

参 考 資 料

第 20 卷 第 5 號 昭 和 9 年 8 月

2 次元的に考へた半無限弾性體の理論に對する或る注意

(Erich Friedrich, "Eine Bemerkung zur Theorie der Halbscheibe" Ingen. Archiv. Heft 1, 1934.)

(1) 應力函数を F とすれば, $\Delta F=0$ となる。又周邊に於ては, この函数は連續な曲面をあらはしてゐなければならぬ。

今 $f(s)$ を, 荷重に對して生ずる境界條件, $h(s)$ を應力函数のあらはす曲面の周邊の傾きに對する境界條件とする。 h が境界上のすべての點で 0 となる様な場合 f の有すべき條件がある。

今 $U=\partial F/\partial x, V=\partial F/\partial y$ とおけば

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \sigma_1$$

又 $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$ 及び $\Delta \sigma_1 = 0$

である。 n を周邊 s に於ける法線とすれば

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dn}, \quad \frac{dy}{ds} = +\frac{dx}{dn}$$

であるから

$$f(s) = \int_0^s \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) ds,$$

故に $\frac{df(s)}{ds} = U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} = -U \frac{dy}{dn} + V \frac{dx}{dn}$ (1)

$$0 = h(s) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dn} = U \frac{dx}{dn} + V \frac{dy}{dn}$$
(2)

(1) と (2) から

$$U(s) = -\frac{df(s)}{ds} \frac{dy}{dn}, \quad V(s) = +\frac{df(s)}{ds} \frac{dx}{dn}$$

又 $\partial U/\partial y = \partial V/\partial x$ であるから

$$\int^R (U dx + V dy) = 0$$

である。今得た U, V を入れると

$$\int^R \frac{df(s)}{ds} ds = 0$$
(3)

(2) Nádai は半無限弾性體(標題の如き約束の下で, 以下同様)に等布荷重が 0 點から ∞ までのつてゐる場合の F を得たが

$$x > 0, f(s) = 0, \quad x < 0, f(s) = \frac{px^2}{2}$$

であつてこれは (3) を満足しない。

處が荷重が x 軸に沿つて $-\infty$ から $+\infty$ まで一樣にかゝる場合には

$$f(s) = \frac{px^2}{2}$$

で (3) の式を満足する。

Craemer は $x < 0$ では上向きに $x > 0$ では下向きに等布荷重のかゝる場合を與へたがこれも (3) 式を満足する。

(3) $x=0, y=0$ に P なる垂直な力が加はり x 軸上無限の距離に平衡に必要な反對の力 $-P$ が加はる場合には, 荷重の状態として, 次の境界條件を得る

$$x > 0: \quad \frac{df}{dx} = -\frac{P}{2}, \quad f = -\frac{P}{2}x$$

$$x < 0: \quad \frac{df}{dx} = +\frac{P}{2}, \quad f = +\frac{P}{2}x$$

(3) の條件は満たされてゐる。

$$F = \varphi_1 + y\varphi_2$$

とおく。 φ_1, φ_2 は 2 つの調和函数とする。 $y=0$ に對して $F = \varphi_1 = f$ でなければならぬ。故に

$$\varphi_1 = \frac{P}{\pi} (x\theta + y \ln \gamma) - |x| \frac{P}{2}$$

又 $y=0$ に於て

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \varphi_2 + y \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

であるから

$$\varphi_2 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

である。故に應力函数として,

$$F = \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y$$

又は
$$F = \frac{P}{\pi} \left[x\theta - y - |x| \frac{P}{2} \right] \dots\dots\dots(4)$$

しかるに、この最後の 2 項は x, y に就て線型であるから取り除いて、結局

$$F = \frac{P}{\pi} x\theta \dots\dots\dots(5)$$

を得る。

(4) 以上の結果に依り $x = \xi$ に P なる力が加はつた時の $x = a, y = b$ の應力函数は

$$F(a, b) = P\eta(\xi)$$

但し

$$\eta(x) = \frac{1}{\pi} \left[(x-a) \operatorname{arctg} \frac{b}{x-a} - b - |x-a| \frac{P}{2} \right] \dots\dots\dots(6)$$

故に、分布された荷重に就ては

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)\eta(\xi)d\xi \dots\dots\dots(7)$$

を得る。

(最上武雄 抄譯)

振動問題をマトリックスで解く方法

(W. J. Duncan & A. R. Collar "A Method for Solution of Oscillation Problems by Matrix" Phil. Mag. Sev. Series. May 1934.)

譯者言。全文を御紹介したいのであるが、全文は Phil. Mag. 30 頁に亘るものなので到底このまゝやかな参考資料欄に盡す事は出来ない。故に、最初にあげてある例を一つ御紹介しておく事にする。

Matrix を利用する事の利點は

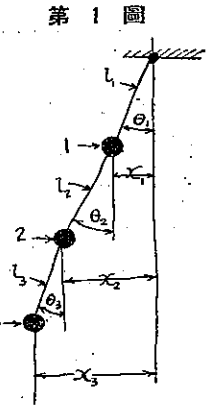
- (1) 特に唯振動の基本様式を求めるだけならば、解に含まれてゐる算術計算は甚だ簡単になる。
- (2) 最後の系にある如くに、非常に多くの自由度を有する System を取扱ふ事に對しても實用になり得る。
- (3) 方法には、試験的算法が全くない。
- (4) 最後の計算の正しさは、解法の途中で、ひとりでに、ためされる。
- (5) いかに大きくても誤差は、どの計算の階段に起

