彙　　報
第20卷第9號　昭和9年9月

グーデルマンの角と實双曲線函數及び指數函數の計算に就て

會員　坂　元　左　馬　太*

1. 緒　言

双曲線函數又は e^x 等の數値を必要とすることが往々ある。[1] それ等を度々使用するには適當な表[2]を利用するから不便はないのであるが，稀に必要で手元に數表の無い時にはその計算が稍面倒である。この場合にはよく知られて居るグーデルマンの角(Gudermannian)を使つて普通の三角函數の表から讀み取れば便利な或る場合が多い。

2. 實双曲線函數

實双曲線函數の定義は

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}$$

---

* 鐵道技手　鐵道省工務局勤務

1) 最近の土木學會誌でそれ等の形を有する式のあるもの 2, 3 を揭ぐれば次の通りで殆ど每號にある。

卷	號	頁	著　者
19	12	1026-1040	小澤氏
〃	10	855- 860	石川氏（討議）
〃	〃	888- 892	（參考資料）
〃	9	741- 763	本間氏
〃	8	641- 663	遠藤氏
〃	7	590- 593	（參考資料）
〃	6	445- 450	島田氏
〃	5	345- 348	庄野氏（討議）
〃	4	283- 286	（參考資料）
〃	3	177- 199	田村氏
〃	〃	201- 212	福田氏
〃	2	135- 156	松村氏
〃	1	1- 39	J. Kuno 氏

2) K. Hayashi; Fünfstellige Tafeln der Kreis-und Hyperberfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x}, Walter de Gruyter.
K. Hayashi; Sieben-und mehrstellige Tafeln der Kreis-und Hyperberfunktjonen und deren Produkte sowie der Gammafunktionen, Julius Springer.
K. Hayashi; Tafeln der Besselischen, Theta-, Kugel-und anderer Funktionen, Julius Springer.
W. Ligowski; Tafeln der Hyperberfunktionen und der Kreisfunktion.
Becker and van Orstrand; Smithonian Mathematical Tables.
A. E. Kennely; Tables of complex hyperbolic and circular funktions.

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x}$$

又これから

$$e^x=\cosh x+\sinh x \cdots\cdots (2.1)$$

$$e^{-x}=\cosh x-\sinh x \cdots\cdots (2.2)$$

そしてよく知られて居る樣に

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{n!} \cdots\cdots (2.3)$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \cdots\cdots (2.4)$$

であるから (2.3), (2.4) を計算することに依つて實双曲線函數は任意の x に就て計算し得ることは明かである。然し x が稍大きいと $\frac{x^n}{n!}$ の計算はあまり簡單とは云へない。[1] 今 $x=2.05$ の場合を計算して見ると

項	x^n	$n!$	$\frac{x^n}{n!}$
1	1.0	1	1.000 000 000
2	2.050	1	2.050 000 000
3	4.202 5	2	2.101 250 000
4	8.615 125	6	1.435 854 167
5	17.661 006 25	24	0.735 875 263
6	36.205 062 81	120	0.301 708 857
7	74.220 378 56	720	0.103 083 859
8	152.151 776 04	5 040	0.030 188 844
9	311.911 410 56	40 320	0.007 735 898
10	639.417 84	362 880	0.001 762 064
11	1 310.806 57	3 628 800	0.000 361 223
12	2 687.153 5	39 916 800	0.000 067 319
13	5 508.664 6	479 002 000	0.000 011 500
14	11 292.763	6 227 021 000	0.000 001 814
15	23 150.2	87 178 000 000	0.000 000 266
16	47 457.5	1 307 700 000 000	0.000 000 036

これから

$$e^{2.05}=7.767\,901\,1$$

$$e^{-2.05}=0.128\,734\,9$$

$$\sinh 2.05=3.819\,583\,1$$

$$\cosh 2.05=3.948\,318\,0$$

であつて小數以下 7 桁まで正しい。

これは又自然對數の表或は

$$\log e^x=x\log e$$

1) 例へば Barlow の Table を使ひ省略算を應用したとしても。

から計算出來ることは勿論であるが，有效數字 8 箇を必要とする場合があつたとすれば，比例部分を使用するとして少くとも 9 桁の對數表が必要となる。[1]

