$\sigma_{max} = p (\sqrt{0.4 a/\rho + 1.9 + 0.67}) \dots\dots(25)$$

最も狭い断面に於ける剪應力の最大値は  $a/\rho \leq 2$  に對しては  $y = 0$  の處にあつて

$$\tau_{max} = p \frac{\left(\frac{a}{\rho}\right)^{3/2}}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \left[ \left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \text{arctg} \left[ \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right] \right]} \left(\frac{a}{\rho} \leq 2\right) \dots\dots(26)$$

$a/\rho \geq 2$  に對しては最大剪應力は  $y = \sqrt{1 - 3 \cos^2 v_0}$  の

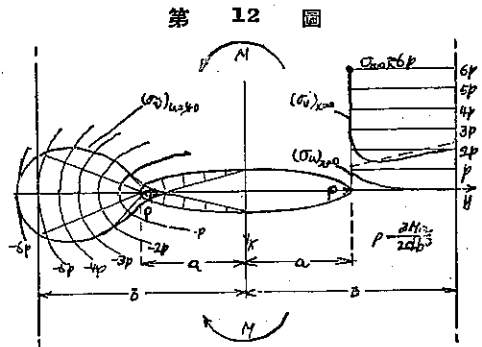
位置にあり  $a/\rho$  が増すに従つて切りこみの基底に近づく。

$$\tau_{max} = p \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \text{arctg} \left[ \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]}, \quad \left(\frac{a}{\rho} \geq 2\right) \dots\dots(27)$$

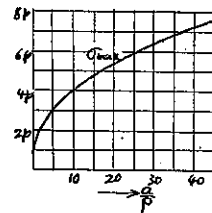
で近似式としては

$$\tau_{max} = p (\sqrt{0.06 a/\rho + 0.54 + 0.20}), \quad (a/\rho > 4) \dots\dots(28)$$

5. 純粹の曲げを受ける對稱な割目 (第 12 圖, 第 13 圖参照)



第 12 圖



第 13 圖

$$F = F_0 + Ax e^{-2v} \sin 2v + B e^{-3v} \sin 3v + (C e^u + D e^{-u}) \sin v \dots\dots(29)$$

$$\frac{3Ma}{2b^3d} = p \dots\dots(30)$$

$$a = (y)_{u=u_0} = \cosh u_0 \quad v = \frac{\pi}{2} \dots\dots(31)$$

として境界條件で定数をきめれば

$$F = \frac{p}{24 \cosh u_0} \left\{ [-\cosh^3 u + 3e^{2(u_0-u)} \cosh^2 u_0 \cosh u - 2e^{3(u_0-u)} \cosh^2 u_0 \sin 3v + 3[\cosh^2 u - e^{2(u_0-u)} \cosh^2 u_0 \cosh u + \cosh^2 u_0 (e^{2u_0-u} - e^u)] \sin v] \right\} \dots\dots(32)$$

第 12 圖は  $\text{cot} g u_0 = 5$  に對する應力分布を示す。

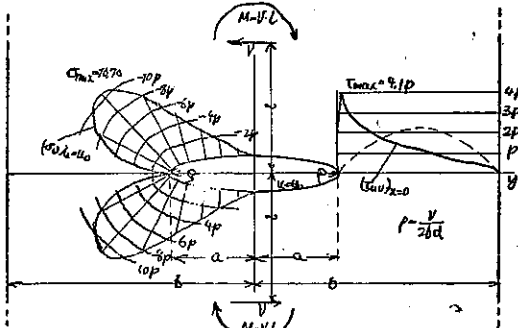
$$\sqrt{\frac{a}{\rho}} = \text{cothg } u_0 \text{ (cothg is hyperbolic cotangent)} \dots (33)$$

とすれば最大應力は割目の基底で生じ

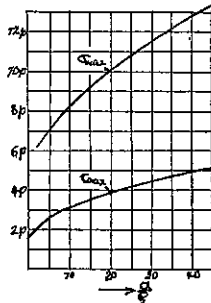
$$\sigma_{max} = p \left( \sqrt{\frac{a}{\rho}} + 1 \right) \dots \dots \dots (34)$$

6. 純粹剪斷を受ける對稱な割目 (第 14 圖, 第 15 圖参照)

第 14 圖



第 15 圖



$$\frac{V}{2bd} = p \dots \dots \dots (35)$$

$$F = \frac{p}{16 \left( \frac{b}{a} \right)^2} \left\{ 8xy \left[ \frac{y^2}{\cosh^2 u_0} - 3 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + A x e^{-2u} \sin 3v + B e^{-4u} \sin 4v + C [\cosh 2u \sin 2v - 4x \sinh u \sin v] + D e^{-2v} \sin 2v \right\} \dots \dots \dots (36)$$