つても、最後の結果の正確さには影響しない。誤差の悪い影響は唯計算を長びかすだけである。

方法の初歩的概観

3 段振子の小さな振動を考へる (第 1 圖参照)。

簡単のために 3 つの振子の重りは、重く且つ大きな質點とし、連結せる索は重さなきものとする。又連結點は、1, 2 の位置と一致するものとする。質點 1 に單位の大きさの水平力を作用させやう。この力系がこの力の作用の下で釣合ひの状態にあるとした場合、各質點の水平方向の變位



を夫々 f_{11}, f_{21}, f_{31} とする。同様に、2 及び 3 なる質點にかゝつた 1 なる力に依る變位を夫々 $f_{12}, f_{22}, f_{32}; f_{13}, f_{23}, f_{33}$ とする。實際のかゝる "flexibility, coefficient" はあとで求める。

9 つの係数の組合ひは "flexibility, matrix" と呼ばれる正方マトリックス $[f]$ の要素となり得る。

$$[f] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

さて P_1, P_2, P_3 なる力が夫々 1, 2, 3 の質點に働くものとすれば、平衡を保つてゐる場合のこの系の變位は、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_{11}P_1 + f_{12}P_2 + f_{13}P_3 \\ x_2 &= f_{21}P_1 + f_{22}P_2 + f_{23}P_3 \\ x_3 &= f_{31}P_1 + f_{32}P_2 + f_{33}P_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

力 P 及び變位 x から、列マトリックス (column-matrix) が作れる。

即ち力マトリックス

$$[P] = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

又變位マトリックス

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

マトリックス乗積 $[f][P]$ を作ると、これは、要素が (2) 式の右邊にあらはれる式である列マトリックスである。故に3つの線型方程式は次の一つのマトリックス方程式と等價である。

$$[x] = [f][P] \dots \dots \dots (5)$$

自由振動の場合には、1, 2, 3 の質量を夫々 m_1, m_2, m_3 とすれば力學方程式は

$$[x] = [f][-\dot{m}\ddot{x}] \dots \dots \dots (6)$$

茲に

$$[-\dot{m}\ddot{x}] = \begin{pmatrix} -m_1\ddot{x}_1 \\ -m_2\ddot{x}_2 \\ -m_3\ddot{x}_3 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

(6) 式はもう少し便利な形に書き直す事が出来る。即ち $[m]$ を次の如きマトリックスとすれば

$$[m] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

$$[m\ddot{x}] = [m][\ddot{x}] \dots \dots \dots (9)$$

すると (6) 式は

$$[x] = -[f][m][\ddot{x}] \dots \dots \dots (10)$$

$$= -[D][\ddot{x}] \dots \dots \dots (11)$$

茲に $[D]$ は “dynamical matrix” と言ふ。そして

$$[D] = [f][m],$$

$$= \begin{pmatrix} f_{11}m_1 & f_{12}m_2 & f_{13}m_3 \\ f_{21}m_1 & f_{22}m_2 & f_{23}m_3 \\ f_{31}m_1 & f_{32}m_2 & f_{33}m_3 \end{pmatrix}$$

今3つの質點が一つの様式で振動してゐるとする。即ちすべての質點が共通の振動數 f を有する單弦運動をとする。若し $p = 2\pi f$ ならば $\ddot{x}_1 = -p^2 x_1$ 等であるから、(11) 式は次の如くなる。

$$[x] = p^2 [D][x] \dots \dots \dots (13)$$

このマトリックス方程式は、次の3つの通常の方程式と等價である。

$$\left. \begin{aligned} x_1(f_{11}m_1 - 1/p^2) + x_2 f_{12}m_2 + x_3 f_{13}m_3 &= 0 \\ x_1 f_{21}m_1 + x_2(f_{22}m_2 - 1/p^2) + x_3 f_{23}m_3 &= 0 \\ x_1 f_{31}m_1 + x_2 f_{32}m_2 + x_3(f_{33}m_3 - 1/p^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

今 $\lambda = 1/p^2 \dots \dots \dots (15)$

とおけば、上の同次線型方程式は、若し λ が次の行列式方程式の根であるならば、互ひに成立し得る。(compatible になる。譯者註 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の根を有する)

$$\begin{vmatrix} \lambda - f_{11}m_1 & -f_{12}m_2 & -f_{13}m_3 \\ -f_{21}m_1 & \lambda - f_{22}m_2 & -f_{23}m_3 \\ -f_{31}m_1 & -f_{32}m_2 & \lambda - f_{33}m_3 \end{vmatrix} = 0 \dots (16)$$

(16) の中の定數の順序は符號を除いては $[D]$ と同じであり、 λ は主對角線上にのみ入る。(16) の方程式をマトリックス D の固有方程式と言ふ。故に數種の様式の振動數は固有方程式の根からきまり、その振幅の比は、(14) 式より決まる。マトリックス方程式 (13) の正統な解法は固有方程式の根 λ を計算してから (14) の線型方程式を解くのである。