3. グーデルマンの角

グーデルマン (C. Gudermann) は 1833 年に

$$\left.\begin{aligned}\sinh x&=\tan\theta\\ \cosh x&=\sec\theta\\ \tanh x&=\sin\theta\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

なる關係のある θ の存在することを發表した (Theorie der potential-cyklisch-hyperbolischen Funktionen.)。

式 (3.1) で θ を x のグーデルマニアン又はグーデルマンの角と云ひ $\theta=\mathrm{gd}\,x$ と書く，その逆函數を $\mathrm{gd}^{-1}\theta$ と書き x のランバーシヤン (Lambertian) と云ひ，次の關係のあることが知られて居る。

$$x=\mathrm{gd}^{-1}\theta=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

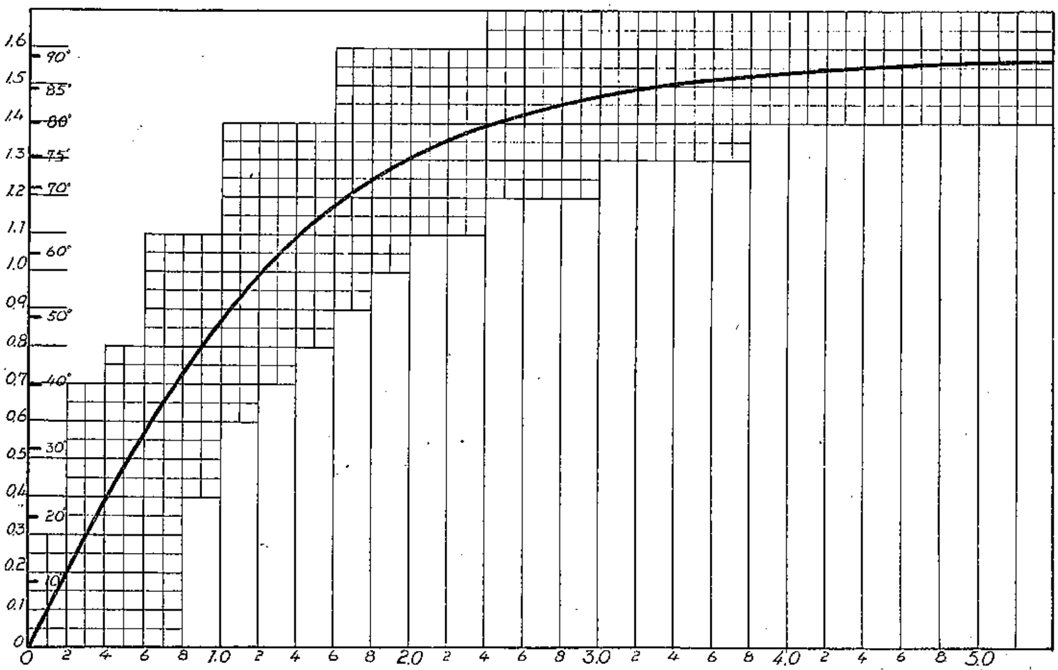
$$x=\mathrm{gd}^{-1}\theta=\ln(\tan\theta+\sec\theta)\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

$$x=\mathrm{gd}^{-1}\theta=\theta+\frac{1}{6}\theta^3+\frac{1}{24}\theta^5+\frac{61}{5\,040}\theta^7+\cdots,\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

$$\mathrm{gd}\,x=\theta=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5-\frac{61}{5\,040}x^7+\cdots,\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

$$\mathrm{gd}\,x=\theta=\frac{\pi}{2}-\mathrm{sech}\,x-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sech}^3x}{3}-\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{sech}^5x}{5}-\cdots,\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

