吊橋の振動に就て

(第 20 卷第 6 號所載)

會員　庄　野　卷　治

吊橋の振動に關する最上工學士の御研究は有益貴重嶄新且つ詳細にして數理の巧妙なる運用に依り鮮かに嚴密なる解法を試みられたるは學界の爲,祝福すべき偉業である。これを拜讀したる概括的感想の 2, 3 を次に書いて見ます。

吊橋の撓み振動に關する著者の基本公式 (4) 式

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t)+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

は軸の方向に張力 H の作用する直棒に更に p 及び $P(x,t)$ なる强制横力が加はる場合の撓み振動の微分方程式なることは妹澤博士の振動學 87 頁 (79) 式に照らして明白である。吊橋全體の 1 徑間を兩鉸端の直桁と見做すのは問題の解決を容易にするため機宜を得た假定と思ひます。H を死荷重に依るケーブルの水平張力に取りて既知量とするのは至極便利なるも振動に基因する動力學的 H を未知量としてこれを算出する途を講ずるを得ば更に理想的であると思ひます。著者の論文を見て思出すのは Lord Kelvin が嘗て數學家の拵へた難かしき函數はその數値表を得るにあらざれば殆んど無價値であると主張したことである。y に關する著者の諸公式は總て未決定の未知常數を含んで居るためその儘ではこれらの公式を以て y の數値を計算することが出來ません。從て又この y から誘導さるべき應力公式を作り得ても應力の實値を算出することが出來ません。勿論著者の書いたゞけの結論を得るためにはその必要もないのであります。通俗的にこれを言へば振動の型さへ決れば大きく振れても小さく振れても振動數に變りがないから振動數を求むる目的からは振幅の實値などはどうでも善いのであります。併しながら工學的に重要なる振動に起因する應力の實値は振れの大小に支配されるから振動の型だけの研究では不充分で振れの量が必要となります。斯くして研究の方法が定性的から定量的に移らぬばなりません。玆に序でに書きたいことは振動の振れの公式を求むるに Fourier 級數を利用するときも，振れの公式から應力公式を求むる時にこれを微分せねばならぬので，そこに危險の有無を考慮する苦勞があるから成るべくその採用を避けたいものである。又その級數が和を持たぬ場合が無いとも限らんからこれを用ひた公式の出來上つた時に 2, 3 の例題に就て實地計算して見る等の手數を惜まぬことにしたいと考へることである。この際著者は從來の慣例に倣ひ振動數を求むること及び振動の定性的法則を知るを以て滿足する建前から表題の論文を書かれたもので工學者に重要なる振幅，應力等の實値を求むることは將來の御研究に殘されたものと拜察します。

著者が自由振動の意味を廣義に解釋して地球の引力,ケーブルの張力等避くべからざる必然の强制力を自由振動の公式に入れたのは Lord Rayleigh がその教科書の何處かに振動體は常に空氣中に於て振動するから空氣の抵抗も廣義に考へる自由振動の中に入れてもよいと云ふ意味を述べて居る位だから一向差支は無いと思ひます。

最後に著者は强制振動の場合 (43)~(45) 式に照らし振幅が無限大になることがいづれの場合にも決して無いと書かれて居ますが筆者の研究では著者の指定した單弦强制方法では時を經るにつれ振幅は漸次增大し t が ∞ となれば,振幅は遂に無限大にならねばならぬのであるから,結論の相違を來たす原因を確かめるべく苦心して居ます。單弦强制振動に就て筆者は本會誌第 19 卷第 12 號に發表しましたが研究の途中に於ける執筆なりし爲,その後續

續改正を要する點あるを發見し近頃に至り漸く最終確定の私案を得ました。その結論の大要を玆に申上げねばなりません。一概に單弦强制振動と云ふても内容は色々ある。地震に依る地面の水平運動を一定振幅の單弦運動と假定する時地上の工作物が受ける單弦强制力又は小澤工學士が柱の一點に $Q\sin pt$ なる單弦强制横力の作用する場合の研究等に於けるものはたゞ 1 個の單弦强制力がいつまでも働らくだけである。斯くの如きものは單弦單純强制振動とでも名づくべきものである。單弦單純强制振動の微分方程式は自由振動の微分方程式と全く同型である。例令ば縦振動ならば双方とも

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p^2y=0,\qquad \text{式中}\ \frac{2\pi}{p}\ \text{は强制力又は自由振動の週期}$$

である。單弦單純强制振動の振幅は常に有限値にして決して無限大になることが無い。この種の强制振動の正解は本會誌第 19 卷第 12 號に發表して置きました。說明方法を改良する必要あるも根本的の改正は必要ありません。次に今日吾々が普通に單弦强制振動と云ふて居るものがある。これに對する筆者の研究は前回の報告當時未完了にて間違つた意見を書きましたから玆に訂正したものを書きます。この種の單弦强制振動の微分方程式は

縦振動では　$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p^2y=Q\sin pt$$

撓み振動では　$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\rho}{g}\times\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Q\sin pt$$

の類にして自由振動の微分方程式の後節零の代りに $Q\sin pt$ を用ふるものである。この種の强制振動は今日迄微分方程式の一特解を以て直ちに答とする結果謬れる結論即ち强制週期と自由週期が異なる時は振幅は永久に有限値であり，兩者同週期の場合に限り時間の經過に伴ひ振幅增大し，遂には無限大になると云ふ定說でありますけれども，その實この種の强制振動は單弦法則に從ふ外力が刻々新規に作用するもので單弦累加强制振動と稱すべく總ての場合常に振幅は時間の經過に伴ふて增大し t が ∞ となれば振幅も亦無限大になります。故にこの種の强制振動では强制力の作用時間を指定せずして工作物の設計などが出來ないことに爲る。何となれば僅小時間の間この種の强制力が作用するのと長い間作用するのとは振幅が違ひ從て應力の實値に大差を來たすからである。以上の詳細な證明を玆に書くことは時間が許しませんから後の機會に讓ります。著者の採擇せる單弦强制振動はこの部類に屬します。又吊橋に於てこの種の單弦强制力を考へることは全く至當である。但しその作用時間を無制限にしては如何程丈夫な吊橋でも壞れて仕舞ひます。この事柄は人間が吊橋に乘り振動に調子を合せて跳りますと振幅は次第に增大し，このいたづらを永續すれば吊橋が壞れる事實に符合するものである。著者の御研究に於ては單弦强制力の作用する時間の長さに制限を要求せねばならぬ事項が式中にないから或は Fourier 級數の項が無限大となり，從て y が常時無限大でこの形の公式が成立せないのではあるまいかと云ふ心配が以上の見地から生れて來ますが，詳細に吟味する暇がないから後日の研究に持越すことにしました。以上筆者の未發表の自己研究を種にして高說を評論した非禮の段は恐縮に堪へませんが，學問の爲にしたことゝ幾重にも御諒察を願ひます。

終りに臨み著者の有益なる論文に依て幾多の新知識を得たことを感謝して擱筆します。