しかし基本週期及びその様式に於ける振幅の比は、非常に簡単に、マトリックス方程式に次々に置換を行ふ事に依つて求められる。任意の最初の變位の組合 $[x]_0$ を取り、

$$[D][x]_0 = [x]_1 \dots \dots \dots (17)$$

とおき次に $[x]_0$ の代りに $[x]_1$ とおけば

$$[x]_2 = [D][x]_1 = [D]^2 [x]_0 \dots \dots \dots (18)$$

この次ぎ次ぎの置換を限りなく行へば $[x]_n$ の要素の比は基本様式に對する或る定數に近づき $[x]_n$ と $[x]_{n-1}$ の對應する要素の値の比が基本様式に對する $\lambda = 1/p^2$ に近づく事が證明出来る。通常この收斂は非常に早いから、ある精度を得るためになすべき置換はごく少くして良い。

解法の順序を示すために數字例をやつて見やう。まづ、 “flexibility coefficient” を求めなければならぬ。それは次の原理に依り非常に簡單になる。

(a) 振子の任意の點の張力は、その點以下の質點の全重量に等しい。

(b) 張力の水平分素は、その点以下の質点に加へられた、全横力に等しい。

(c) (b) により、若し、ある一つの力がある質点に加へられた時には、それ以下のすべての質点は同じ変位を有す。

(d) (b) により、與へられた質点の変位は、その質点以下に於ける與へられた力の着力点すべてについて同じである。

(c) に依つて、 $f_{01}=f_{21}=f_{11}$ 及び $f_{02}=f_{22}$

又 (d) に依つて、 $f_{11}=f_{12}=f_{13}$ 及び $f_{22}=f_{23}$

これ等を組合せて、

$$f_{01}=f_{11}=f_{21}=f_{12}=f_{13} \dots\dots\dots (19)$$

及び $f_{02}=f_{22}=f_{23} \dots\dots\dots (20)$

故に "flexibility coefficient" は 3つの異なる値を有するのみとなる。それを f_{10}, f_{20}, f_{30} と取る事が出来る。そしてそれ等は、單位の水平力が、質点3に加はつた場合を考へれば分かる。(a) 及び (b) に依り

$$gm_3\theta_3 = g(m_2 + m_3)\theta_2 = g(m_1 + m_2 + m_3)\theta_1 = 1 \dots (21)$$

故に

$$f_{10} = x_1 = l_1\theta_1 = \frac{l_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} \dots\dots\dots (22)$$

$$f_{20} = x_2 = x_1 + l_2\theta_2 = \frac{l_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{l_2}{g(m_2 + m_3)} \dots\dots\dots (23)$$

$$f_{30} = x_3 = x_2 + l_3\theta_3 = \frac{l_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{l_2}{g(m_2 + m_3)} + \frac{l_3}{gm_3} \dots\dots\dots (24)$$

今 $m_1 = m_2 = m_3 = m, l_1 = l_2 = l_3 = l$

とすれば、(19), (24) 式より

$$f_{01} = f_{10} = f_{21} = f_{12} = f_{13} = \frac{l}{3gm}$$

$$f_{02} = f_{20} = f_{22} = \frac{5l}{6gm}$$

$$f_{03} = \frac{11l}{6gm}$$

故に dynamical matrix は、(12) 式より

$$[D] = \frac{l}{6g} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

又 (13) のマトリックス方程式は、

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \dots (26)$$

茲に

$$w = \frac{6g}{p^2 l} \dots\dots\dots (27)$$

今 $[x]$ として例へば、 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ をとれば

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

逐次置換は

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$= 15 \begin{pmatrix} 4/15 \\ 9/15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/15 \\ 9/15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 8\frac{1}{3} \\ 14\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= 14.53 \begin{pmatrix} 0.256881 \\ 0.587156 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

又

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.256881 \\ 0.587156 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= 14.4495 \begin{pmatrix} 0.255238 \\ 0.584762 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

これを相ついで行ふ場合には次の表を得る。

實測は長さ 1194.30 m の規則正しき部分にて行ひ、河底及び水面の勾配測定によつて右岸に約 100 m おきに水位計を作つた(第 3 圖)。横斷は原點より 250, 700 及び 1150 m の距離のものを取つた(第 4 圖)。流量は水路の初めと終りにて標準水位各々 0.50, 0.76 及び 1.00 m の時に測る。夫々の場合の測定及び計算の結果は次の 3 表に示す。

(1) 標準水位 0.50 m

平均流量 10.780 m³/sec, 平均水面勾配 0.0010 87

	断面 1	断面 2	断面 3
流水斷面積 m ²	13.49	11.87	10.51
潤 邊 長 m	14.36	13.12	14.15
自然土 m	13.33	12.06	13.27
	護 岸 m	1.03	1.06
平均 徑 m	0.939	0.905	0.743
平均 流速 m/sec	0.799	0.908	1.026

(2) 標準水位 0.76 m

平均流量 16.127 m³/sec, 平均水面勾配 0.0010 87

	断面 1	断面 2	断面 3
流水斷面積 m ²	17.00	14.87	13.85
潤 邊 長 m	14.90	13.62	14.65
自然土 m	13.60	12.31	13.53
	護 岸 m	1.30	1.31
平均 徑 m	1.141	1.092	0.945
平均 流速 m/sec	0.949	1.085	1.168