とすれば境界条件から

$$\left. \begin{aligned} A &= 2e^{2u_0}(2e^{2u_0}-1), \quad B = 3e^{4u_0} \sinh^2 u_0 \\ C &= 3e^{2u_0} \left[ 2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \right], \\ D &= 3e^{2u_0} \left[ -2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cosh 2u_0 + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

第 14 圖は  $a/\rho = .25, b/a = 3$  に對する應力分布を示す。割れ目の基底のすぐ傍で最大應力を生ず。對稱軸  $x=0$  での最大剪應力は周囲の應力の最大である點の極く傍でおこる。

兩方の最大應力の一般式の計算に於ては  $(b/a)^2$  のない項を考へない方が便利である。これによる誤差は、割目の充分な彎曲度に於ては無視出来る程小さい。

一方さうすれば簡單な式を作る事が出来る。周邊應力の最大値は割目の表面に於ては

$$x = \sinh^2 u_0 / \sqrt{\cosh 2u_0} \text{ の處にあつて}$$

$$\sigma_{max} = \frac{3}{2} p \left( \sqrt{\frac{a}{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\rho}}} + 2 \right) \dots \dots \dots (38)$$

對稱軸  $x=0$  に於いての剪應力の最大値は

$$\tau_{max} = 3p \frac{\left( \frac{a/\rho + 2}{3} \right)^{3/2} - \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\left( \sqrt{\frac{a}{\rho}} - 1 \right)^2} \dots \dots \dots (39)$$

でこの近似式は

$$\tau_{max} = p(\sqrt{0.33 a/\rho + 0.10} + 1.33) \dots (40)$$

$a/\rho = 1$  (圓形割目) の時は

$$\sigma_{max} = 6p, \quad \tau_{max} = 2p.$$

となる。

割目が  $x$  軸に就て同心でなくて割目の中央での應力が  $\sigma_0, \tau_0$  であり、又軸  $a$  での應力が  $\sigma_1$  である時は彎曲による應力上昇は  $p$  の代りに  $\sigma_1 - \sigma_0$  として (34) 式より得られ剪力に依るのは  $3p/2$  の代りに  $\tau_0$  とおき (38), (39), (40) の 3 式より得られる。

引つばつた時の應力上昇はよく知られてゐる如く

$$\sigma_0 \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

である。

$a/\rho < 1$  の方は  $a'/\rho'$  を長軸  $a'$  のほちの彎曲度とすれば  $a/\rho = 1: \rho'/a'$  よりその應力上昇は (38) 式より  $a/\rho$  の代りに  $1: \rho'/a'$  と置いて求められる。

(最上武雄 抄譯)

### 連続鉄筋コンクリート拱橋に関する実験

Wilbur M. Wilson. "Laboratory tests of multiple-span reinforced concrete arch bridges." Proceedings of A. S. C. E. April P. 485. and August 1934. P. 912.

連続徑間拱橋に於ては、構造上の固定點は兩側徑間の外端と中間橋脚の底面であつて、活荷重が連続拱橋を通過する際には、橋脚前後徑間に於ける不齊等載荷は橋脚頭に水平軸力と彎曲率を起し、從つて橋脚頭の移動を誘起するものである。この原因による徑間端の反力は同荷重同徑間長の單徑間拱橋の場合とは根本的にその趣きを異にして居る。

本實驗に供せられたる構造物は、a) 床構なき拱肋の3徑間連続、b) 拱肋、支柱及び拱頂を高く離れた床版よりなる3徑間连续、c) 拱肋、支柱及び拱頂で拱肋と接近しこれと一體をなす床版よりなる3徑間连续である。b)、c) の型には橋脚の上位に床版の伸縮接合を有する物と、橋脚の上位と各徑間の1/3の點に接合を有する物とがある。尚 c) のみは橋脚高20'の物に就て、他は20'、15'、10'の場合に就て實驗せられた。

#### (1) 緒論

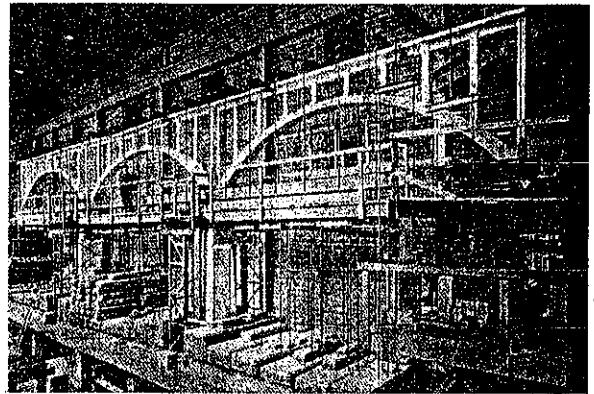
床構なき拱肋よりなる徑間连续の實驗目的は、荷重支持力の決定と、實驗により測定されたる反力及び歪みと弾性理論により得られる數値との比較である。床構を有する連續徑間は容易に代數的解析が出来ないから、特に實驗研究の必要があるのであつて、この型の實驗に於ては次の事項が決定された。a) 單徑間の場合の彈性常數及び固定端反力の影響線、b) 3徑間连续の場合に於ける各徑間拱起に於ける反力の影響線、c) 設計荷重による軸力の大きさとその位置、d) 床版に於ける中間伸縮接合が荷重支持力に及ぼす影響、e) 3徑間连续の最大支持力の決定等である。