第　1　圖



1) 米田外 4 氏　實用數學便覽　第 87 頁

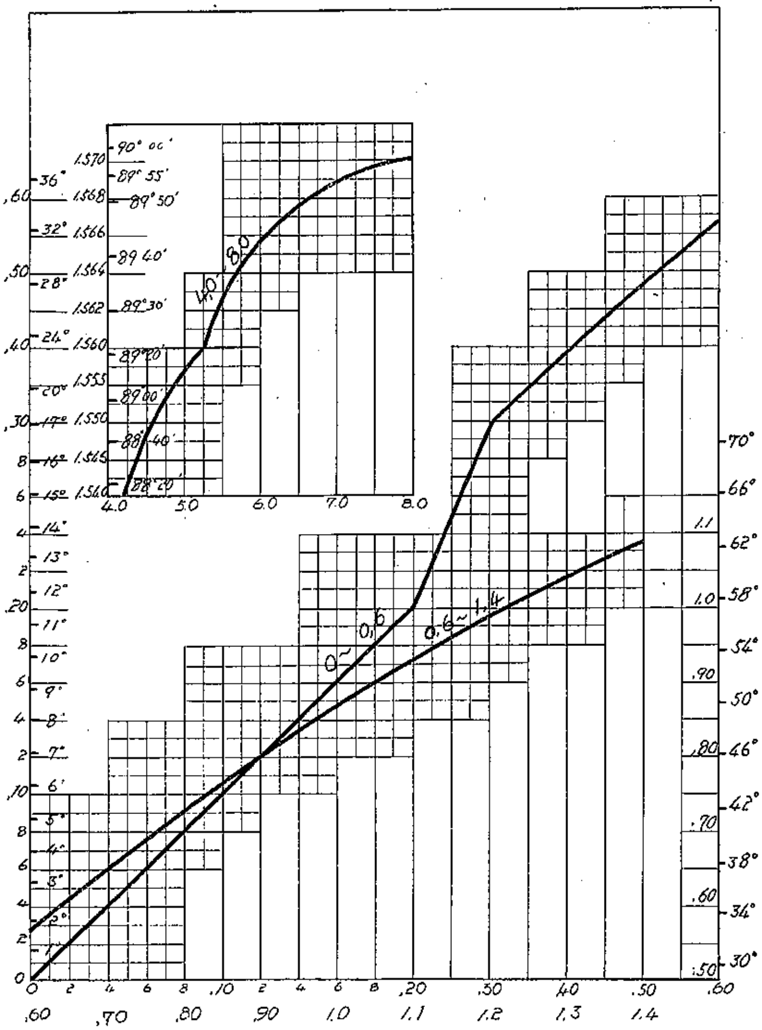
これから θ を計算するに x が小さい時は式 (3. 5) を使へばよく，x が大きい時は式 (3. 6) に依ればよい。後者は双曲線函數表のあることを假定して居るから都合が悪い。

この時にはグーデルマンの角の表を使へば便利であるが次の樣にしてもよい。[1] 附圖から x に應ずる θ を讀み取る。式 (3. 1) によつて三角函數の表から實双曲函數を求め得る。