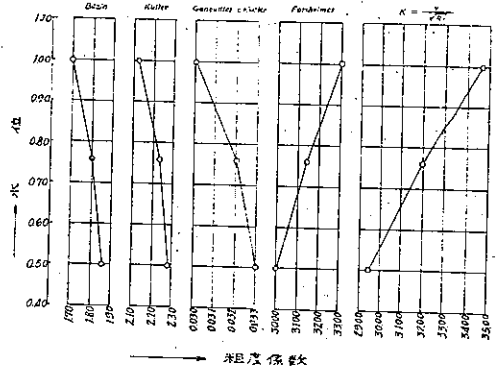
(3) 標準水位 1.00 m

平均流量 22.492 m³/sec, 平均水面勾配 0.0011 12

	断面 1	断面 2	断面 3
流水斷面積 m ²	20.25	17.69	16.99
潤 邊 長 m	15.42	14.09	15.50
自然土 m	13.87	12.545	14.16
	護 岸 m	1.55	1.545
平均 徑 m	1.313	1.256	1.096
平均 流速 m/sec	1.109	1.270	1.322

これ等の観測値を利用して $v=K\sqrt{Ri}$ に於ける係數 K の値及びこの K より更に Bazin, Kutter, Ganguillet and Kutter 及び Forchheimer の 4 公式に於ける粗度係數を計算した結果, これ等の粘度係數は第 5 圖の如く水位と共に多少の變化を來した。而もこれ

第 5 圖



等は何れも一般に用ひられる値よりも大であるからこの水路に於ては流量は計算値よりも小さくなる傾向がある。これは他の運河に就ても同様であつた。

(本間 仁 抄譯)

造波抵抗の計算法

T. H. Havelock "The Calculation of Wave Resistance." Proceedings of the Royal Society. Series A, Vol. 144. May 1, 1934, p. 514~521.

摩擦抵抗なき流體中を運動する物體に働く造波抵抗の計算法の一つとして波動中の勢力の流れ (flow of energy) を調べるものがある。この方法は平行線狀の波頂を持つ 2 次元的問題にのみ用ひられてゐたが、茲にはこれを 3 次元まで擴張せんとするのである。

深き水域の自由表面上に原點 O を取り, OZ 軸を鉛直上向に定めれば表面の條件は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad z=0 \dots\dots\dots(1)$$

但し ϕ : ポテンシャル, ξ : 水面上昇

OX の方向に一様速度 c にて進行する雁行波に對しては

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z=0, \quad (\kappa_0 = g/c^2) \dots(2)$$

OX 軸に θ なる角をなす方向に進む一つの平面波は次の如く與へられる。

7

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \sin \{ \kappa_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - ct \cos \theta) \} \\ \phi &= ac \cos \theta e^{\kappa_0 x'} \sec^2 \theta \cos \{ \kappa_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta \\ &\quad + y \sin \theta - ct \cos \theta) \} \end{aligned} \right\} (3)$$

これを一般化してあらゆる方向の平面波より成る一つの自由雁行波にてそれ自身は OX 方向に c なる速度にて進むものを求める。その時は

$$\xi = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) \sin \{ \kappa_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - ct \cos \theta) \} d\theta \dots (4)$$

今は OX に就て対稱と考へ、且 $x' = x - ct$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) \sin \{ \kappa_0 x' \sec \theta \\ &\quad \times \cos(\kappa_0 y \sin \theta \sec^2 \theta) d\theta \\ \phi &= 2c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) e^{\kappa_0 x'} \sec^2 \theta \cos \{ \kappa_0 x' \sec \theta \\ &\quad \times \cos(\kappa_0 y \sin \theta \sec^2 \theta) \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$x = \text{const.}$ なる面を考へればこの面を通る全勢力の流れの割合は

$$\frac{1}{2} \rho c \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dy + \frac{1}{2} g \rho c \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 dy \dots (6)$$

同じ面を通してなされてある仕事の割合は

$$\rho c \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dy \dots (7)$$

雁行波はこれ等の量が有限確定なものであると假定する。

(5), (6) 式を用ひてこれ等の量を計算する爲に次の定理を用ふる。若し

$$\left. \begin{aligned} F_1(y) &= \int_0^{\infty} (A_1 \cos yu + B_1 \sin yu) u du \\ F_2(y) &= \int_0^{\infty} (A_2 \cos yu + B_2 \sin yu) du \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

が成立するならば (但し A, B は u の函数)、諸積分は収斂するものと假定して次の關係が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(y) dy = \pi \int_0^{\infty} (A_1 A_2 + B_1 B_2) du \dots (9)$$

(6) 式中の積分の一つは

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2\kappa_0 c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) e^{\kappa_0 x'} \sec^2 \theta \sin(\kappa_0 x' \sec \theta) \times \cos(\kappa_0 y \sin \theta \sec^2 \theta) d\theta \dots (10)$$

この中にて $u = \kappa_0 \sin \theta \sec^2 \theta$ とおけば (8) 式の形になるから (9) 式を用ひて書き直せば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dy = 4\pi \kappa_0 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ f(\theta) \}^2 e^{2\kappa_0 \sec^2 \theta \sin^2(\kappa_0 x' \sec \theta)} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = 2\pi c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ f(\theta) \}^2 \sin^2(\kappa_0 x' \sec \theta) \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \dots (11)$$

従つてこの鉛直面を通る全勢力の流れの割合は

$$\pi \rho c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ f(\theta) \}^2 (3 - \sin^2 \theta) \sin^2(\kappa_0 x' \sec \theta) + (1 + \sin^2 \theta) \cos^2(\kappa_0 x' \sec \theta) \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \dots (12)$$

同様にしてこの面を通してなされる仕事の割合は

$$2\pi \rho c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ f(\theta) \}^2 \sin^2(\kappa_0 x' \sec \theta) \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \dots (13)$$