#### (2) 供試構造物と機械装置

高位床版を有する連續徑間の實驗状態は第16圖の様である。供試構造物の寸法は第2圖に於て、a) 高

位床版型 g) 低位床版型又拱肋と橋脚は各型共通であつて、橋脚はb)に示されて居る。コンクリートは28日後の應壓強度2230#/方、配合1:3:3, W/C 1.2(容積比)、重量計量で施行せられた。砂は4番篩を、砂利は1'篩を通過する程度のものである。供試構造物の大體の恰好は、供試體徑間の約5倍である。徑間135'の拱橋の設計に基づいて居り、試験荷重も同様に135'の公道橋の設計に用ひらるべき活荷重に準じて居

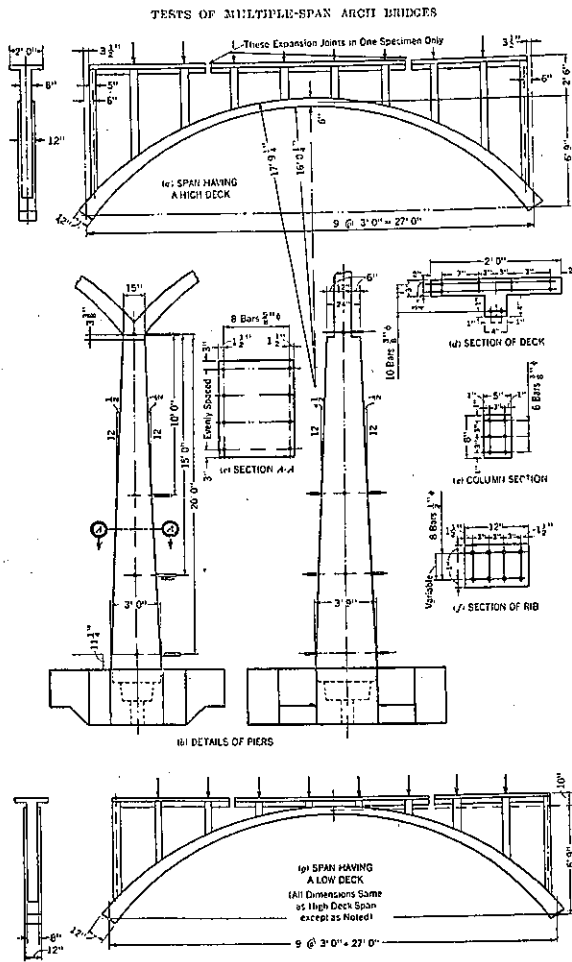
第16圖 高位床版を有する3徑間拱橋の實驗状態



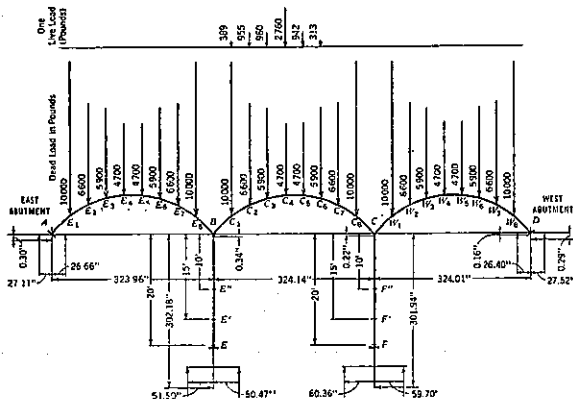
る。但試験體自重は該公道橋の場合の死荷重應力に比すべき程度のものではなく、設計死荷重としては多少勝手ではあるが、軸力線が拱肋断面の核心内に働く様に分布させ、その最大死荷重應力も普通橋梁に於ける死荷重應力程度になる様に選んだ。設計活荷重は格點に對し960#の等布荷重と1800#の一集中荷重よりなるものを用ひ、一般にその點に於て最大應力を生ずる様に分布せられた。床構なき拱肋に於て、C<sub>1</sub>断面に最大應力を生ずる設計荷重の分布は第18圖の様である。同圖に示されたる活荷重の一群は本實驗では1-L.L.と命名し、2-L.L.又は3-L.L.等は各々該群重の2聯又は3聯を意味するのである。