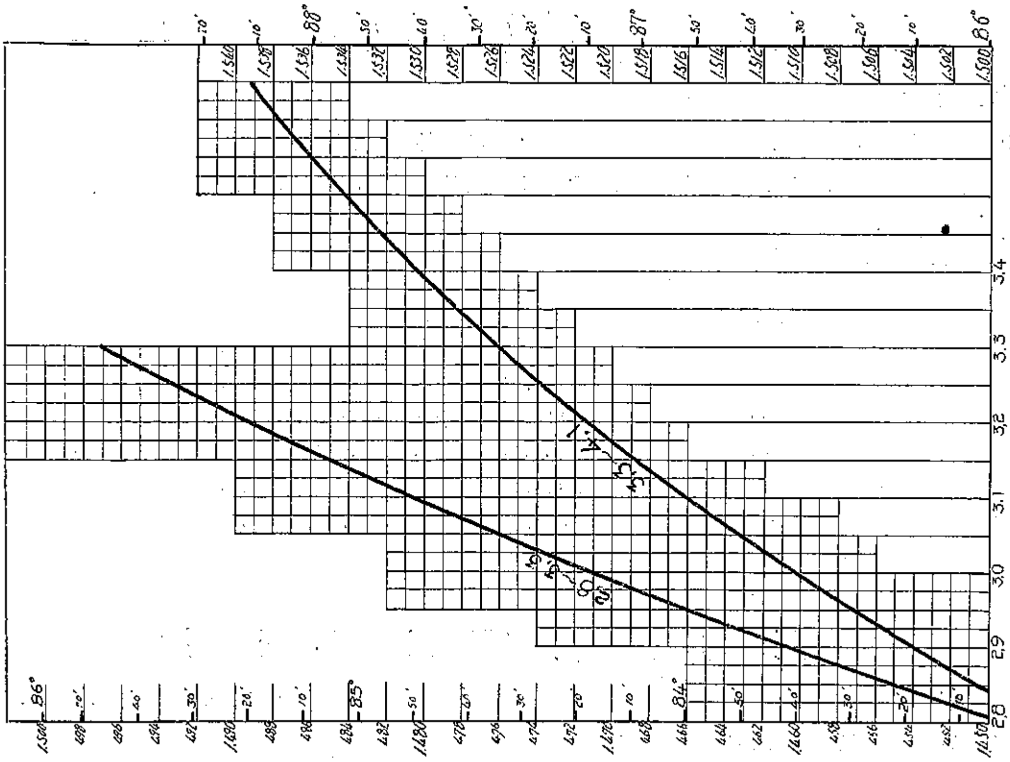
無論双曲函數のグラフを使つた方が便利なこともあるが，その時には枚數が多くなる虞があります。斯くして細い處を求めるには，

$$\sinh(x+\Delta x)=\sinh x+\frac{\Delta x}{1!}\cosh x+\frac{\Delta x^2}{2!}\sinh x+\frac{\Delta x^3}{3!}\cosh x+\cdots,$$