茲に求めんとするものはこの 2 量の差であつて、時間及び面の位置に無關係でなければならぬ。(12) 式より (13) 式を減ずれば

$$\pi \rho c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ f(\theta) \}^2 \cos^2 \theta d\theta \dots (14)$$

次に流體中を運動する物體による強制雁行波を考へれば、表面上昇は局部的攪亂と雁行波に分たれる。摩擦抵抗なき流體中には可能なる解は雁行波が物體の前後無限の距離まで擴がる如きものであるが、實際的の解は前方の相當の距離にて雁行波は消える如きものであつて、これに全水面に擴がる適當な自由雁行波が合成したものと考へる事が出来る。その場合は物體の遙か前方と遙か後方の 2 つの鉛直面を通る勢力の流れと仕事の割合を考へる事によつて (14) 式は Re に等しい事が知られる。但し R は造波抵抗である。その時遙か後方の雁行波は (4) 式にて與へられる形を呈するものとすれば

$$R = \pi \rho c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{f(\theta)\}^2 \sec^3 \theta d\theta \dots (15)$$

これ等の結果を一般化する前に (6) 及び (7) 式を次の様に書き直す。即ち δx だけ離れた 2 つの鉛直面の間の部分に於ける流體の運動勢力は

$$\frac{1}{2} \rho x \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dy \dots (16)$$

雁行波は種々の積分が収斂する如きものとして (16) 式をこの部分の境界面上の面積分に書き直せば、一鉛直面を通る運動勢力の流れとして

$$\frac{1}{2} \rho c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} dy + \frac{1}{2} \rho c \int_{-\infty}^0 dz \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dy \dots (17)$$

更に (6) 式中の他の項と (7) 式とを表面の条件 (2) 式及び $z=0$ にて $g\xi = -c \partial \phi / \partial x$ なる条件を用ひて書き直し、最後に (6) 式と (7) 式の差を Rc に等しと置けば

$$R = \frac{\rho}{2\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\}_{z=0} dy - \frac{1}{2} \rho \times \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} dz \dots (18)$$

ϕ は物體の遙か後方に於ける擾亂には \approx 等しい自由雁行波の速度ポテンシャルである。任意の形の物體によつて生ずる擾亂を考へればこの自由雁行波の一般形は次の如くにならねばならない。

$$\xi = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) \sin \{ \kappa_0 \sec^2 \theta (x' \cos \theta + y \sin \theta) \} d\theta + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} F(\theta) \cos \{ \kappa_0 \sec^2 \theta (x' \cos \theta + y \sin \theta) \} d\theta \dots (19)$$

これは $A = \kappa_0 x' \sec \theta$, $B = \kappa_0 y \sin \theta \sec^2 \theta$ として次の形になる。

$$\xi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (P_1 \sin A \cos B + P_2 \cos A \sin B + P_3 \cos A \cos B + P_4 \sin A \sin B) d\theta \dots (20)$$

これに對應する速度ポテンシャルは

$$\phi = c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (P_1 \cos A \cos B - P_2 \sin A \sin B - P_3 \sin A \cos B + P_4 \cos A \sin B) e^{\kappa_0 r \sec^2 \theta} \cos \theta d\theta \dots (21)$$

更に (8) 式及び (9) 式の定理を用ひれば次の一般形を得る。

$$R = \frac{1}{4} \pi \rho c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) \cos^3 \theta d\theta \dots (22)$$

與へられた物體に對する P の値を計算する方法はこれと對等な流出點又は流入點と置き換へて、 P を物體表面上の積分形にする事によつて行ふ。

(中間 仁 抄譯)

三角級數に依る桁の撓度決定法

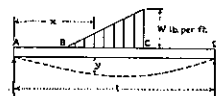
(A. A. Jakkula "Determining Beam Deflections by Trigonometric Series." Eng. News-record, May 24, 1934.)

任意の載荷状態に於て桁の任意の點の撓度を求める方法は色々あるが任意の點の撓度を表す方程式を作る方法は 2 通りあるのみである。最も普通に用ひられる方法は弾性線の方程式を作つて解くのである。

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \dots (1)$$

例へば下圖に示す様な荷重の場合、 M の値は A から B 、 B から C 、 C から D の 3 部分各々異つた形の式になり、撓度 y を求める式は 3 部分に分たれ、各々 2 個の積分常數が出来る故全體で 6 個の常數を生じこれ等のを條件端や連續性の條件から求めなくてはならぬ爲に時としては相當煩雜な手數を要する。

第 6 圖



S. Timoschenko の爲せる如く y を三角函數の級數の形に表はすと前述の方法の缺點と困難とを免れるこ

第 1 表 係数 a_n の値

No.	Type of Loading	A_n
I		$\frac{2P l^3}{EI \pi^2 n^3} \sin n \pi k_1$
II		$\frac{2W l^4}{EI \pi^2 n^4} [\cos n \pi k_1 - \cos n \pi k_2]$
III		$\frac{2W l^4}{EI \pi^2 n^4 (k_2 - k_1)} [\frac{1}{2} (\sin n \pi k_2 - \sin n \pi k_1) - \frac{1}{2} n \pi (k_2 - k_1) \cos n \pi k_1]$
IV		$\frac{2(M_A + M_B) l^3}{EI \pi^2 n^3}$ + if n is even - if n is odd