機械装置は特に本實驗のために製作されたものであつて、各々独自の測定役割を演ずる様になつて居る。例へば各端(橋臺及び橋脚底面)の支承装置は、先づその軀體の保持、原位置への復歸及び同時に所定の單位による各端移動の3成分 $xy$ 及び $\theta$ の測定が出来

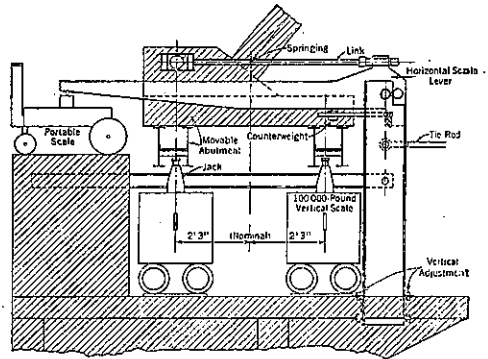
第 17 圖 橋脚拱肋及び床構の詳細



第 18 圖 床構なき拱肋に於ける測定される反力の位置



第 19 圖 橋臺の反力測定装置



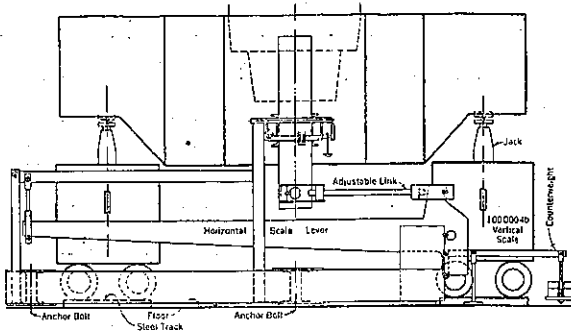
ねばならない。第 19 圖は橋臺、第 20 圖は橋脚底面の反力測定に用いた支承装置である。即ち各橋臺橋脚からの荷重は 2 個のジャッキによつて縦スケールに傳へられる。このジャッキを上下する事により、橋臺橋脚を上下又は橋梁方向に直角な水平軸の周に廻轉さす事が出来る。水平反力は 2 個の横杆によつてスケールに現される。

橋脚と橋臺の相対的垂直移動は U 字型静壓計 (hydrostatic gauge) によつて測定せられた。これは橋脚頭と橋臺に附せられた 4 個の鈎形水面指示計 (hook-gauge) よりなり、各計は常にその水面が一致する様に水管で連絡されて居る。拱肋の載荷點に於ける垂直移動は、拱肋中心線に沿つて 1/2" の鐵棒を埋込んで置き、豫め架設された水平 I 形桁と鐵棒下端の距離をエームス・ダイヤル (Ames dial) で測定した。

橋臺橋脚の廻轉は軀體の測定せんとする點に水準器を取付けて、その角度を測りコンクリートの歪み測定には 8 吋の Berry の應力計を用ひた。

荷重には重量既知のコンクリート塊を使用した。即ち各載荷點には豫め大型のコンクリート塊を 4 本の鐵棒で吊し、この上にコンクリート塊を追加して設計死活兩荷重を動かさせた。鐵棒のターンバックルはこれを締める事により第 16 圖の如く塊は受臺を離れて、實際荷重として働く事にな

第 20 圖 橋脚底面の反力測定装置



る。

(3) 実験の解説と結果の検討

単位荷重による影響線：本実験の直接目的は色々の径間の拱起に於ける反力の影響線の決定であつて、これが解れば各径間は任意の載荷状態に對し靜定となるのである。この影響線は實驗的に單位荷重が各載荷點に順次に載荷され、次いで移動せられた時に起つた變化を測定して決定せられるのであつて、使用單位荷重は 2000#, 終始設計死荷重載荷の状態で實驗せられた。即ち拱起に於ける反力は次の 2 方法で決定せられた。a) 單位荷重の載荷と移動の前後端點の反力を測定し、支承装置のスケールの讀みの變化から彎曲率、