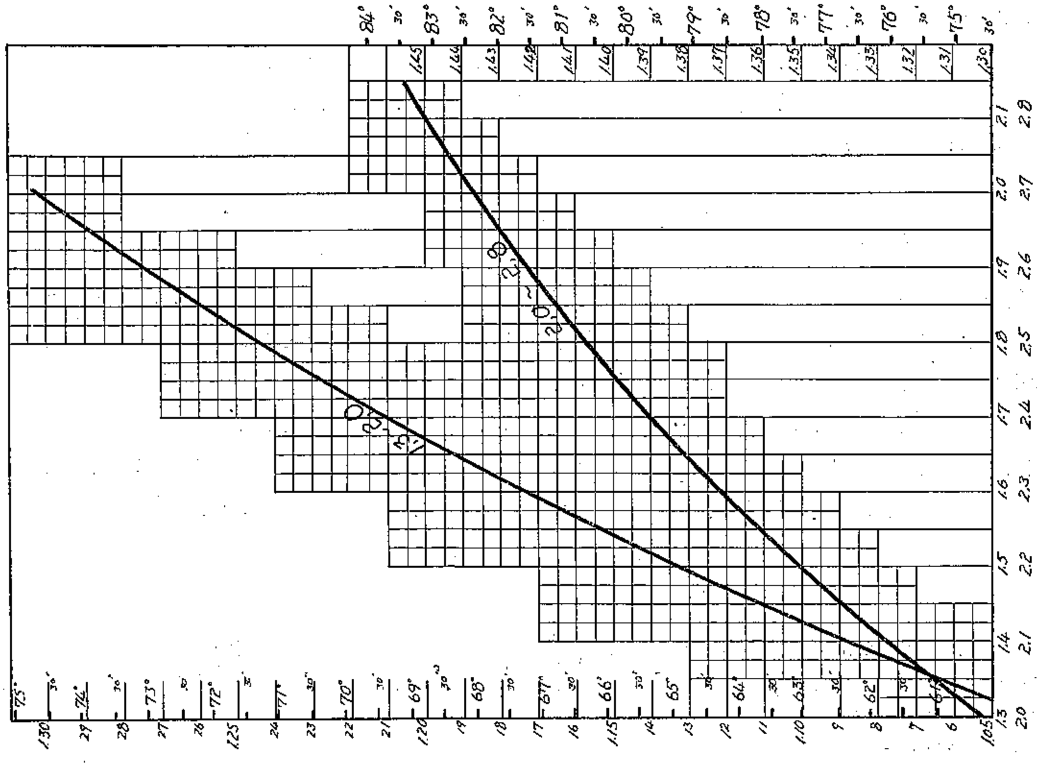
第　2　圖



1) 逸見—25 種　ユニバーサル計算尺ではグーデルマンの角双曲線函數等が直接求まり，ベクトルの計算にも便がある。



第 4 圖



第 3 圖

$$\cosh(x+\varDelta x)=\cosh x+\frac{\varDelta x}{1!}\sinh x+\frac{\varDelta x^2}{2!}\cosh x+\frac{\varDelta x^3}{3!}\sinh x+\cdots,$$

で計算してもよい。

$\sinh x$, $\cosh x$ がわかれば e^x, e^{-x} は式 (2. 1), (2. 2) から容易に求まる。

θ を與へて x を計算するには角の小さい時は式 (3. 4) が便利であるが θ が稍大きい時は收歛が遲いから式 (3. 2) に依る方がよい。[1)]

又 x が小さい時は $x=\theta$ としてもよい。

正確を要する桁	$x=\theta$ としてよい角
0.000 000 1	0.006 694 rd.≒ 0° 23′ 01″≒ 0.°383 3
.000 001	.014 422 〃 ≒ 0 49 35 ≒ 0. 826 3
.000 01	.031 073 〃 ≒ 1 46 49 ≒ 1. 780 3
.000 1	.066 943 〃 ≒ 3 50 08 ≒ 3. 835 5
.001	.144 225 〃 ≒ 8 15 49 ≒ 8. 263 6
.01	.310 723 〃 ≒17 48 12 ≒17. 803 3

天神橋改築工事概要

會員 工學士 堀 威 夫*

1. 事 業 大阪市第一次都市計畫事業

2. 位 置

路 線: 松屋町筋線 河 川: 堂島川及び土佐堀川

北 詰: 北區天神橋筋1丁目 南 詰: 東區京橋3丁目

3. 構 造

徑間數: 5

橋 型: { 2—側徑間 鐵筋コンクリート拱 / 3—主徑間 鋼2鉸拱 }

試鑽及び試驗杭打により本橋地點は相當堅地盤なるものと認め，初めは各徑間何れも鐵筋コンクリート拱として設計を完成したるも，徑間大なる上に稀有の扁平拱なるため拱の水平力甚だ大にして地盤の耐力その他更に愼重なる考慮を必要とするに至れり。その結果再び地質調査を行ひて，滑動危險性の粘土層を配合 1:3:6 のコンクリートを以て置換する事として兎も角も下部構造工事を施工したり。而して基礎地盤迄掘鑿後鐵道省官房研究所に依賴して土壤の剪斷試驗を行ひたるに，その成績によるも，鐵筋コンクリート拱の不適當なることを裏書するのみなりしを以て，玆に3つの主徑間を鋼2鉸拱に變更して後顧の憂少なからしめんことを期したり。

橋長: 210.7 m, 幅員: 22.0 m, 車道: 15.8 m, 步道: 各 3.1 m

面積: 4 635.0 m²

1) $\ln a=2.30258\ 50929\ 94046\log a$, $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ の計算値は次の表が便利である，J. Peters: Siebenstellige Logarithmentafeln der Trigonometrischen Funktionen für jede Bogensekunde des Quadraten, Wilhelm Engelmann.

* 大阪市技師