第 2 表 $\sin \frac{n\pi x}{l}$ の値

x	Value of n				
	1	2	3	4	5
.11	.3692	.5279	.6092	.5126	1.0000
.20	.5877	.8165	.8510	.5279	0
.25	.7071	1.0000	.7011	0	-.7071
.30	.8090	.8126	.5092	-.3273	-1.0000
.35	.8963	.6463	0	-.8082	-.8163
.40	.9596	.4279	-.3279	-.5126	0
.45	1.0000	0	-1.0000	0	1.0000
.50	.9596	-.4279	-.3279	.5126	0
.55	.8963	-.6463	0	.8082	-.8163
.60	.8090	-.8126	.5092	.3273	-1.0000
.65	.7071	-1.0000	.7011	0	-.7071
.70	.5877	-.8165	.8510	-.5279	0
.75	.3692	-.5279	.6092	-.5126	1.0000

第 3 表 三角級数の収斂

Type of Loading	Position of Load	Value of η	Exact Deflection	Coefficients of $\frac{P l^3}{EI \pi^2 n^3}$ in series				
				1 Term	2 Terms	3 Terms	4 Terms	5 Terms
I	K = .5	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.3217	.6783	.9709	.9267	.9268
				1.44	1.44	0.19	0.19	0
	K = .5	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0143	.0143	.0143	.0143	.0143
				1.19	1.19	0.14	0.14	0
	K = .25	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0143	.0143	.0143	.0143	.0143
				1.19	1.19	0.14	0.14	0
K = .25	.75	$\frac{P l^3}{EI}$.0127	.0127	.0127	.0127	.0127	
			1.24	1.45	0.34	0.34	.26	
II	K ₁ = 0	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0132	.0132	.0132	.0132	.0132
				0.36	0.36	0	0	0
	K ₁ = 0	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0024	.0024	.0024	.0024	.0024
				0.43	0.43	0	0	0
	K ₁ = .33	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0054	.0054	.0054	.0054	.0054
				0.78	0.78	.45	0.45	0.45
K ₁ = .33	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0042	.0042	.0042	.0042	.0042	
			0.87	0.87	0.44	0.44	0.44	
K ₁ = .33	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0054	.0054	.0054	.0054	.0054	
			0.46	0.46	0	0	0	
K ₁ = 0	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0010	.0010	.0010	.0010	.0010	
			0.52	0.40	0	0	0	
K ₁ = .33	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0042	.0042	.0042	.0042	.0042	
			0.44	0.43	0	0	0	
K ₁ = 0	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0054	.0054	.0054	.0054	.0054	
			1.10	1.10	0.16	0	0	
K ₁ = 0	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0054	.0054	.0054	.0054	.0054	
			0.46	0.46	0	0	0	
K ₁ = 0	.75	$\frac{P l^3}{EI}$.0054	.0054	.0054	.0054	.0054	
			2.91	0.17	0.17	0	0	
K ₁ = 0	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0027	.0027	.0027	.0027	.0027	
			1.20	1.24	0	0	0	
K ₁ = .33	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0018	.0018	.0018	.0018	.0018	
			1.20	1.35	0	0	0	
K ₁ = .33	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0018	.0018	.0018	.0018	.0018	
			1.15	1.05	0.55	0.55	0.55	
M ₁ and M ₂ as shown in Table I	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0050	.0050	.0050	.0050	.0050	
			1.20	1.20	0.42	0.42	0.31	
M ₁ and M ₂ as shown in Table I	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0481	.0481	.0556	.0556	.0556	
			16.85	1.07	1.25	1.25	0.57	
M ₁ = 0	.25	$\frac{P l^3}{EI}$.0481	.0481	.0524	.0524	.0524	
			16.76	1.02	0.46	0.46	.64	
M ₁ and M ₂ as shown in Table I	.51	$\frac{P l^3}{EI}$.0481	.0481	.0481	.0481	.0481	
			15.15	1.02	1.02	0.75	0.16	

とが出来る。使用する級数の形は

$$y = a_1 \sin \frac{1}{l} \pi x + a_2 \sin \frac{2}{l} \pi x - a_3 \sin \frac{3}{l} \pi x + \dots (3)$$

この級数は桁の全長に亘る x の値に適應し且各係数は容易に求まるが唯數項を取らぬと正確な値が得られぬ憾みがある。

以下誤差が 1% 以内である爲に要する項の數を調べて見やう。

第 1 表は數種の載荷状態に對する係数 a_n の一般形を示す。IV の場合は M_A, M_B を正と假定せり従つて y の値は負となる。實際に起る各種の荷重に對してはこれ等の各係数を加へる事に依りこの 4 個の場合から導くことが出来る。又 IV を他の場合と結合すると連續桁の撓度を得る。これ等の係数は Timoschenko の採つた方法で求めたが、普通 Fourier 級數によつても求めることが出来る。

第 2 表は $\sin \pi x/l, \sin 2\pi x/l, \dots$ 等の値を示す。第 3 表はこの級數の収斂の度を檢べたものでこの中の 2 個の例を除く他は皆 3 項以内で 1% 以内の誤差で收まる。これ等の表は特に參考書に解の無い様な載荷の場合に便利である。本法の突桁への應用は 1% の精度を得るために項の數があまり多くなる爲取扱はれてをらぬ。

(今井四郎 抄譯)

流水模型試験に於ける砂の移動

(Hans Kramer. "Sand Movement in Fluvial Models" Proceedings of A.S.C.E. April 1934, p. 443-483.)