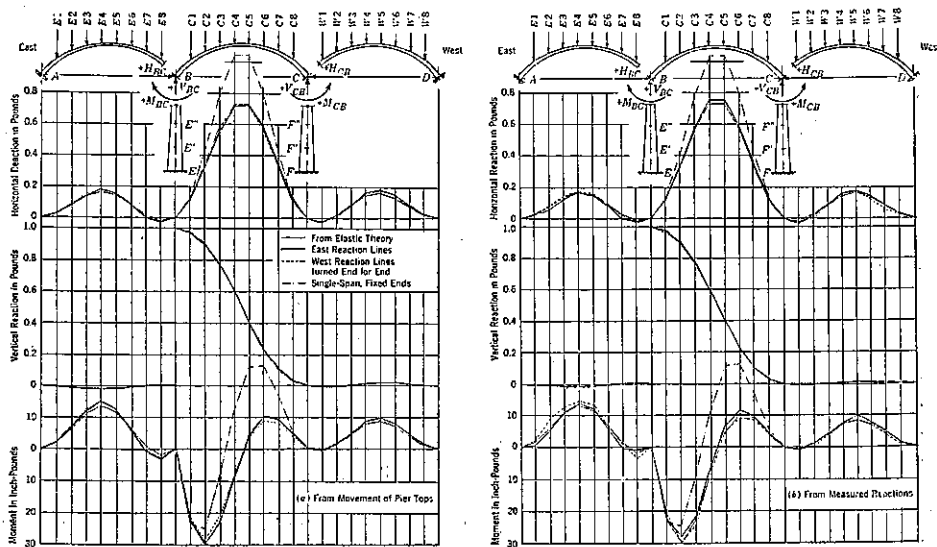
水平及び垂直反力を算出する。b) 單位荷重載荷移動による橋脚頭の移動  $x, y$  及び  $\theta$  を測定し、この移動に相當する彎曲率、水平及び垂直反力を算出する。

供試構造物は對稱であるから東半の載荷點に對して決められた影響線は、西半の載荷によつて一應吟味する事が出來た單位荷重による橋脚頭の移動から、拱起の反力を算出するには、固定端反力と彈性常數が必要であつて、兩側徑間の固定端反力は、側徑間の各點に順次單位荷重を載荷する事によつて、橋臺の測定装置からこれを知る事が出來る。又彈性常數は徑間の一端に順次  $x, y$  及び  $\theta$  の何れか一つを與へる事によつて、橋臺の装置の目盛變化から得る事が出來る。

第 21 圖は床構なき拱肋(橋脚高 20') の場合に於て、中央徑間拱起に於ける反力の影響線を示したもので a) は橋脚頭の移動から b) は反力の測定から決定せられたものである。

彈性常數は床構なき拱肋に對しては代表的に決定されるが、床構ある型には容易に求められないので、本實驗では Donald E. Larsen 氏の實驗的に決定せられた彈性常數を使用して居る。第 22 圖は床構ある場合の結果である。

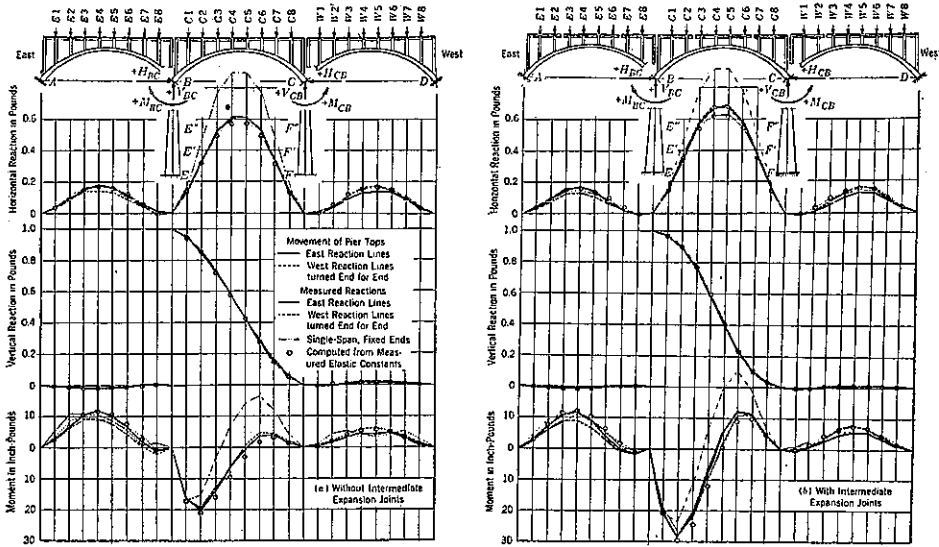
第 21 圖 單位荷重による反力の影響線



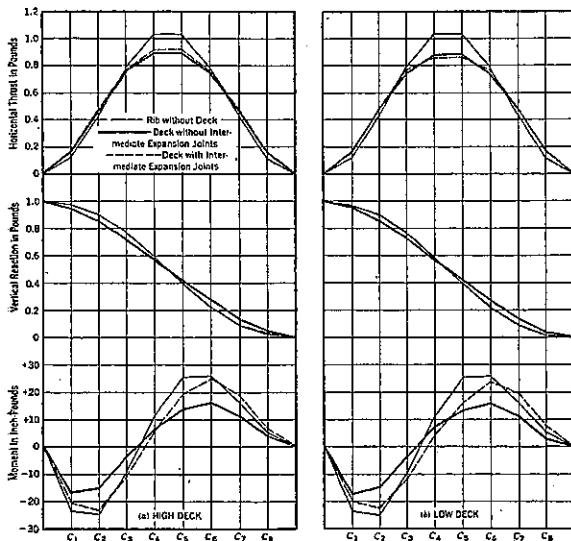
**荷重支持力試験：**これは先づ床構なき拱肋に就て行はれ、端の反力を決定するための読み、載荷點直下の拱肋の撓度及び載荷點中間の拱肋コンクリートの歪みを測定した。最初は設計死荷重から始まり、活荷重 4-L.L. に及ぶ迄荷重は増加せられた。伸縮接合なき床版を有する型では自重以外に何等龜裂の不安なく 5-L.L. を支持した。

**固定端反力に対する床構の影響：**固定端反力に関する床構なき拱肋と高位又は低位の床版を有する型との比較は第 23 圖 a) b) に示して居る。即ち床構ある場合の水平軸力は大同小異で無床構の場合に比して遙かに小さい。垂直反力は無床構型と伸縮接合ある床版型とが約同値で、接合の無い床版型とは大分差がある。固定端彎曲率は接合なき床版型では、無床構型に比し

第 22 圖 單位荷重による反力の影響線



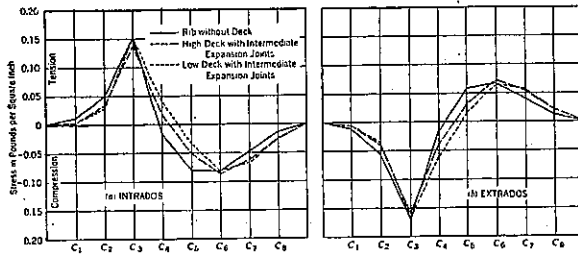
第 23 圖 各型の固定端反力の影響線



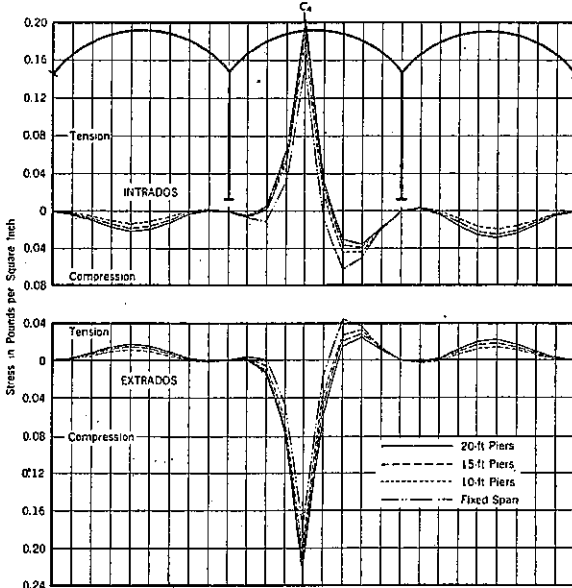
断然小さく、接合ある床版型は其中間値である。單徑間の拱起應力は殆んど固定端彎曲率で支配されるから、伸縮接合なき床版型では該箇所の應力は遙かに小さい理である。伸縮接合ある床版を有する單徑間拱橋では  $C_3$  断面が最も弱い（3 徑間連続の場合も同様）。 $C_3$  断面に於ける各型の應力影響線は、第 24 圖に示す様である。尚床構なき 3 徑間連続の弱断面は  $C_4$  であつて、第 25 圖は各橋脚高を異なる場合の  $C_4$  の應力影響線であつて、これを以て連続拱橋に於ける橋脚高の増大は  $C_4$  の應力を増大する事が解る。

**コンクリートの弾性係数に於ける不同が拱肋應力に及ぼす影響：**コンクリートの弾性係数に於ける不同が床構ある 3 徑間連続拱橋の應力に及ぼす影響

第 24 圖 固定端半径間の各型に於ける  $C_3$  に於ける應力影響線



第 25 圖 無床構型に於ける  $C_3$  に於ける應力影響線



を検するため、同一寸法の然し相異なる物理的性質を有する構造物に就て、應力の影響線が決定せられた。その内の一つは全径間を通じて弾性係数は一定であるが、他は中央径間の弾性係数は前者と同一で、両側径間はその  $2/3$  の値を持つたものである。尚兩者共高位床版中間伸縮接合なき型で、橋脚高は 20' の場合である。試験の結果物理的性質の不同は、影響線に餘り變化を與へなかつたので、一般にコンクリートの弾性係數に於ける多少の不同は活荷重應力には餘り影響しないものと思はれる。然し高い橋脚上の連続拱橋に於ける特異作用のために、材料性質の不同が死荷重應力に及ぼす影響は容易に決定する事は出来ない。