流水と水路底との間の摩擦力は、水路底の傾斜と底部に加はる水の重量との積によつて表はし得るといふ du Buat 氏の基本觀念は、更に du Boys 氏によつて一般論に迄擴張された。即ち水路底の摩擦に抗する曳引力 (tractive force) は單位面積に付き次の通りである。

$$T = \rho s d \dots \dots \dots (3)$$

但し ρ : 水の單位容積の重量, s : 傾斜, d : 水深

これは du Boys 氏の曳引力の公式として知られて居るが今限界曳引力 T_0 の實用公式は次の如き函数の方程式では表はされるものとする。

$T_0 = f$ (粒の大きさ, 粒の配合状態, 粒の形, 水中に於ける單位容積の重量)

これ等の函数の中, 粒の大きさ及び配合状態は篩分析法で決められる。粒の形も實驗室で測定してきめられるが, 普通石英砂の形は一定と考へてよいかこれを 1 とする。又混合物の空隙比は密度と考へられる。故に前式は簡単に次の如くなる。

$$T_0 = f(D, e, \rho_1 - \rho) \dots \dots \dots (4)$$

但し D : 粒の直径, e : 空隙率, ρ_1 : 物質の單位容積の重量 (石英砂は 2.65 gr/cm³), ρ : 水の單位容積の重量

公式 (4) の常数を求める理論的及び數學的方法は特殊な砂の混合物の関係を表はす同次方程式を解かねばならず, 長々しい厄介な方法である。かくして得た公式も, その公式誘導に用ひたのと同型の砂の而も或る限られた狭い範圍に利用されるに過ぎない。故に簡單で實驗をも含んだものによつて求めて見やう。

1930 年 Hummel 氏がコンクリート強度に就て考へられた骨材の粒度曲線 (gradation curve) はこの目的に良い暗示を與へて呉れた。即ちコンクリートの強度は, 他の要素が等しい條件にあれば, 篩分析によつて決められるいふのである。

知らるゝ通りコンクリートの強度は粒の表面積 (即ち粒の大きさ) 及び空隙比による。これと同様に水路底物資の移動も粒の大きさ及空隙比によつて異なる。今 Hummel 氏の方法を應用し土壤力學の場合の如く粒度曲線を片目對數目盛で製圖し, その目盛は X 軸に粒徑の $\log 0.1^{\text{mm}}$ 或は $\log 1.0^{\text{mm}}$ を 10 cm とし, Y 軸には重量の百分率で 100% = 10 cm とし製圖する。粒度曲線と Y 軸と Y = 100% に於ける水平線との間に圍まれた面積 A はプランメーターで測る。(第 4 表の (5) の欄参照)

これ等の値と實驗から得た 限界曳引力 (第 4 表の

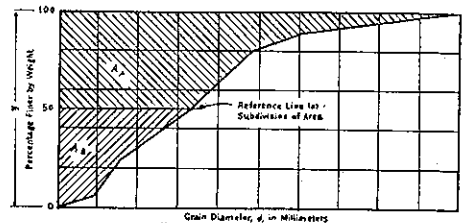
第 4 表

COMPILATION OF EXPERIMENTAL DATA: CRITICAL TRACTIVE FORCE AND EVALUATION OF GRADATION CURVE

(1)	(2)	Description of sand	Classification of data	Observed critical tractive force T_0 in grams per square meter	Specific gravity of sand in grams per cubic centimeter	EVALUATION OF GRADATION CURVE									
						Semi-logarithmic					Linear Plotting				
						A	A_A	A_B	$\frac{A}{A_A}$	$\frac{A(A_1 - p)}{A_A}$	A	A_A	A_B	$\frac{A}{A_A}$	$\frac{A(A_1 - p)}{A_A}$
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)		
(a) EXPERIMENTS BY WRITER															
1	(11)	42	2.70	75.4	44.2	27.2	0.589	214	35.3	26.0	9.3	0.368	168		
11	(11)	39	2.70	67.4	42.9	24.9	0.586	196	27.0	18.1	6.8	0.461	192		
111	(11)	45	2.70	80.8	47.7	33.1	0.694	198	40.6	28.3	11.7	0.474	164		

(3) 欄参照) との比較は或る關係を示して居るが, 然しこの A の値だけではその混合物の性質を判断するのが不充分である。その間に存する何等かの關係を見出すにはこの方法を更に押し進めて見るのが望ましい。といふのは A の値は混合物の粒の大きさは示して居るが粒の配合状態及び空隙比といふ事は示して居ないのである。勿論後者の性質はその曲線の形から何とかして表はされねばならない。それには A を更に分割しその分割した面積に就て考へるのが論理的で妥當のやうに思はれる。この考へに従ひ面積 A を任意に茲では $p = 50\%$ の横線で 2 つの面積 A_A (上部) と A_B (下部) とに別けて見た。(第 7 圖参照) この兩區

第 7 圖



EXPLANATION OF EVALUATION OF GRADATION CURVE

分の面積はプランメーターで測られるから A_B/A_A 従つて $A(\rho_1 - \rho) + A_B/A_A$ は計算され (第 3 表の (6), (7), (8), (9) 欄参照) 又これに相當する T_0 とから圖を作ることが出来る。その結果圖は大體次の様な直線關係の方程式を示すことになる。