床版の高低による效果比較： 荷重支持力には大差

ないが、低位床版は拱頂で拱肋と一體をなすから、重大荷重による支柱の剪力破壊の心配は先づ少ない。又径間長の變化による伸縮接合の移動量も高位床版に比して遙かに少ないから接合箇所も少數で済むと思はれる。

(4) 結論

實驗の結果から、高い橋脚上の 3 径間連続拱橋に就ては、次の様な結論が得られる。

床構なき拱肋に對しては

a) 一般假定に基く弾性理論によつて得られた各断面の彎曲率、軸力並に剪力は大體實驗の結果と一致する。

b) 連続拱橋の計算では、断面の慣性能率はコンクリートが或程度まで張力を受け得るものとして算出して良い。

c) 拱肋に相當な龜裂が入つても、軸力の位置や大きさは餘り變化しない。

d) 設計荷重載荷による最大應力は 20' 橋脚上の 3 径間連続の場合には、兩端固定の單径間の場合に比し 13% だけ大きかつた。

床構を有する場合

e) 固定端反力の影響線は床構の有無で大變違ふ。床構の存在は拱起に於てその彎曲率を減じ、径間中央部分の彎曲率を増大する傾向がある。

f) 拱起に於ける反力は、實驗的に決められた固定端反力と弾性常數を用ひて、代數的方法で決定する事が出来る。但弾性常數は單径間拱橋又はセルロイド模型試験から得たものである。

g) 中間伸縮接合の無い床版は、構造物中央部分の剛度及び彎曲率に對する抵抗力を増大する。従つて中間伸縮接合の存在はこの好影響を減少する。

h) 各伸縮接合に現はれる伸縮量が拱橋徑間長の變化に對する割合は、高位床版を有するものでは約 0.25 低位床版を有するものでは約 0.11 である。

i) 中間伸縮接合のある高位床版を有するものに於ては、20' 橋脚上の 3 径間连续の場合には、設計荷重に

よる壓應力は両端固定の単徑間の場合に比し、36%だけ大であつて中間接合のある低位床版の場合はその差は21%である。この差の大部分は死荷重應力によるものであつて、この死荷重應力は若し供試構造物が對稱形で、均質材料よりなり且對稱に載荷された場合ならば、橋脚彎曲の影響に全く無關係のものである。