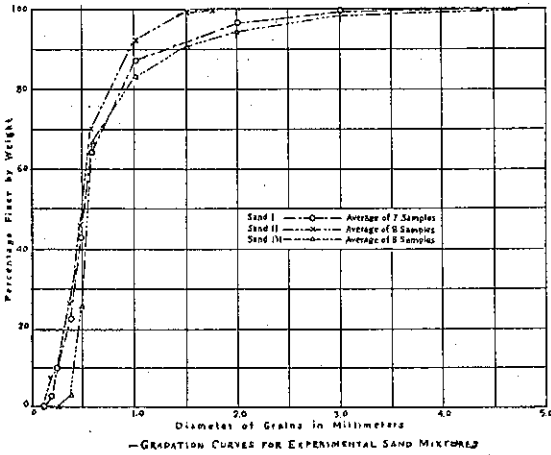
$$T_0 = \frac{kA(\rho_1 - \rho)}{A_B/A_A} \dots \dots \dots (5)$$

粒度曲線の片目對數目盛圖の代り同様の計算による普通目盛の圖は第 8 圖の如く作られ, これによる第 9

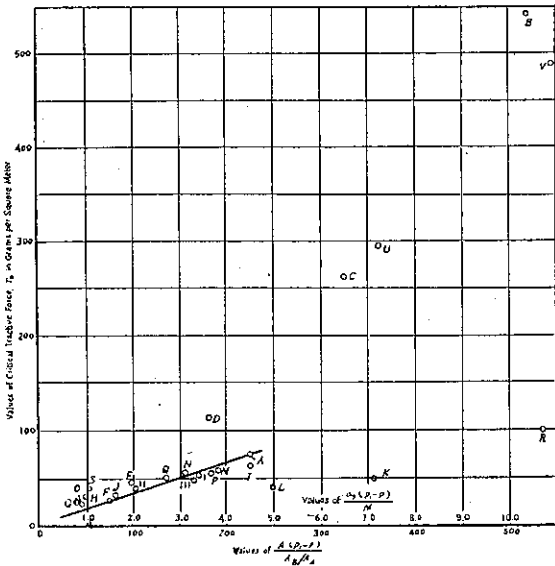
圖は大體次の直線式を示して居る。

$$T_0 = \frac{k_1 A (\rho_1 - \rho)}{A_B / A_A} \dots \dots \dots (6)$$

第 8 圖



第 9 圖



普通目盛による (6) 式と片目對數目盛による (5) 式の兩方法の利, 不利を比較考究した結果今後は (6) 式を採用することにする。

(6) 式の各因數の意味を更に詳しく考へて見やう。

T_0 = 限界曳引力 (混合物全體を動かす力即ちその中の最大粒を動かす力),

$(\rho_1 - \rho)$ = 水中に於ける砂の單位容積の重量,

尙面積 A は數學的に表はすと

$$A = \sum_{p=0\%}^{p=100\%} D dp$$

但し D : 粒の徑

p : 或る篩よりも細い粒の 100 分率

$$\frac{\sum_{p=0\%}^{p=100\%} D dp}{\sum_{p=0\%}^{p=100\%} p} \dots \dots \dots (7)$$

(7) 式は A 面積なる粒度曲線の平均横距を示して居る。平均徑 D はこの平均横距に相當する粒の大きさである。同様に (8) 式が得られ

$$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\sum_{p=0\%}^{p=a\%} D dp}{\sum_{p=0\%}^{p=100\%} D dp} \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\sum_{p=0\%}^{p=50\%} D dp}{\sum_{p=50\%}^{p=100\%} D dp} = M \dots \dots \dots (9)$$

又 $a\%$ はは前述の如く任意に 50% として横線を引いた故に (9) 式が得られる。(9) 式の A_B/A_A は或る程度, 混合物の粒度の尺度となるものでこれを均等率 M (uniformity modulus) と稱する。完全に一樣な粒の場合 $p=50\%$ の横線に對するその値は 1 となる。又混合物に對しては 1 より小となり, 最大粒と最小粒の大きさの開きが大になれば大になる程零に近づくものである。

前述の定義により又各種の實驗から求められた常數 M' の値により (6) 式は次の如く書き換へられる。

$$T_0 = \frac{100}{6} \frac{D(\rho_1 - \rho)}{M} \dots \dots \dots (10)$$

但し T_0 : 限界曳引力 (gr/m²)

D : 粒の平均徑 (mm)

$(\rho_1 - \rho)$: 水中に於ける物質の單位容積の重量 (gr/cm³)

M : 均等率

常數 100/6 は便宜上殊更分數として示したもので, 又粒度曲線から求められた D, M の値は何れも粒度曲線を作つた目盛の如何には關しない。

(4) 式の特別式である (10) 式によれば T_0 は $(\rho_1 - \rho)$ 及び粒の大きさ D に比例し空隙率に逆比例する (空隙は均等率 M で表はされる) ことが示されて居る。

以上を要約すると珍しい誘導方法にも関わらず、公式 (10) 式は合理的で理論にも一致して居る。この公式は実験及び限られた資料から導かれたものなる故その應用範圍や精確度には勿論限度がある。精確度は $\pm 15\%$

位の範圍であるが曳引力を決定することの如何に困難であるかといふ點から考へるとこれ位で許して貰はねばなるまい。2.65 gr/cm³ の普通石英砂に對して (10) 式は次の如くなる。

$$T_0 = 27.5 \frac{D}{M} \dots\dots\dots (11)$$

(岡崎三吉 抄譯)