j) 連續徑間に於ける死荷重應力は、兩端固定の單徑間の場合の該應力を凌駕する傾向ある事は大體確認する事が出来る。

實驗した全構造物に就て拱橋のコンクリートは同一コンクリートの6"×12"の應壓強度試験體と約同等の強度を發揮した事を認め得た。

(5) 討議 (會員 C. B. McCullough 氏によつて 8

月號に掲載されたるもの)。

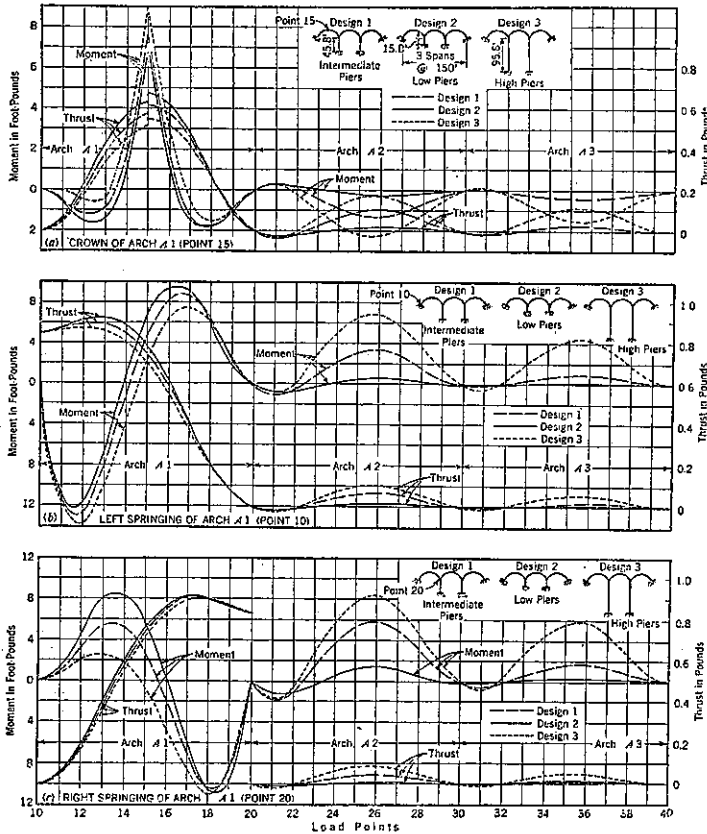
本實驗は大別して次の2項の探研と見做す事が出来る。

- a) 連續拱橋に於ける彈性橋脚の影響
- b) 床構の影響

a) に關しては既に第27圖に於て、一般に彈性橋脚の高さの増加は水平軸力を減少し、橋脚拱座の彎曲率を減じ且つ徑間中央附近の應力を増大せしむる事が解る。筆者は先年橋脚高を異にした徑間150'の3徑間連續拱に就て實驗をした事があるが、その際に於ける橋脚高は45.8' (No. 1), 15.8' (No. 2) 95.8' (No. 3)の3種であつて、各型の第1徑間に於ける所定3點の彎曲率及び軸力の影響線は第26圖の様である。該影響線は拱起彎曲率の減少、拱頂附近の應力の増大等大體に於て Wilson 氏の實驗結果と同様な傾向を示して居る。然し隣接徑間に於ける載荷の顯著なる影響は注目し値する、特に比較的高い橋脚を有する型に於て Wilson 氏の結果は橋脚高20'の場合に3徑間連續は、同一寸法の單一徑間に比してその應力は13%増加する事を示して居り、實際床構の影響を考慮に入れるならば、その増加は17%に及ぶ。今第26圖の影響線によつて、隣接徑間の載荷影響を考慮するならば、前記の%より遙かに大きい應力を豫期せねばならない事になる。然しこの事實は最大應力を起す様な状態に、各徑間上に同時に載荷される様な事は實際問題として有り得ないから、餘り懸念する必要はないが、極端に高い橋脚の場合等には斯る状態も一應は審議して見る必要がある。

床構の影響に關しては、Wilson 氏の實驗結果は床構の存在は拱起に於ける軸力及び彎曲率を低減し又伸縮接合

第 26 圖 彎曲率と軸力の比較



の實驗結果は床構の存在は拱起に於ける軸力及び彎曲率を低減し又伸縮接合



の挿入はこれ等の効果を減少する事を説明して居る。これに關しては筆者は、1932年 Rogue River 橋に於てそのセントル外し作業と關聯して、床構の存在が拱肋歪みに及ぼす影響を觀測した事がある。即ち拱肋の中心線に沿つて5個(拱起拱頂及び1/4點)の電氣テレメーター (electric telemeter) を配置し、拱肋の軸力を測定した。第1表は各觀測點に於ける拱肋に受持たれた軸力の量(理論的軸力に對する%)を示して

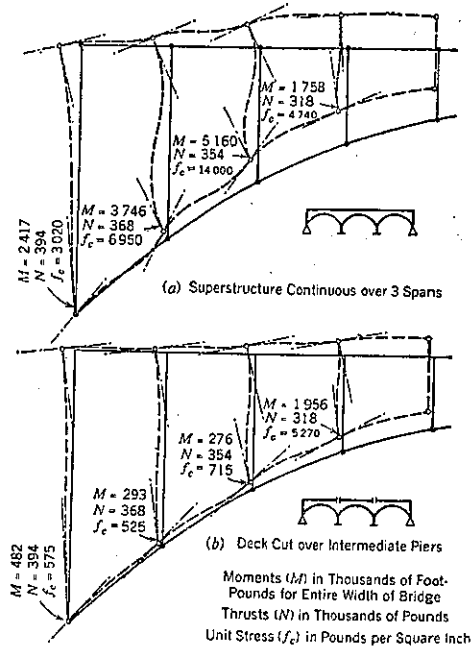
第 1 表

徑間番號	1/4 點に於ける%	拱起に於ける%
1	68	67
2	71	48
3	78	81
4	72	76
6	74	72
7	74	52

居る。即ち 1/4 點でその應力結果は全く一樣で拱肋自身によつては理論的軸力の 75% が受持たれ、残りの 25% は床構によつて受持たれて居る。然し拱起では全くその趣きを異にし、拱肋自身の受持量は 48%、乃至 81% に變化して居る。この受持量の不同は橋脚上位の伸縮接合の拱肋に對する抑制の程度に起因するものである。

最後に伸縮接合なき床構の使用に關して、一言警告を發して置きたい。第 27 圖は筆者の手元でなされた

第 27 圖 端徑間に於ける溫度應力



溫度應力の計算結果であつて、a) 伸縮接合なき場合及び b) 橋脚上位にのみ伸縮接合ある場合に就て、支柱根元の彎曲率、軸力及び壓應力を算出して見た。即ち溫度應力から考へての伸縮接合の必要さが解る。

(内山 實抄譯)